ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1987

ТОМ 297 № 1

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

Тогда для любых взаимно однозначных соответствий $\varphi_B: B_1 \to B_2$ и $\varphi_\infty: f_1^{-1}(\infty) \to f_2^{-1}(\infty)$ таких, что порядок ветвления отображения f_1 в каждой точке $p \in f_1^{-1}(\infty)$ равен порядку ветвления отображения f_2 в точке $\varphi_\infty(p)$, существуют гомеоморфизмы $\varphi_P: P_1 \to P_2$ и $\varphi_S: S \to S$ такие, что $\varphi_P|_{B_1} = \varphi_B$, $\varphi_P|_{f_1^{-1}(\infty)} = \varphi_\infty$ и $\varphi_S f_1 = f_2 \varphi_P$.

Центральный научно-исследовательский
институт геодезии, аэросъемки и картографии
им. Ф.Н. Красовского
Москва

Поступило
9 IV 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Натанзон С.М.* – УМН, 1975, т. 30, вып. 1, с. 251–252. 2. *Натанзон С.М.* Тр. ММО, 1978, т. 37, с. 219–253. 3. *Натанзон С.М.* – ДАН, 1984, т. 279, № 4, с. 803–805. 4. *Clebsch A.*– Math. Ann., 1873, vol. 6, p. 1–15.

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

К.В. РУДАКОВ

О СИММЕТРИЧЕСКИХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 21 III 1986)

В заметке приводятся результаты, полученные в рамках алгебраического подхода [1, 2] к проблеме распознавания (классификации). В [3, 4] изучение полноты (разрешимости) задач классификации сведено к изучению специальных (называемых полными и допустимыми) подкатегорий категорий $\Psi^{q,l}$ (q и l – натуральные числа). Категории $\Psi^{q,l}$ являются полными подкатегориями категории множеств и имеют в качестве объектов пространства $(q \times l)$-матриц над произвольными множествами и все конечные декартовы степени таких пространств.

Задачи распознавания могут ставиться как задачи синтеза алгоритмов, реализующих отображения из одного заданного пространства (пространства возможных начальных информаций) в другое (пространство возможных финальных информаций), причем реализуемые отображения должны удовлетворять некоторым ограничениям (каждая система таких ограничений определяет соответствующую задачу).

Рассматриваемые системы ограничений естественным образом распадаются на пары подсистем, содержащих универсальные и локальные ограничения. Класс полных допустимых категорий, являющихся подкатегориями категорий $\Psi^{q,l}$, содержит категории, соответствующие всем возможным универсальным ограничениям для задач классификации. Условия, определяющие полные допустимые категории, – это самые общие ограничения, без которых рассмотрение проблемы полноты вообще не может проводиться. В то же время именно в силу общности определения полных допустимых категорий их исследование не может быть проведено достаточно подробно. Это заставляет ставить вопрос о выделении в классе полных допустимых категорий подклассов, достаточно узких, допускающих детальное исследование, и одновременно достаточно широких, покрывающих весь или хотя бы большую часть спектра используемых на практике категорий. Такими подклассами и являются классы симметрических и функциональных категорий, рассмотрению которых посвящена настоящая заметка.

Пусть A и B – произвольные множества, Ψ – подкатегория категории $\Psi^{q,l}$ (далее будем считать, что q и l – произвольные фиксированные натуральные числа). Множество морфизмов $\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(A), \mathfrak{C}(B))$, где $\mathfrak{C}(A)$ и $\mathfrak{C}(B)$ – пространства $(q \times l)$-матриц над A и B, будем обозначать $H_\Psi(A, B)$, множество $\bigcup\limits_{p=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}^p(A), \mathfrak{C}(B))$ будем обозначать $\mathcal{H}_\Psi(A, B)$. Для любого $X \subseteq \mathfrak{C}(A)$ положим

$$H_\Psi(A, B)(X) = \{u(x) \mid x \in X,\ u \in H_\Psi(A, B)\},$$

$$\mathcal{H}_\Psi(A, B)(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(x_1, \ldots, x_p) \mid (x_1, \ldots, x_p) \in X^p,$$

$$u \in \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}^p(A), \mathfrak{C}(B))\}.$$

Определение 1. Пусть Ψ – подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Категория Ψ называется полной, если для любых множеств A и B при $|A| > 1$ выполнено равенство $\mathcal{H}_\Psi(A, B)(\mathfrak{C}(A)) = \mathfrak{C}(B)$.

Замечание. Полные категории не являются, вообще говоря, полными подкатегориями категории $\Psi^{q,l}$.

Пусть u: $A^p \to B$, где A и B – произвольные множества, p – натуральное число. Диагонализацией u назовем отображение u_Δ: $A \to B$ такое, что для всех $x \in A$ выполнено равенство $u_\Delta(x) = u(x, x, \ldots, x)$.

Определение 2. Подкатегория Ψ категории $\Psi^{q,l}$ называется допустимой, если для любых двух морфизмов u и v категории Ψ, где u: $\mathfrak{C}^{p_1}(A) \to \mathfrak{C}^{p_2}(B)$ и v: $\mathfrak{C}^{p_3}(A) \to \mathfrak{C}^{p_4}(B)$, произведение $u \times v$ и диагонализация u_Δ также являются морфизмами категории Ψ.

Центральным при изучении полноты задач классификации оказывается понятие базы.

Определение 3. Пусть A – произвольное неодноэлементное множество и $X \subseteq \mathfrak{C}(A)$. Множество матриц X называется базой категории Ψ, если $\mathcal{H}_\Psi(A, A)(X) = \mathfrak{C}(A)$.

Символом σ_0 будем обозначать симметрическую группу подстановок множества $S = \{(i, j) \mid i \in \{1, \ldots, q\},\ j \in 1, \ldots, l\}\}$.

Пусть A – произвольное множество, a – матрица из $\mathfrak{C}(A)$ и s – подстановка из σ_0. Определение действия подстановки s на матрице a дадим равенством

$$s(a) = s(\| \alpha_{ij} \|_{q \times l}) = \| \alpha'_{ij} \|_{q \times l},$$

где $\alpha'_{ij} = \alpha_{s(i,j)}$ для всех $(i, j) \in S$. Тем самым определено действие s на $\mathfrak{C}(A)$.

Определим также действие подстановки s на $\mathfrak{C}^p(A)$, где p – произвольное натуральное число:

$$s(a_1, \ldots, a_p) = (s(a_1), \ldots, s(a_p))$$

(здесь $(a_1, \ldots, a_p)$ – произвольный набор матриц из $\mathfrak{C}^p(A)$.

Пусть теперь σ – подгруппа группы σ_0. Сопоставим ей подкатегорию Σ категории $\Psi^{q,l}$, положив $\mathrm{Ob}\Sigma = \mathrm{Ob}\Psi^{q,l}$ и определив для произвольных множеств A и B и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов $\mathrm{Hom}_\Sigma(\mathfrak{C}^{p_1}(A), \mathfrak{C}^{p_2}(B))$ как множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}(A)$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(B)$, коммутирующих со всеми подстановками из σ, т.е. как множество всех таких отображений u, что для всех $s \in \sigma$ и $(a_1, \ldots, a_{p_1}) \in \mathfrak{C}^{p_1}(A)$ выполнено равенство

$$u(s(a_1, \ldots, a_{p_1})) = s(u(a_1, \ldots, a_{p_1})).$$

Л е м м а 1. *Для любой подгруппы σ группы σ_0 категория Σ является полной и допустимой.*

Симметрические категории формализуют информацию об однородности различных объектов и классов в задачах классификации. Формализацией же информации об одновременной однородности и независимости являются описываемые ниже функциональные категории.

О п р е д е л е н и е 4. Ф у н к ц и о н а л ь н о й с и г н а т у р о й φ называется совокупность $(S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}, \lambda)$ линейно упорядоченных подмножеств $S_{(i,j)}$ множества S и функции λ: $S \to \{1, \ldots, t\}$, где t – натуральное число, $t \leqslant ql$. При этом для любых (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S должно быть выполнено условие

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow (z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)),$$

где $z(i, j)$ – мощность множества $S_{(i,j)}$

Множества $S_{(i,j)}$ будем записывать в виде наборов $(s(i, j, 1),\ s(i, j, 2), \ldots$ $\ldots, s(i, j, z(i, j)))$, где элементы выписаны в соответствии с порядком на $S_{(i,j)}$.

Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots\ S_{(q,l)}, \lambda)$ – функциональная сигнатура, A и B – множества, p_1 и p_2 – натуральные числа. Определим множество $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}(A), \mathfrak{C}^{p_2}(B))$ как множество всех отображений из $\mathfrak{C}^{p_1}(A)$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(B)$, допускающих задание с помощью $p_2 t$ функций f_k^r (где $r \in \{1, \ldots, p_2\}$ и $k \in \{1, \ldots, t\}$) следующим образом:

$$u(a_1, \ldots, a_{p_1}) = u(\|\alpha_{ij}^1\|_{q\times l}, \ldots, \|\alpha_{ij}^{p_1}\|_{q\times l}) = (\|\beta_{ij}^1\|_{q\times l}, \ldots, \|\beta_{ij}^{p_2}\|_{q\times l}),$$

где $\beta_{ij}^r = f_{\lambda(i,j)}^r(\alpha_{s(i,j,1)}^1, \ldots, \alpha_{s(i,j,z(i,j))}^1), \ldots, \alpha_{s(i,j,z(i,j))}^{p_1})$ для всех $(a_1, \ldots, a_{p_1}) \in$ $\in \mathfrak{C}^{p_1}(A)$.

Множества отображений $\Phi(\mathfrak{C}^{p_1}(A), \mathfrak{C}^{p_2}(B))$ не во всех случаях можно рассматривать как множества морфизмов определенной подкатегории категории $\Psi^{q,l}$. Такая возможность имеется лишь для определяемых ниже допустимых функциональных сигнатур.

О п р е д е л е н и е 5. Функциональная сигнатура $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}, \lambda)$ называется д о п у с т и м о й, если $(i, j) \in S_{(i,j)}$ для всех $(i, j) \in S$,

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2))\ \&\ ((i_1, j_1) = s(i_1, j_1, k)) \Rightarrow ((i_2, j_2) = s(i_2, j_2, k))$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S и k из $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$,

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow (\lambda(s(i_1, j_1, k)) = \lambda(s(i_2, j_2, k)))$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S и k из $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$,

$$((i_1, j_1) \in S_{(i_2, j_2)}) \Rightarrow (S_{(i_1, j_1)} \subseteq S_{(i_2, j_2)})$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S,

$$(\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)) \Rightarrow ((s(s(i_1, j_1, k), k_1) =$$
$$= s(i_1, j_1, k_2)) \equiv (s(s(i_2, j_2, k), k_1) = s(i_2, j_2, k_2)))$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S, всех k и k_2 из $\{1, \ldots, z(i_1, j_1)\}$ и всех k_1 из $\{1, \ldots$ $\ldots, z(s(i_1, j_1, k))\}$ (при выполнении двух предыдущих условий).

Л е м м а 2. *Функциональная сигнатура φ определяет подкатегорию Φ категории $\Psi^{q,l}$ тогда и только тогда, когда φ – допустимая функциональная сигнатура.*

Л е м м а 3. *Для любой допустимой функциональной сигнатуры φ соответствующая категория Φ является полной и допустимой.*

Т е о р е м а 1. *Пусть σ – подгруппа симметрической группы σ_0 и X – подмножество пространства $\mathfrak{C}(A)$, где A – некоторое произвольное множество. Множество X является базой категории Σ тогда и только тогда, когда для любой неединичной подстановки s из σ в X существует матрица a такая, что $s(a) \neq a$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть φ – допустимая функциочальная сигнатура и X – подмножество пространства $\mathfrak{C}(A)$, где A – некоторое произвольное множество. Множество X является базой категории Φ тогда и только тогда, когда для любых различных (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S таких, что $\lambda(i_1, j_1) = \lambda(i_2, j_2)$, в X существует матрица $a = \|\alpha_{ij}\|_{q \times l}$ такая, что для некоторого $k \in \{1, \ldots, z(i_1, j_1) = z(i_2, j_2)\}$ выполнено $\alpha_{s(i_1, j_1, k)} \neq \alpha_{s(i_2, j_2, k)}$.*

Каждая функциональная категория является подкатегорией соответствующих симметрических категорий. При этом морфизмы функциональных категорий очевидным образом легко задаются в явном виде (для их определения достаточно описать наборы функций), а морфизмы симметрических категорий определены неявно, как отображения, удовлетворяющие некоторой системе ограничений. В связи с этим возникает вопрос о возможности решения задач классификации, универсальные ограничения в которых выражены симметрическими категориями, с использованием лишь морфизмов функциональных подкатегорий таких категорий. Этот вопрос и будет решен ниже.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 – подкатегории категории $\Psi^{q,l}$, причем Ψ_1 – подкатегория категории Ψ_2. Категория Ψ_1 называется Г - п о л н о й п о д к а т е г о р и е й к а т е г о р и и Ψ_2, если всякая база категории Ψ_2 является одновременно и базой категории Ψ_1.

О п р е д е л е н и е 7. Для допустимой функциональной сигнатуры $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}, \lambda)$ г р у п п о й σ_φ называется подгруппа симметрической группы σ_0, состоящая из всех подстановок s_φ, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(s_\varphi(i, j)) = \lambda(i, j)$$

для всех (i, j) из S и

$$s_\varphi(s(i, j, k)) = s(s_\varphi(i, j), k)$$

для всех (i, j) из S и k из $\{1, \ldots, z(i, j)\}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть φ – некоторая допустимая функциональная сигнатура и σ – подгруппа группы σ_0. Категория Φ является подкатегорией категории Σ тогда и только тогда, когда группа σ_φ является подгруппой группы σ.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $\varphi = (S_{(1,1)}, \ldots, S_{(q,l)}, \lambda)$ – допустимая функциональная сигнатура. Категория Φ является Г-полной подкатегорией категории Σ_φ, соответствующей подгруппе σ_φ, тогда и только тогда, когда сигнатура φ удовлетворяет условию*

$$(S_{(i_1, j_1)} \subseteq S_{(i_2, j_2)}) \,\&\, (S_{(i_1, j_1)} \neq S_{(i_2, j_2)}) \Rightarrow (|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))| = 1)$$

для всех (i_1, j_1) и (i_2, j_2) из S, где $\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))$ – класс ядерной эквивалентности для отображения λ, содержащий (i_1, j_1) и $|\lambda^{-1}(\lambda(i_1, j_1))|$ – мощность этого класса.

Вычислительный центр
Академии наук СССР, Москва

Поступило
16 IV 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю.И.* В сб.: Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1978, вып. 33, с. 5–68. 2. *Журавлев Ю.И.* – Кибернетика 1977, № 4, с. 5–17; № 6, с. 21–27. 3. *Рудаков К.В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты). М., 1980. 66 с. 4. *Рудаков К.В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели). М., 1981. 48 с.