Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 519.7

К. В. РУДАКОВ

СИММЕТРИЧЕСКИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКЦИИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

Работа выполнена в рамках алгебраического подхода к проблеме распознавания [1—4]. В статье будут использоваться понятия и обозначения, введенные в [5, 6].

Класс полных допустимых категорий (подкатегорий категорий $\Psi^{q,l}$) содержит в себе категории, соответствующие всем возможным универсальным ограничениям для задач классификации. Условия, определяющие полные допустимые категории,— самые общие ограничения, без которых рассмотрение проблемы полноты (разрешимости) не может проводиться.

В то же время именно в силу общности определения полных допустимых категорий их исследование не может быть проведено достаточно подробно. Это обстоятельство заставляет ставить вопрос о выделении в классе полных допустимых категорий подклассов достаточно узких для того, чтобы их можно было детально исследовать, и одновременно достаточно широких, покрывающих весь или хотя бы большую часть спектра используемых на практике категорий (систем универсальных ограничений). Такими подклассами и являются классы симметрических и функциональных категорий.

Симметрические универсальные ограничения (симметрические категории) возникают в конкретных задачах как выражение информации о различного рода однородностях объектов и классов. Так, например, информации об однородности всех объектов, фигурирующих в некоторой задаче, соответствует требование, чтобы при произвольной перестановке строк в матрице информации точно так же переставлялись бы и строки в информационной матрице, порождаемой корректным алгоритмом.

При решении практических задач могут, конечно, встретиться и существенно более сложные ситуации. Так, может быть известно, что некоторые объекты по отношению к некоторым классам должны классифицироваться по одинаковым законам. Все случаи такого рода описываются системами симметрических универсальных ограничений, выражаемых симметрическими категориями.

Помимо информации об однородности различных объектов и классов, в конкретных задачах часто имеется некоторая информация о независимости, сформулированная, например, таким образом: факт принадлежности i-го объекта j-му классу не зависит от того, имеют ли место факты принадлежности i_1-го объекта j_1-му классу, ..., i_k-го объекта j_k-му классу

Учитывая, что вся исходная информация, относящаяся «локально» к i-му объекту и j-му классу, представлена элементом I_{ij} матрицы информации $I = \|I_{ij}\|_{q\times l}$, получаем, что формальным выражением информации о независимости является требование, чтобы корректный алгоритм мог быть задан функциями с наборами аргументов, соответствующими информации о независимости.

Пусть, например, известно, что объекты в рассматриваемой выборке попарно взаимно независимы. В этом случае корректный алгоритм должен определяться функциями, наборами аргументов которых являются строки матрицы информации, или может быть известно, что все объекты и классы в некоторой конкретной задаче взаимно попарно независимы и однородны. В такой ситуации из информации о независимости немедленно вытекает, что корректный алгоритм должен определяться набором функций $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{ql}$, где $f_{ij}: \mathfrak{J} \to \tilde{\mathfrak{J}}$, следующим образом: $A(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \|f_{ij}(I_{ij})\|_{q\times l}$. Из информации же об однородности следует, что $f_{11} = f_{12} = \dots = f_{ql}$, т. е. в действительности алгоритм должен определяться единственной функцией f из $\mathfrak{J}$ в $\tilde{\mathfrak{J}}$.

Общий случай наличия некоторых однородностей и независимостей может быть формализован заданием соответствующих «областей зависимости» для каждого элемента информационных матриц и «областей однородности», т. е. множеств тех элементов, которые должны обрабатываться одинаковым образом. При такой формализации выясняется, что предположение об одновременной независимости и однородности может оказаться внутренне противоречивым, т. е. оказывается, что только некоторые специальным образом устроенные предположения действительно определяют системы универсальных ограничений для задач классификации, поэтому возникает решаемая ниже проблема корректного определения соответствующих категорий.

В [5, 6] было введено понятие базы и установлено, что при исследовании конкретных категорий, используемых как выражения универсальных ограничений, должны быть получены описания баз таких категорий. Явные описания баз симметрических и функциональных категорий будут приведены в разд. 3.

В [5] отмечалось, что часто встречаются случаи, когда явное задание морфизмов категории, выражающей универсальные ограничения, в том или ином смысле неудобно. В то же время такие категории могут иметь подкатегории с «легко задаваемыми» морфизмами. Именно с такой ситуацией сталкиваемся, используя симметрические категории: морфизмы симметрических категорий определены неявно — как отображения, удовлетворяющие некоторым ограничениям, морфизмы же функциональных категорий очевидным образом легко задаются в явном виде (для их определения достаточно описать соответствующий набор функций), а сами функциональные категории являются подкатегориями симметрических. В связи с этим ниже будет приведено решение вопроса о Г-полноте функциональных категорий в соответствующих симметрических категориях.

1. СИММЕТРИЧЕСКИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Символом σ_0 будем обозначать симметрическую группу подстановок, действующих на множестве $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (q, l)\}$, т. е. группу всех взаимно-однозначных отображений S на себя. Символ σ, часто с индексами, будем использовать для обозначения подгрупп группы σ_0.

Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное множество, $\mathbf{U}$—матрица из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ и s — подстановка из σ_0. Определим действие подстановки s на матрице $\mathbf{U}$ равенством

$$s(\mathbf{U}) = s(\|U_{ij}\|_{q\times l}) = \|U'_{ij}\|_{q\times l}, \qquad (1)$$

где $U'_{ij} = U_{s(i,j)}$ при $i\in\{1,\ldots,q\}$ и $j\in\{1,\ldots,l\}$. Таким образом, действие подстановки s на матрице $\mathbf{U}$ заключается в перестановке элементов этой матрицы.

Определим также действие подстановки s на $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$, где p — произвольное натуральное число:

$$s(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p) = (s(\mathbf{U}^1), \ldots, s(\mathbf{U}^p)) \qquad (2)$$

(здесь $(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)$ — произвольный элемент $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$.

Пусть теперь σ — подгруппа группы σ_0. Сопоставим группе σ подкатегорию Σ категории $\Psi^{q,l}$, положив $\mathrm{Ob}\,\Sigma = \mathrm{Ob}\,\Psi^{q,l}$ и определив для произвольных множеств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p, r множество морфизмов $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{V}))$ как множество отображений u из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из группы σ, т. е. отображений u таких, что для всех $s\in\sigma$ и $(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)\in\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$u(s(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)) = s(u(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)). \qquad (3)$$

Категорию, определяемую группой σ_α, где α — некоторый индекс, обозначим Σ_α.

Легко видеть, что определение симметрических категорий, т. е. категорий, сопоставленных подгруппам группы σ_0, корректно. Действительно, ясно, что тождественные отображения удовлетворяют условию (3) для всех подстановок s из σ_0 и суперпозиции отображений, коммутирующих с некоторой подстановкой s из σ_0, коммутируют с этой подстановкой.

Условие (3) позволяет каждому подмножеству группы σ_0 (а не только подгруппам) соотнести соответствующие подмножества множеств морфизмов категории $\Psi^{q,l}$, однако рассмотрение может быть ограничено только случаем подгрупп группы σ_0.

Лемма 1. Пусть δ — подмножество группы σ_0, σ — подгруппа группы σ_0, для которой δ является множеством образующих. Тогда для произвольных множеств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p, r выполнено равенство

$$\Delta(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{V})) = \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{V})),$$

где $\Delta(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{V}))$ — множество отображений из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками из δ.

Доказательства этой и остальных лемм в настоящей работе аналогичны доказательствам в [3, 4].

Лемма 2. Для любой подгруппы σ группы σ_0 категория Σ является полной и допустимой.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p, r любое отображение u из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{V})$ (любой морфизм категории $\Psi^{q,l}$) может быть задано с помощью rql функций f^k_{ij} (где $k\in\{1,\ldots,r\}$, $i\in\{1,\ldots,q\}$ и $j\in\{1,\ldots,l\}$) из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{V}$ следующим образом:

$$u(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p) = (\|f^1_{ij}(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)\|_{q\times l}, \ldots$$
$$\ldots, \|f^r_{ij}(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)\|_{q\times l}) \qquad (4)$$

для произвольного набора матриц $(\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^p)$ из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$. Функциональные подкатегории категорий $\Psi^{q,l}$ возникают, если в качестве морфизмов использовать лишь отображения, допускающие представление, подобное (4), с помощью меньшего числа функций меньшего числа аргументов.

Определение 1. Функциональной сигнатурой φ называется совокупность $(S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)})$ линейно упорядоченных подмножеств множества $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (q,l)\}$ вместе с функцией λ, где $\lambda: S \to \{1, \ldots, t\}$, t — натуральное число, $t \leqslant ql$. При этом для любых (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S должно быть выполнено условие

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow (|S_{(i_1,j_1)}| = |S_{(i_2,j_2)}|). \qquad (5)$$

Функциональные сигнатуры φ будут записываться в виде

$$\varphi = (S_{(1,1)}, S_{(1,2)}, \ldots, S_{(q,l)}; \lambda).$$

Мощности множеств $S_{(i,j)}$ обозначим $z(i,j)$, т. е. по определению положим $z(i,j) = |S_{(i,j)}|$ при $(i,j)\in S$. Используя это обозначение, условие (5) можно записать так:

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow (z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)). \qquad (6)$$

Из (6) вытекает, что для всех (i, j) из S величины $z(i, j)$ однозначно определяются значениями функции λ, поэтому при $k \in \{1, \dots, t\}$ можно определить $z(k) = z(i, j)$, где (i, j) — произвольная пара из S такая, что $\lambda(i, j) = k$.

Множества $S_{(i,j)}$ запишем в виде упорядоченных наборов $(s(i, j, 1), \quad s(i, j, 2), \dots, s(i, j, z(i, j)))$, где элементы выписаны в соответствии с порядком, введенным на $S_{(i,j)}$.

Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, \dots, S_{(q,l)}; \lambda)$ — функциональная сигнатура, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — множества, p и r — натуральные числа. Задание сигнатуры φ позволяет выделить из множества всех отображений из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B})$ подмножество $\Phi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}))$, состоящее из отображений таких, что для некоторого набора функций f_k^n (где $n \in \{1, \dots, r\}$ и $k \in \{1, \dots, t\}$) $f_k^n: \mathfrak{U}^{pz(k)} \to \mathfrak{B}$ и для произвольного набора матриц $(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p)$ из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ выполнено равенство

$$u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) = u(\|U_{ij}^1\|_{q\times l}, \dots, \|U_{ij}^p\|_{q\times l}) =$$
$$= (\| f^1_{\lambda(i,j)}(U^1_{s(i,j,1)}, \dots, U^1_{s(i,j,z(i,j))}, U^2_{s(i,j,1)}, \dots$$
$$\dots, U^p_{s(i,j,z(i,j))}) \|_{q\times l}, \dots, \| f^r_{\lambda(i,j)}(U^1_{s(i,j,1)}, \dots$$
$$\dots, U^p_{s(i,j,z(i,j))}) \|_{q\times l}). \tag{7}$$

Элементы множеств $\Phi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}))$ будем называть φ-отображениями.

Множества φ-отображений не всегда можно считать множествами морфизмов соответствующих сигнатуре φ подкатегорий категорий $\Psi^{q,l}$. Такая возможность имеется только для так называемых допустимых функциональных сигнатур.

Определение 2. Функциональная сигнатура $\varphi = (S_{(1,1)}, \dots, S_{(q,l)}; \lambda)$ называется допустимой, если для нее выполнены следующие условия:

$$(i, j) \in S_{(i,j)} \text{ для всех } (i, j) \in S; \tag{8}$$

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \,\&\, ((i_1, j_1) =$$
$$= s(i_1, j_1, k)) \Rightarrow ((i_2, j_2) = s(i_2, j_2, k)) \tag{9}$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S и всех k из $\{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$;

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow (\lambda(s(i_1, j_1, k)) = \lambda(s(i_2, j_2, k))) \tag{10}$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S и всех k из $\{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$;

$$((i_1, j_1) \in S_{(i_2,j_2)}) \Rightarrow (S_{(i_1,j_1)} \subseteq S_{(i_2,j_2)}) \tag{11}$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S;

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow ((s(s(i_1, j_1, k), r) =$$
$$= s(i_1, j_1, n)) \equiv (s(s(i_2, j_2, k), r) = s(i_2, j_2, n))) \tag{12}$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S, всех k и n из $\{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$ и всех r из $\{1, \dots, z(s(i_1, j_1, k))\}$ (при выполнении (10) и (11)).

Лемма 3. Функциональная сигнатура φ определяет подкатегорию категории $\Psi^{q,l}$ тогда и только тогда, когда φ — допустимая функциональная сигнатура.

Отметим, что условия (8)—(12) независимы (существуют функциональные сигнатуры, удовлетворяющие условиям (9)—(12), но не удовлетворяющие условию (8), и т. д.).

Категорию, определяемую допустимой функциональной сигнатурой φ_α, обозначим Φ_α.

Лемма 4. Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ категория Φ_α является полной и допустимой.

3. БАЗЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КАТЕГОРИЙ

Теорема 1. Пусть σ — подгруппа симметрической группы σ_0 и X — подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — произвольное неодноэлементное множество. Множество X является базой категории Σ тогда и только тогда, когда для любой неединичной подстановки s из группы σ в множестве X существует матрица $\mathbf{U}$ такая, что $s(\mathbf{U}) \neq \mathbf{U}$.

Доказательство. Пусть X — такое подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, что для некоторой неединичной подстановки s_0 из группы σ и для всех матриц $\mathbf{U}$ из X выполнено равенство $s_0(\mathbf{U}) = \mathbf{U}$. Из соотношения (3) для всех $u \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U}))$ и всех $(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) \in X^p$ в этом случае имеем цепочку равенств

$$s_0(u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p)) = u(s_0(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p)) =$$
$$= u(s_0(\mathbf{U}^1), \dots, s_0(\mathbf{U}^p)) = u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p).$$

Отсюда следует, что

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U})),$$
$$(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) \in X^p\} \subseteq \{\mathbf{U} \mid \mathbf{U} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$
$$s_0(\mathbf{U}) = \mathbf{U}\} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$

где последнее включение — строгое, так как подстановка s_0 неединична. Следовательно, множество X в данном случае не является базой категории Σ в множестве $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$.

Пусть теперь X — такое подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, что для всякой неединичной подстановки s из группы σ в X содержится матрица $\mathbf{U}(s)$ такая, что $s(\mathbf{U}(s)) \neq \mathbf{U}(s)$. Пусть также U_0 — некоторый фиксированный элемент множества $\mathfrak{U}$ и $\mathbf{U}^0$ — матрица, все элементы которой равны U_0.

Положим, что $\sigma = \{e, s_1, s_2, \dots, s_\nu\}$, занумеровав тем самым все неединичные подстановки из группы σ.

Теперь для каждой матрицы $\mathbf{U}$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ определим отображение $u_{\mathbf{U}}$ из $\mathfrak{C}^\nu(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ следующим образом:

$$
u_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^\nu) = \begin{cases} s(\mathbf{U}), \text{ если } (\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^\nu) = \\ = s(\mathbf{U}(s_1), \dots, \mathbf{U}(s_\nu)) \text{ для некото-} \\ \text{рой подстановки } s \text{ из группы } \sigma, \\ \mathbf{U}^0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{13}
$$

где $(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^\nu)$ — произвольный элемент пространства $\mathfrak{C}^\nu(\mathfrak{U})$.

В силу выбора набора $(\mathbf{U}(s_1), \dots, \mathbf{U}(s_\nu))$ отображение $u_{\mathbf{U}}$ определено равенством (13) корректно. Ясно также, что $u_{\mathbf{U}}$ — морфизм категории Σ.

Из (13), следует, что

$$u_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}(s_1), \dots, \mathbf{U}(s_\nu)) = e(\mathbf{U}) = \mathbf{U}.$$

Отсюда в силу произвольности выбора матрицы $\mathbf{U}$ вытекает, что множество X является базой категории Σ в $\mathfrak{C}(\mathbf{U})$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть φ — допустимая функциональная сигнатура и X — подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, где $\mathfrak{U}$ — произвольное неодноэлементное множество. Множество X является базой категории Φ тогда и только тогда, когда для любых $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из множества $S = \{1, 1), (1, 2), \dots, (q, l)\}$ таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в X существует матрица $\mathbf{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ такая, что для некоторого $k \in \{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$ выполнено соотношение $U_{s(i_1, j_1, k)} \neq U_{s(i_2, j_2, k)}$.

Доказательство. Пусть X — такое подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, что для некоторых пар индексов $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из S таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, для всякой матрицы $\mathbf{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ из множества X и для всякого k из $\{1, \dots, z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)\}$ выполнено равенство $U_{s(i_1, j_1, k)} = U_{s(i_2, j_2, k)}$. Пусть также p — некоторое произвольное натуральное число.

Для любого φ-отображения u из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ в этом случае из соотношения (7) находим, что если $(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p)$ — набор матриц из X^p, то в матрице $\|U^0_{ij}\|_{q \times l} = u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p)$ выполнено равенство $U^0_{i_1 j_1} = U^0_{i_2 j_2}$.

Из сказанного выше следует, что

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) \mid (\mathbf{U}^1, \dots, \mathbf{U}^p) \in X^p,$$

$$u \in \mathrm{Hom}_\Phi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U}))\} \subseteq \{\mathbf{U} \mid \mathbf{U} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$

$$U_{i_1 j_1} = U_{i_2 j_2}\} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$

где последнее включение строгое, так как $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$. Следовательно, множество X в данном случае не является базой категории Φ в множестве $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$.

Пусть X — такое подмножество множества $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, что для любой пары $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ элементов множества S таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в множестве $\{1, \dots, z(i_1, j_1)\}$ существует k такое, что для некоторой матрицы $\mathbf{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ из множества X выполнено соотношение $U_{s(i_1, j_1, k)} \neq U_{s(i_2, j_2, k)}$.

Пусть $((i_1^1, j_1^1), (i_2^1, j_2^1)), \dots, ((i_1^\nu, j_1^\nu), (i_2^\nu, j_2^\nu))$ — все такие пары элементов множества S, что $(i_1^k, j_1^k) \neq (i_2^k, j_2^k)$ и $\lambda(i_1^k, j_1^k) = \lambda(i_2^k, j_2^k)$ при $k \in \{1, \dots, \nu\}$. Из предположения о множестве X следует, что каждому $k \in \{1, \dots, \nu\}$ можно сопоставить матрицу $\mathbf{U}(k) = \|U_{ij}(k)\|_{q \times l} \in X$ такую, что

$$(U_{s(i_1^k, j_1^k, 1)}(k), \dots, U_{s(i_1^k, j_1^k, z(i_1^k, j_1^k))}(k)) \neq$$

$$\neq (U_{s(i_2^k, j_2^k, 1)}(k), \dots, U_{s(i_2^k, j_2^k, z(i_2^k, j_2^k))}(k)).$$

Пусть, наконец, U_0 — некоторый произвольный фиксированный элемент множества $\mathfrak{U}$.

Определим теперь φ-отображения $u_{\mathbf{U}}$ из $\mathfrak{C}^\nu(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, где матрица-индекс $\mathbf{U} = \|U_{ij}\|_{q \times l}$ пробегает все пространство $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, наборами функций $f_1^{\mathbf{U}}, \dots, f_t^{\mathbf{U}}$:

$$
f_k^{\mathbf{U}}(U_1, \dots, U_{\nu z(k)}) = \begin{cases} U_{ij}, \text{ если } \lambda(i, j) = k \text{ и для не-} \\ \text{которой пары } (i, j) \text{ из } S \text{ выпол-} \\ \text{нено равенство } (U_1, \dots, U_{\nu z(k)}) = \\ = (U_{s(i, j, 1)}(1), \dots, U_{s(i, j, z(i, j))}(\nu)), \\ U_0 \text{ в противном случае,} \end{cases}
$$

где $(U_1, \dots, U_{\nu z(k)})$ — произвольные наборы из $\mathfrak{U}^{\nu z(k)}$.

В силу выбора набора $(\mathbf{U}(1), \dots, \mathbf{U}(\nu))$ функции $f_k^{\mathbf{U}}$ определены корректно. Кроме того, ясно, что имеет место равенство $u_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}(1), \dots, \mathbf{U}(\nu)) = \mathbf{U}$. Поскольку $\mathbf{U}$ — произвольная матрица из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, то отсюда вытекает, что X является базой категории Φ.

Теорема доказана.

4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДКАТЕГОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ КАТЕГОРИЙ

Определение 3. Для допустимой функциональной сигнатуры $\varphi = (S_{(1,1)}, \dots, S_{(q,l)}; \lambda)$ группой σ_φ называется подгруппа симметрической группы σ_0, состоящая из всех подстановок s_φ, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\lambda(s_\varphi(i, j)) = \lambda(i, j) \text{ для всех } (i, j) \text{ из } S; \tag{14}$$

$$s_\varphi(s(i, j, k)) = s(s_\varphi(i, j), k) \text{ для всех } (i, j) \in S$$

и

$$k \in \{1, \dots, z(i, j)\}. \tag{15}$$

Лемма 5. Функциональная категория Φ, определяемая функциональной сигнатурой φ, является подкатегорией симметрической категории Σ, определяемой группой σ, тогда и только тогда, когда σ является подгруппой группы σ_φ.

Из данной леммы следует, что для каждой функциональной категории Φ определена единственная «минимальная» симметрическая категория Σ_φ, подкатегорией которой яляется категория Φ. По этой причине вопрос о Г-полноте функциональных

Окончание см. на с. 102.

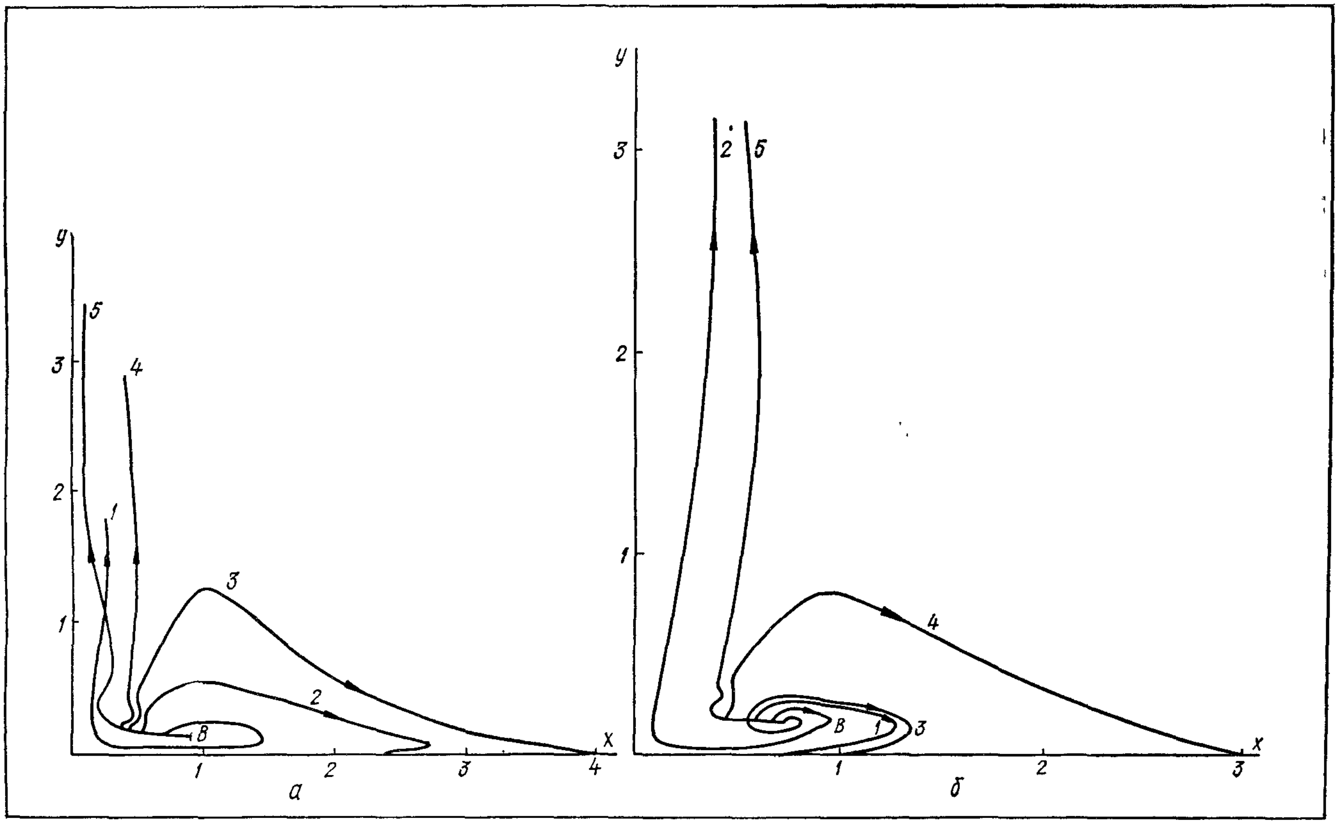

Рис. 3. Решение системы (13)—(14) при различных значениях τ. $j=0{,}0$; $\alpha=5{,}0$; $\beta=1{,}125$; $\gamma=0{,}5$; $\nu=129{,}6$; $\delta=0$ (*а*). $\mu=2{,}0$: *1* — $\tau=0{,}4$; *2* — $\tau=0{,}8$; *3* — $\tau=1{,}0$; *4* — $\tau=1{,}2$; *5* — $\tau=2{,}0$ (*б*). $\mu=5{,}0$: *1* — $\tau=0{,}1$; *2* — $\tau=0{,}2$; *3* — $\tau=0{,}4$; *4* — $\tau=0{,}8$; *5* — $\tau=1{,}0$

3. Биологические причины, вызывающие эффект иммуностимуляции роста опухоли, могут быть различны. Математически они обусловлены конкретными нелинейностями в характере процессов опухолевого роста и реакций организма. В рамках концепции двухуровневой противоопухолевой резистентности организма иммуностимуляция дремлющих опухолей обусловлена существованием двух популяций клеток-киллеров, различающихся по скорости генерации и исходным концентрациям их в организме. Пусть, например, НК или/и макрофаги, присутствующие обычно в значительно большем количестве в ткани, чем цитотоксические Т-лимфоциты, медленно убивают опухолевые клетки, а время, необходимое для повреждения опухолевой клетки в конъюгатах ЭК-клетка-мишень, окажется соизмеримо или больше времени деления опухолевой клетки-мишени. При определенном запаздывании в появлении специфических ЦТЛ из клеток памяти появление ЦТЛ во времени может приходиться на период, когда большая часть опухолевых клеток окажется «экранированной» НК или/и макрофагами. Тогда при невысокой иммунореактивности ЦТЛ на опухолевые антигены [1] популяция опухолевых клеток в целом будет расти. Эти представления допускают экспериментальную проверку.

4. Для успешной борьбы с раковыми клетками в организме хозяина должны существовать механизмы, поддерживающие определенные оптимальные интервальные соотношения между активностью специфической и неспецифической подсистемами резистентности. В частности, несмотря на различное происхождение ЦТЛ и НК, между величиной запаздывания в появлении ЦТЛ и цитотоксической активностью НК, как следует из полученных данных, должна иметь место определенная сопряженность. Можно предположить, что поддержание определенных интервальных пропорций между относительно автономными подсистемами иммунитета существенно для иммунного гомеостаза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prehn R. T. Review / commentary. The dose-response curve in tumor-immunity // Int. J. Immunopharmacology.— 1983.— **5**, N 4.— P. 255—257.
2. Colmeraver M. E., Koziol I. A., Pilch V. H. Enhancement of metastasis development by BCG immunotherapy // J. Surg. Oncology.— 1980.— **15**, N 3.— P. 235—241.
3. Wheelock E. F., Weinhold K., Levich I. The tumor dormant state // Adv. Cancer Res.— 1981.— **34**, P. 107—135.
4. Alsabti A. Tumor dormancy : a review // Tumor Res.— 1978.— **13**.— P. 1—13.

5. Степанова Н. В., Романовский Ю. М. Классификация математических моделей в микробиологии и методы их исследований // Применение математических методов в микробиологии.— Пущино : Отд. НТИ н.-и. ВЦ АН СССР.— 1975.— С. 3—26.
6. Lisi G. de, Rescigno R. Immune surveillance and neoplasia-1. A minimal mathematical model // Bull. Math. Biol.— 1977.— **39**, N 1/2.— P. 201—202.
7. Rescigno R., Lisi G. de. Immune surveillance and neoplasia-2. A two-stage mathematical model // Ibid.— N 3/4.— P. 487—497.
8. Garay R. P., Lefever R. A kinetic approach to the immunology cancer : stationary states properties of effector-target cell reactions // J. Theor. Biol.— 1978.— **73**, N 2.— P. 417—438.
9. Кузнецов В. А., Волькенштейн М. В. Математическая модель клеточного иммунного ответа на рост опухолей / Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по биол. и мед. кибернетике (Сухуми, окт. 1978).— М. : АН СССР, 1978.— Т. 1.— С. 58—61.
10. Кузнецов В. А. Динамика иммунологических клеточных противоопухолевых реакций. I. Синтез многоуровневой модели // Математические методы теории систем.— Фрунзе : Кирг. гос. ун-т, 1979.— Вып. 1.— С. 57—71.
11. Кузнецов В. А., Волькенштейн М. В. Динамика иммунологических клеточных противоопухолевых реакций. II. Качественный анализ модели // Там же.— С. 72—100.
12. Кузнецов В. А. Бифуркации в модели двухуровневой реактивности иммунной системы на антигены развивающейся неоплазмы // Динамика биологических популяций.— Горький : Горьк. гос. ун-т, 1983.— С. 52—64.
13. Кузнецов В. А. Анализ популяций клеток, проявляющих естественную резистентность к опухолям // Иммунология.— 1984.— № 3.— С. 43—51.
14. Математическое моделирование взаимодействия лимфоцит — опухолевая клетка / В. В. Иванов, В. М. Яненко, К. Л. Атоев и др. // Имитация систем в биологии и медицине.— Прага : Дом техники, 1986.— 740 с.
15. Двухфазный характер взаимодействия Т-лимфоцитов с аллогенными стволовыми клетками / Р. В. Петров, И. М. Дозморов, Г. В. Луценко и др. // Иммунология.— 1985.— № 4.— С. 16—19.
16. Grossman Z., Berke G. Tumor escape from immuneelimination // J. Theor. Biol.— 1980.— **83**, N 2.—P. 267—296.
17. Дейчман Г. И. Современные концепции иммунологических взаимоотношений опухоли и организма // Опухолевый рост как проблема биологии развития.— М. : Наука, 1979.— С. 208—230.
18. Boer R. J. de, Hogeweg P. Tumor escape immune elimination : simplitied precurcor bound cytotoxity models // J. Theor. Biol.— 1985.— **113**, N 4.— P. 719—736.
19. Boer R. J. de, Hogeweg P. Implications of macrophage T-lymphocyte interactions for tumor rejectability / Immunology and Epidemiology // Ed. G. W. Hofman, T. Hraba.— Berlin; New York : Springer, 1985.— P. 120—140.
20. Молчанов А. М. Многобарьерный иммунитет // Биофизика.— 1971.— **16**, № 4.— С. 482—486.
21. Кузнецов В. А., Волькенштейн М. В. Анализ потенциальных форм поведения кинетики цитотоксических клеточных противоопухолевых реакций // Иммунитет и аллергия в инфекционной и неинфекционной патологии.— Фрунзе : Илим, 1980.— С. 62—64.
22. Эмануэль Н. М. Химическая и биологическая кинетика // Успехи химии.— 1981.— **50**, № 10.— С. 1721—1809.
23. Белохвостов А. С., Войтенков Б. О. Роль иммуносупрессивных факторов опухолей в трех стадиях иммунного взаимодействия организма // Успехи соврем. биологии.— 1983.— **95**, вып. 2.— С. 255—272.
24. North R. J. The murine antitumor immune response and its therapeutic manipulation // Adv. Immunol.— 1984. — **35**.— P. 89—154.
25. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии.— М. : Наука, 1980.— 264 с.
26. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием.— М. : Машиностроение, 1974.— 139 с.
27. Dibrov B. F., Livshits M. A., Volkenstein M. V. Mathematical model of immune process // J. Theor. Biol.— 1977.— **65**, N 4.— P. 609—631.
28. Яненко В. М., Мазуренко В. А. Моделирование механизмов регуляции взаимодействия элементов гемопоэза в процессе течения лейкоза // Математические модели в иммунологии и медицине.— М. : Мир, 1986.— С. 223—229.
29. Супрессорные Т-клетки в гомеостазе иммунной системы и в условиях патологии / А. Бастин, Р. Х. Лоблей, Р. Д. Трент и др.// Последние достижения в клинической иммунологии.— М. : Медицина, 1983.— С. 54—95.

Поступила 01.08.84

Окончание. Начало см. на с. 76.

категорий в симметрических может быть поставлен следующим образом: при каких условиях функциональная категория Φ является Г-полной подкатегорией симметрической категории Σ_φ? Ответ на этот вопрос дает теорема 3.

Теорема 3. Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}; \lambda)$ — допустимая функциональная сигнатура. Категория Φ является Г-полной подкатегорией категории Σ_φ тогда и только тогда, когда для любой пары индексов (i_1, j_1) из S выполнено следующее условие: если существует пара индексов (i_2, j_2) в S такая, что $S_{(i_1,j_1)} \subset S_{(i_2,j_2)}$, где включение строгое, то $|\lambda^{-1} \times \times (\lambda(i_1, j_1))| = 1$, где $\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))$ — класс ядерной эквивалентности для отображения λ, содержащий (i_1, j_1), и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))|$—мощность этого класса.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству леммы 13 в [3]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II // Кибернетика.— 1977.— № 4.— С. 5—17; № 6.— С. 21—27.
2. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики.— 1978.— Вып. 33.— С. 5—68.
3. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты).— М. : ВЦ АН СССР, 1980.— 66 с.
4. Рудаков К. В О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели).— М. : ВЦ АН СССР, 1981.— 48 с.
5. Рудаков К. В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика.— 1987.— № 2.— С. 30—35.
6. Рудаков К. В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Там же.— № 3.— С. 106—108.

Поступила 19 09.84