АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

МОСКВА · 1986

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 11

УДК 519.7

О НЕКОТОРЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ КЛАССИФИКАЦИИ

РУДАКОВ К. В.

(Москва)

В рамках алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов классификации определены понятия универсальных и локальных ограничений и изучены наиболее часто встречающиеся универсальные ограничения.

§ 1. Основные понятия

В работе излагаются результаты, полученные в рамках алгебраи*ческого подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов классификации* на базе семейств эвристических алгоритмов [1], [2].

Основная изучаемая ниже задача — это задача синтеза алгоритма, реализующего некоторое отображение из множества $\mathfrak{I}_i$ (множества возможных начальных информаций) в множество $\mathfrak{I}_f$ (множество возможных финальных информаций). В качестве $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ при этом рассматриваются пространства матриц произвольного, но фиксированного размера $q\times l$ с элементами из множеств допустимых начальных $\mathfrak{I}$ и финальных $\tilde{\mathfrak{I}}$ информаций.

Пусть $\mathfrak{U}$ — множество. Пространство матриц размера $q\times l$ с элементами из $\mathfrak{U}$ будет обозначаться $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ (q и l на протяжении всей работы считаются произвольными фиксированными натуральными числами). Ниже будут рассматриваться пространства $(q\times l)$-матриц над различными множествами, причем будет считаться, что для таких множеств выполнено единственное предположение: в каждом из них содержится не менее двух элементов.

При фиксированных множествах $\mathfrak{I}$ и $\tilde{\mathfrak{I}}$ основная проблема естественным образом распадается на две части: выделение из множества $\mathfrak{M}_0 = \{A \mid A : \mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})\}$ подходящего отображения и синтез алгоритма, реализующего это отображение. В дальнейшем часто не будут различаться алгоритмы и реализуемые ими отображения.

Будем считать, что условия, выделяющие из $\mathfrak{M}_0$ требуемое отображение, формализованы в виде системы ограничений I_0. Таким образом, при фиксированных $\mathfrak{I}$ и $\tilde{\mathfrak{I}}$ каждая задача определяется своей системой ограничений I_0. Множество отображений, удовлетворяющих системе ограничений I_0, будет обозначаться $\mathfrak{M}(I_0)$. $\mathfrak{M}(I_0)\subseteq\mathfrak{M}_0$. Отметим, что в большинстве случаев $|\mathfrak{M}(I_0)|>1$.

Допустим, что рассматривается некоторая задача Z, т. е. некоторая система ограничений I_0. Отображения из множества $\mathfrak{M}(I_0)$ называются при этом допустимыми для задачи Z. Любой алгоритм, реализующий произвольное допустимое отображение, называется корректным для задачи Z, а сама задача Z является задачей синтеза произвольного корректного алгоритма.

В задачах классификации ограничения, составляющие I_0, содержат пару матриц $(I, \tilde{I}) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{J}) \times \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ (при этом I называется матрицей информации, а $\tilde{I}$ — информационной матрицей задачи Z, определенной системой ограничений I_0), а в качестве допустимых рассматриваются только отображения A из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, удовлетворяющие условию $A(I) = \tilde{I}$ (в I_0 могут, конечно, содержаться и некоторые дополнительные ограничения).

Легко видеть, что из постановки задач классификации как задач экстраполяции функций из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$, изначально определенных в единственной точке I пространства $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$, вытекает особо важное значение роли, которую играют для этих задач дополнительные («неэкстраполяционные») ограничения. Действительно, если таких ограничений нет, то для любой задачи Z, определенной парой матриц $(I, \tilde{I})$, в качестве решения может быть предложено допустимое отображение $A : \mathfrak{C}(\mathfrak{J}) \to \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ такое, что для всех I' из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ имеет место равенство $A(I') = \tilde{I}$.

Результатом решения задачи классификации должно быть явно заданное отображение из $\mathfrak{M}(I_0)$ (корректный алгоритм). В рамках алгебраического подхода изучается следующий способ построения корректных алгоритмов. Изначально на базе общих содержательных гипотез о природе изучаемой реальной ситуации формируется параметрическое семейство отображений $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_0$. Так как при этом очень часто оказывается, что $\mathfrak{M} \cap \cap \mathfrak{M}(I_0) = \varnothing$, т. е. что задача неразрешима в рамках исходного семейства $\mathfrak{M}$, то далее рассматривается задача синтеза корректного алгоритма на базе отображений из $\mathfrak{M}$ с помощью так называемых корректирующих операций.

В самом общем случае корректирующая операция — это произвольная операция над множеством отображений $\mathfrak{M}_0$. В рамках алгебраического подхода используется, однако, только один из возможных способов определения операций над отображениями [1]—[4]. Пусть $\mathfrak{R}_0 = \{A \mid A : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}\}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, и пусть $\mathfrak{G}'$ — некоторое множество операций над $\mathfrak{U}$. Каждой p-арной операции G' из $\mathfrak{G}'$ сопоставляется p-арная операция G над $\mathfrak{R}_0$:

$$(1) \qquad G(A_1, \ldots, A_p)(V) = G'(A_1(V), \ldots, A_p(V))$$

для произвольных $A_1, \ldots, A_p$ из $\mathfrak{R}_0$ и V из $\mathfrak{B}$. В результате возникает множество $\mathfrak{G}$, состоящее из операций над $\mathfrak{R}_0$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{G}'$ соотношением (1).

При решении прикладных задач множество $\tilde{\mathfrak{J}}$ определяется содержательными требованиями к виду «ответов», даваемых искомыми алгоритмами. При этом часто оказывается, что определение «удобных» в том или ином смысле операций над пространством матриц $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{J}})$ невозможно [2]. Подход, позволяющий преодолеть трудности определения корректирующих операций непосредственно на базе соотношения (1) в применении к $\mathfrak{M}_0$, был предложен в [1], [2]. Он основан на использовании специально выбираемого пространства матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, где $\mathfrak{R}$ называется множеством допустимых оценок.

Напомним, что для произвольных отображений $u : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ и $v : \mathfrak{U}' \to \mathfrak{B}'$ (где $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{U}'$ и $\mathfrak{B}'$ — некоторые произвольные множества) произведение $u \times v$ — это отображение из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ в $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ такое, что для всех (U, U') из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ выполнено равенство $(u \times v)((U, U')) = (u(U), v(U'))$. Пусть $u : \mathfrak{U}^p \to \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, p — произвольное натуральное число. Диагонализацией отображения u назовем отображение $u_\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ такое, что для всех U из $\mathfrak{U}$ выполнено равенство $u_\Delta(U) = u(U, \ldots \ldots, U)$.

При использовании для определения корректирующих операций пространства матриц оценок $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ место исходного эвристического семейства $\mathfrak{M}$ занимают эвристические же семейства отображений $\mathfrak{M}^0$ и $\mathfrak{M}^1$, где

$$\mathfrak{M}^0 \subseteq \{B \mid B : \mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}(\mathfrak{R})\}, \quad \mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \{C \mid C : \mathfrak{C}^p(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})\},$$

называемые семействами алгоритмических операторов и решающих правил. Семейство $\mathfrak{M}$ определяется при этом следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{C \circ (B_1 \times \ldots \times B_p)_\Delta \mid C \in \mathfrak{M}^1, \quad (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p\}.$$

Корректирующие операции определяются с использованием (1) на базе операций, определенных над $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$. Отметим, что как множество допустимых оценок чаще всего используется множество действительных чисел $\mathbf{R}$, в результате чего оказывается возможным определять корректирующие операции на базе операций над действительными матрицами.

Пусть $\mathfrak{F}'$ — некоторое множество операций над $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ и $\mathfrak{F}$ — множество операций над $\{B \mid B : \mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}(\mathfrak{R})\}$, сопоставленных операциям из $\mathfrak{F}'$ соотношением (1) (при $\mathfrak{U} = \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(\mathfrak{I})$ и $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F}'$). Применяя операции из $\mathfrak{F}$ к отображениям из $\mathfrak{M}^0$, можно получить, вообще говоря, более широкое семейство отображений

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0) = \{F(B_1, \ldots, B_p) \mid F \in \mathfrak{F}, \ (B_1, \ldots, B_p) \in (\mathfrak{M}^0)^p\}.$$

Множество $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ называется $\mathfrak{F}$-расширением семейства $\mathfrak{M}^0$. Заменяя семейство $\mathfrak{M}^0$ его $\mathfrak{F}$-расширением, можно получить $\mathfrak{F}$-расширение исходного семейства $\mathfrak{M}$, обозначаемое через $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$:

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0).$$

Отметим, что для выполнения включений $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{M}^0)$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$ достаточно, чтобы в $\mathfrak{F}'$ (а потому и в $\mathfrak{F}$) содержался тождественный унарный оператор.

При фиксированных множествах $\mathfrak{I}$ и $\tilde{\mathfrak{I}}$ (а потому и пространствах $\mathfrak{C}(\mathfrak{I})$ и $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})$) каждая конкретная задача классификации определяется некоторой парой матриц $(I, \tilde{I})$ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \times \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})$ и некоторой системой дополнительных ограничений. Решение задач в рамках алгебраического подхода проводится поэтапно: от формирования исходного семейства $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0$ и множества корректирующих операций $\mathfrak{F}$ до выбора конкретного допустимого отображения из $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$. Соответственно с этим используется и информация, выраженная системой ограничений I_0: от самых общих ограничений до конкретных, выделяющих данную задачу из множества «близких» к ней.

Формальным отражением такого подхода является предположение о том, что множество рассматриваемых задач Z (множество рассматриваемых систем ограничений I_0) разбито по некоторому отношению эквивалентности на классы. При этом считается, что на определенном этапе решения используется не вся информация, имеющаяся в системе I_0, а лишь ла, которая выражается включением $I_0 \in \mathfrak{I}_0$, где $\mathfrak{I}_0$ — подходящий класс эквивалентности.

Для задач классификации чаще всего рассматривается следующая эквивалентность: системы ограничений I_0 и I_0', содержащие пары матриц $(I, \tilde{I})$ и $(I', \tilde{I}')$ соответственно, эквивалентны тогда и только тогда, когда $I=I'$ и когда все дополнительные ограничения в системах I_0 и I_0' совпадают. Этой эквивалентностью определяется следующее понятие полноты задач классификации.

Определение 1. Задача классификации Z с матрицей информации I и информационной матрицей $\tilde{I}$ называется полной относительно семейства $\mathfrak{M}$ отображений, удовлетворяющих дополнительным ограничениям этой задачи, если $\mathfrak{M}(I)=\{A(I)\,|\,A\in\mathfrak{M}\}=\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})$. Задача Z называется $\mathfrak{F}$-полной относительно $\mathfrak{M}$, если она полна относительно семейства $\mathfrak{F}[\mathfrak{M}]$.

Отметим, что из полноты некоторой задачи Z относительно семейства отображений $\mathfrak{M}$ немедленно вытекает разрешимость этой задачи в рамках данного семейства отображений.

§ 2. Универсальные и локальные ограничения для задач классификации

При алгебраическом подходе корректные алгоритмы строятся в виде суперпозиций алгоритмических операторов, корректирующих операций и решающих правил. В силу этого представляется естественным рассматривать системы ограничений I_0, определяющие задачи классификации, как совокупности из двух систем — универсальных и локальных ограничений, т. е. считать, что $I_0=(I_0^u, I_0^l)$, где I_0^u — система универсальных ограничений, т. е. ограничений «общего характера», применимых ко всем рассматриваемым отображениям (алгоритмам, алгоритмическим операторам, корректирующим операциям и решающим правилам), а I_0^l — система локальных ограничений, применимых только к отображениям из $\mathfrak{C}(\mathfrak{I})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{I})$. При этом, конечно, $\mathfrak{M}(I_0)=\mathfrak{M}(I_0^u)\cap\mathfrak{M}(I_0^l)$.

Отметим, что в задачах классификации пара матриц $(I, \tilde{I})$ с требованием, чтобы допустимые отображения A удовлетворяли условию $A(I)=\tilde{I}$, является локальным ограничением. Ниже без дополнительных оговорок будет предполагаться, что все остальные (дополнительные) ограничения в рассматриваемых задачах имеют универсальный характер. Кроме того, будем считать, что исходные эвристические семейства $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{M}^0$ удовлетворяют универсальным ограничениям, т. е. считать, что выполнено условие $\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{M}^0\subseteq\mathfrak{M}(I_0^u)$.

Формализуем теперь понятие универсальных ограничений. Пусть $\mathscr{K}$ — класс, объектами которого являются пространства $(q\times l)$-матриц с элементами из произвольных множеств и все конечные декартовы степени таких пространств. Пусть также $\Psi^{q,l}$ — полная подкатегория категории множеств с классом объектов $\mathscr{K}$, т. е. пусть $\mathrm{Ob}\,\Psi^{q,l}=\mathscr{K}$, морфизмы $\Psi^{q,l}$ — отображения объектов друг в друга, суперпозиции морфизмов — суперпозиции отображений. Отметим, что все рассматриваемые отображения (алгоритмы, алгоритмические операторы и т. д.) являются морфизмами категории $\Psi^{q,l}$.

Необходимость включения в класс $\mathscr{K}$ наряду с пространствами $(q\times l)$-матриц их конечных декартовых степеней вытекает из потребности рассматривать в рамках одной схемы не только унарные отображения (алгоритмы и алгоритмические операторы), но и отображения, вообще говоря, p-арные при $p>1$ (корректирующие операции и решающие правила).

Формальным эквивалентом понятия универсальных ограничений является понятие подкатегории категории $\Psi^{q,l}$. Ниже будут рассматриваться подкатегории, имеющие тот же класс объектов $\mathcal{K}$, что и категория $\Psi^{q,l}$. Итак, если системе универсальных ограничений I_0^u отвечает подкатегория Ψ категории $\Psi^{q,l}$, то это просто означает, что $\mathfrak{M}(I_0^u) = \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\mathfrak{J}))$.

Определение 2. Подкатегория Ψ категории $\Psi^{q,l}$ называется допустимой, если для любых морфизмов u и v категории Ψ таких, что $u\times v$ — морфизм категории $\Psi^{q,l}$, $u\times v$ является и морфизмом Ψ, а также если для любого морфизма u категории Ψ диагонализация u_Δ тоже является морфизмом Ψ.

В качестве формализаций систем универсальных ограничений можно рассматривать только допустимые подкатегории категории $\Psi^{q,l}$. Это связано с тем, что алгоритмы, формируемые при алгебраическом подходе, имеют вид $A=C\circ(F_1(B_1^1,\ldots,B_{r_1}^1)\times\ldots\times F_p(B_1^p,\ldots,B_{r_p}^p))_\Delta$, где C есть p-арное решающее правило, $F_1,\ldots,F_p$ — корректирующие операции и $B_1^1,\ldots,B_{r_p}^p$ — алгоритмические операторы.

Определение 3. Пусть Ψ — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Категория Ψ называется полной, если для любых множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$, где $|\mathfrak{U}|>1$, выполнено равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty}\{u\{U^1,\ldots,U^p)\,|\,u\in\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}(\mathfrak{B})),\ (U^1,\ldots,U^p)\in\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})\}=\mathfrak{C}(\mathfrak{B}).$$

Замечание 1. Полные категории не являются, вообще говоря, полными подкатегориями категории $\Psi^{q,l}$.

Ниже вместо слов «подкатегория категории $\Psi^{q,l}$» часто будет использоваться просто термин «категория», так как никакие иные категории рассматриваться не будут.

Центральным в дальнейшем рассмотрении будет вопрос о полноте задач классификации (определение 1), а общее рассмотрение этого вопроса для не полных категорий лишено смысла, с чем и связана необходимость во введении этого понятия; Ψ ниже — полная допустимая категория.

Дадим, наконец,

Определение 4. Пусть $\mathfrak{U}$ — множество и X — подмножество пространства матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Множество X называется базой категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ или просто базой категории Ψ, если имеет место равенство

$$\bigcup_{p=0}^{\infty}\{u(U^1,\ldots,U^p)\,|\,u\in\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}(\mathfrak{U})),$$
$$(U^1,\ldots,U^p)\in X^p\}=\mathfrak{C}(\mathfrak{U}).$$

Понятие базы оказывается основным при изучении проблемы полноты задач классификации в рамках алгебраического подхода.

§ 3. Простейшие функциональные и симметрические категории

Целью настоящего параграфа является описание наиболее часто встречающихся систем универсальных ограничений, сводящееся к описанию соответствующих подкатегорий категории $\Psi^{q,l}$.

К а т е г о р и я Φ_0. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 (т. е. для произвольных объектов $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{V})$ класса $\mathscr{K}$) множество морфизмов категории Φ_0 из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{V})$ есть множество всех отображений u из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{V})$ таких, что u определяется некоторым набором функций $f^1, \ldots, f^{p_2}$ из $\mathfrak{U}^{p_1}$ в $\mathfrak{V}$ следующим образом:

$$u(U^1, \ldots, U^{p_1}) = u(\|U_{ij}{}^1\|_{q\times l}, \ldots, \|U_{ij}{}^{p_1}\|_{q\times l}) =$$
$$= (\|f^1(U_{ij}{}^1, \ldots, U_{ij}{}^{p_1})\|_{q\times l}, \ldots, \|f^{p_2}(U_{ij}{}^1, \ldots, U_{ij}{}^{p_1})\|_{q\times l})$$

для произвольного набора матриц $(U^1, \ldots, U^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$.

Морфизмам категории Φ_0 соответствуют, например, операции умножения действительных матриц на скаляр, сложения и умножения по Адамару. Так, сложению соответствует морфизм $u_+ : \mathfrak{C}^2(\mathbf{R}) \to \mathfrak{C}(\mathbf{R})$, определяемый функцией $f_+ : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ такой, что $f_+(a, b) = a+b$ для всех a и b из $\mathbf{R}$:

$$u_+(U^1, U^2) = u_+(\|U_{ij}{}^1\|_{q\times l}, \|U_{ij}{}^2\|_{q\times l}) =$$
$$= \|f_+(U_{ij}{}^1, U_{ij}{}^2)\|_{q\times l} = \|U_{ij}{}^1 + U_{ij}{}^2\|_{q\times l}.$$

Морфизмами категории Φ_0 являются алгоритмические операторы вычисления оценок, пороговые решающие правила (с константами, не зависящими от номера класса) [1], [2] и т. д.

Легко видеть, что категория Φ_0 допустима. Покажем, что она полна.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — произвольные множества, причем $|\mathfrak{U}|>1$, и $V = \|V_{ij}\|_{q\times l}$ — некоторая произвольная матрица из $\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$. В силу условия $|\mathfrak{U}|>1$, в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ можно выбрать набор матриц $(U^1, \ldots, U^k)$ (где $k \leqslant]\log_2 ql[$) такой, что при всех $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $S = \{(1, 1), \ldots, (q, l)\}$ будет выполнено условие $(U^1_{i_1j_1}, \ldots, U^k_{i_1j_1}) \neq (U^1_{i_2j_2}, \ldots, U^k_{i_2j_2})$. Определим морфизм u категории Φ_0 из $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$ функцией $f : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{V}$ такой, что при всех $(i, j) \in S$ имеет место равенство $f(U_{ij}{}^1, \ldots, U_{ij}{}^k) = V_{ij}$ (существование такой функции f вытекает из условия выбора набора матриц $(U^1, \ldots U^k)$). Тогда $u(U^1, \ldots, U^k) = V$, а так как данное построение можно провести для произвольной матрицы V из $\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$, то это и означает полноту категории Φ_0.

Итак, Φ_0 — полная допустимая категория. Опишем теперь ее базы.

Л е м м а 1. *Пусть $\mathfrak{U}$ — множество, $|\mathfrak{U}|>1$ и $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Для того чтобы множество X было базой категории Φ_0, необходимо и достаточно, чтобы для всех $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ из $S = \{(1, 1), \ldots, (q, l)\}$ в X содержалась матрица $U = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $U_{i_1j_1} \neq U_{i_2j_2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть множество $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ таково, что для некоторых $(i_1{}^0, j_1{}^0) \neq (i_2{}^0, j_2{}^0)$ из S и для всех $U = \|U_{ij}\|_{q\times l} \in X$ выполнено равенство $U_{i_1{}^0j_1{}^0} = U_{i_2{}^0j_2{}^0}$. Пусть также u — произвольный морфизм категории Φ_0 из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, определенный функцией f из $\mathfrak{U}^p$ в $\mathfrak{U}$, $(U^1, \ldots, U^p)$ — произвольный набор матриц из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ и $U = u(U^1, \ldots, U^p)$. В матрице $U = \|U_{ij}\|_{q\times l}$ элементы $U_{i_1{}^0j_1{}^0}$ и $U_{i_2{}^0j_2{}^0}$ будут равны между собой, так как $U_{i_1{}^0j_1{}^0} = f(U^1_{i_1{}^0j_1{}^0}, \ldots, U^p_{i_1{}^0j_1{}^0})$ и $U_{i_2{}^0j_2{}^0} = f(U^1_{i_2{}^0j_2{}^0}, \ldots, U^p_{i_2{}^0j_2{}^0})$, а наборы аргументов функции f в правых частях этих равенств одинаковы.

Из сказанного вытекает, что

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(U^1, \ldots, U^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_{\Phi_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{U})), (U^1, \ldots, U^p) \in X^p\} \subseteq$$
$$\subseteq \{U \mid U = \|U_{ij}\|_{q\times l} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{U}), U_{i_1{}^0j_1{}^0} = U_{i_2{}^0j_2{}^0}\} \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$

где последнее включение строгое, так как $|\mathfrak{U}|>1$. Таким образом, X в данном случае не является базой категории Φ_0.

Доказательство достаточности аналогично доказательству полноты категории Φ_0. Лемма доказана.

Категория Φ_q. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов категории Φ_q из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$ определяется как множество всех отображений u из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$ таких, что u задается некоторым набором функций $f_1^1, \ldots, f_l^1, f_1^2, \ldots, f_l^{p_2}$ из $\mathfrak{U}^{p_1 l}$ в $\mathfrak{B}$ следующим образом:

$$u(U^1, \ldots, U^{p_1}) = u(\|U_{ij}^1\|_{q\times l}, \ldots, \|U_{ij}^{p_1}\|_{q\times l}) =$$
$$= (\|f_j^1(U_{i1}^1, \ldots, U_{il}^1, U_{i1}^2, \ldots, U_{il}^{p_1})\|_{q\times l}, \ldots$$
$$\ldots, \|f_j^{p_2}(U_{i1}^1, \ldots, U_{il}^1, U_{i1}^2, \ldots, U_{il}^{p_1})\|_{q\times l})$$

для произвольного набора матриц $(U^1, \ldots, U^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$.

Морфизмами категории Φ_q являются алгоритмические операторы моделей, основанных на разделении классов некоторыми поверхностями в пространстве объектов, в которых каждому классу сопоставляется своя поверхность, решающие правила с константами, зависящими от номера класса [1], [2], и т. д.

Легко видеть, что каждый морфизм категории Φ_0 является одновременно и морфизмом категории Φ_q, т. е. что Φ_0 — подкатегория категории Φ_q. Так как категория Φ_0 полная, то это же справедливо и для Φ_q. Допустимость категории Φ_q очевидна.

Описание баз категории Φ_q дает

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{U}$ — множество, $|\mathfrak{U}|>1$ и $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Для того чтобы X было базой категории Φ_q, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i_1 \neq i_2$ из $\{1, 2, \ldots, q\}$ в X содержалась матрица U, в которой строки с номерами i_1 и i_2 различны.*

Доказательство этой леммы полностью аналогично доказательству леммы 1.

Категории Φ_0 и Φ_q принадлежат к семейству так называемых функциональных категорий [3], [4]. Рассмотрим теперь простейшие симметрические [3], [4] категории.

Пусть σ_0 — симметрическая группа подстановок, действующих на множестве $S=\{(1,1), \ldots, (ql)\}$, $\mathfrak{U}$ — множество, $(U^1, \ldots, U^p)$ — набор матриц из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ и $s \in \sigma_0$. Определим действие подстановки s на наборе $(U^1, \ldots, U^p)$ цепочкой равенств

$$s(U^1, \ldots, U^p) = (s(U^1), \ldots, s(U^p)) = (s(\|U_{ij}^1\|_{q\times l}), \ldots$$
$$\ldots, s(\|U_{ij}^p\|_{q\times l})) = (\|U^1_{s(i,j)}\|_{q\times l}, \ldots, \|U^p_{s(i,j)}\|_{q\times l}).$$

Пусть $u : \mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U}) \to \mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$ — произвольный морфизм категории $\Psi^{l,l}$ и $s \in \sigma_0$. Будем говорить, что u коммутирует с s, если для любого набора $(U^1, \ldots, U^{p_1})$ из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ имеет место равенство $u(s(U^1, \ldots, U^{p_1})) = s(u(U^1, \ldots, U^{p_1}))$.

Категория Σ_0. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов категории Σ_0 из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$ определяется как множество всех отображений u из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{B})$, коммутирующих со всеми подстановками s из группы σ_0.

Легко видеть, что Σ_0 является допустимой категорией, а так как Φ_0 является подкатегорией категории Σ_0 — то и полной.

Морфизмами категории Σ_0 (не являющимися морфизмами категории Φ_0) оказываются, например, операторы выделения наибольших или наименьших элементов действительных матриц [2] и т. п.

На вопрос о базах категории Σ_0 отвечает

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *множество,* $|\mathfrak{U}|>1$ *и* $X\subseteq\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. *Для того чтобы множество* X *было базой категории* Σ_0, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $(i_1, j_1)\neq(i_2, j_2)$ *из* S *в* X *содержалась матрица* $U=\|U_{ij}\|_{q\times l}$ *с* $U_{i_1j_1}\neq U_{i_2j_2}$.

Замечание 2. Из лемм 1 и 3 вытекает, что базы категорий Σ_0 и Φ_0 в любом пространстве матриц одинаковы

Доказательство. Необходимость. Пусть $X\subseteq\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ таково, что для некоторых $(i_1^0, j_1^0)\neq(i_2^0, j_2^0)$ из S и для всех $U=\|U_{ij}\|_{q\times l}$ из X выполнено равенство $U_{i_1^0j_1^0}=U_{i_2^0j_2^0}$. Пусть также u — произвольный морфизм категории Σ_0 из $\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$, $(U^1,\ldots,U^p)$ — произвольный набор матриц из X^p и $U=u(U^1,\ldots,U^p)$. В матрице $U=\|U_{ij}\|_{q\times l}$ элементы $U_{i_1^0j_1^0}$ и $U_{i_2^0j_2^0}$ будут равны между собой. Действительно, рассмотрим подстановку s_0 множества S, определенную следующим образом: $s_0(i_1^0, j_1^0)=(i_2^0, j_2^0)$, $s_0(i_2^0, j_2^0)=(i_1^0, j_1^0)$ и $s(i, j)=(i, j)$ для $(i, j)\in S\setminus\{(i_1^0, j_1^0), (i_2^0, j_2^0)\}$. Для всех матриц U' из X выполнено соотношение $s_0(U')=U'$, а так как u, по предположению,— морфизм категории Σ_0 и потому коммутирует с s_0, то

$$s_0(U)=s_0(u(U^1,\ldots,U^p))=u(s_0(U^1,\ldots,U^p))=u(U^1,\ldots,U^p)=U.$$

Это равенство в силу определения s_0 означает, что $U_{i_1^0j_1^0}=U_{i_2^0j_2^0}$.

Далее, как и в доказательстве леммы 1, имеем

$$\bigcup_{p=0}^{\infty}\{u(U^1,\ldots,U^p)\,|\,u\in\mathrm{Hom}_{\Sigma_0}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}),\mathfrak{C}(\mathfrak{U})),\ (U^1,\ldots,U^p)\in X^p\}\subseteq$$
$$\subseteq\{U\,|\,U=\|U_{ij}\|_{q\times l}\in\mathfrak{C}(\mathfrak{U}),\ U_{i_1^0j_1^0}=U_{i_2^0j_2^0}\}\subset\mathfrak{C}(\mathfrak{U}),$$

где последнее включение строгое, так как $|\mathfrak{U}|>1$. Таким образом, X в данном случае не является базой категории Σ_0.

Достаточность вытекает из того, что категория Φ_0 является подкатегорией категории Σ_0. Лемма доказана.

Категория Σ_q. Пусть $M_{q,l}$ — матрица $(M_{q,l}=\|M_{ij}\|_{q\times l})$, в которой $M_{ij}=(i, j)$ при $(i, j)\in S$. Определим подгруппу σ_q группы σ_0 как группу, соответствующую группе подстановок строк матрицы $M_{q,l}$. Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ и натуральных чисел p_1 и p_2 множество морфизмов категории Σ_q из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{V})$ определяется как множество всех отображений u из $\mathfrak{C}^{p_1}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}^{p_2}(\mathfrak{V})$, коммутирующих со всеми подстановками s из группы σ_q.

Допустимость категории Σ_q очевидна, полнота вытекает из того, что все рассмотренные выше категории являются подкатегориями категории Σ_q.

Приведем без доказательства описание баз категории Σ_q.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *множество,* $|\mathfrak{U}|>1$ *и* $X\subseteq\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. *Для того чтобы* X *было базой категории* Σ_q, *необходимо и достаточно, чтобы для любых* $i_1\neq i_2$ *из* $\{1, 2,\ldots, q\}$ *в* X *содержалась матрица* U, *в которой строки с номерами* i_1 *и* i_2 *различны.*

Замечание 3. Из лемм 2 и 4 вытекает, что базы категорий Σ_q и Φ_q в любом пространстве матриц одинаковы.

Рассмотрим, наконец, вопрос о причинах возникновения универсальных ограничений, формализуемых описанными выше категориями, в прикладных задачах.

Симметрические универсальные ограничения (категории Σ_0 и Σ_q) возникают в конкретных задачах как выражения априорной информации об однородности рассматриваемых объектов (которым соответствуют строки рассматриваемых матриц) и классов (которым соответствуют столбцы). Так, информация об однородности всех объектов естественным образом выражается требованием, чтобы при произвольной перестановке строк в матрице информации соответственно переставлялись бы и строки в информационной матрице, порожденной корректным алгоритмом, т. е. чтобы корректный алгоритм был морфизмом категории Σ_q. Информация же об однородности всех объектов и классов формализуется требованием решать задачу в рамках категории Σ_0.

Помимо информации об однородности различных объектов и классов в задачах часто имеется некоторая информация о независимости, сформулированная, например, таким образом: факт принадлежности i-го объекта j-му классу не зависит от того, имеют ли место факты принадлежности *i_1-го объекта j_1-му классу, ..., i_k-го объекта j_k-му классу.*

Считая, что вся исходная информация, относящаяся «локально» к i-му объекту и j-му классу, представлена элементом I_{ij} матрицы информации $I=\|I_{ij}\|_{q\times l}$, получаем, что формальным выражением информации о независимости является требование, состоящее в том, чтобы корректный алгоритм мог быть задан функциями с соответствующими информации о независимости наборами аргументов.

Пусть известно, что объекты в рассматриваемой выборке независимы между собой. В этом случае корректный алгоритм должен определяться функциями, наборами аргументов которых являются строки матрицы информации.

Наконец, часто встречается ситуация, когда имеется информация об одновременной однородности и независимости. Допустим, что все объекты и классы в некоторой задаче взаимно попарно независимы и однородны. Из предположения о независимости вытекает, что корректный алгоритм должен определяться набором функций $f_{11}, \ldots, f_{ql}$, где $f_{ij}: \mathfrak{I} \to \mathfrak{I}$, следующим образом: $A(\|I_{ij}\|_{q\times l}) = \|f_{ij}(I_{ij})\|_{q\times l}$. Из предположения же об однородности следует, что $f_{11}=f_{12}=\ldots=f_{ql}$, т. е. что на самом деле алгоритм должен задаваться единственной функцией f из $\mathfrak{I}$ в $\mathfrak{I}$, иначе говоря, должен быть морфизмом категории Φ_0. Если же независимы и однородны только рассматриваемые объекты (например, если рассматривается задача с непересекающимися классами), то это универсальное ограничение формализуется категорией Φ_a.

§ 4. Регулярные задачи классификации

Обозначения. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные множества, Ψ — подкатегория категории $\Psi^{q,l}$. Множество $\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B}))$ будем обозначать через $H(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$, множество

$$\bigcup^{\infty} \mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{B}))$$

через $\mathscr{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$. Для любого $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ положим

$$H(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(X) = \{u(U) \mid u \in H(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}),\ U \in X\},$$

$$\mathscr{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \{u(U^1, \ldots, U^p) \mid u \in \mathrm{Hom}_{\Psi}(\mathfrak{C}^p(\mathfrak{U}), \mathfrak{C}(\mathfrak{V})),$$
$$(U^1, \ldots, U^p) \in X^p\}.$$

В конце § 3 говорилось о том, что понятие базы является основным при изучении полноты задач классификации. Однако свойство «быть базой категории Ψ» было определено (определение 4) для подмножеств X пространств матриц $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ только с использованием морфизмов категории Ψ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Изучение же полноты задач классификации (определение 1) требует рассмотрения отображений вида $A: \mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \to \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}})$, т. е. отображений одного пространства матриц в другое, что приводит к необходимости введения еще одного понятия.

Определение 5. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — некоторые произвольные множества, $|\mathfrak{U}| > 1$ и $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$. Множество X называется базой категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$, если имеет место равенство $\mathscr{H}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{V})$.

Для полных допустимых категорий понятия баз из определений 4 и 5 совпадают.

Лемма 5. *Для произвольных множеств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ ($|\mathfrak{U}| > 1$ и $|\mathfrak{V}| > 1$) и любого подмножества X пространства $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ высказывания «X — база категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$» и «$X$ — база категории Ψ в $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ для $\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$» при полной допустимой категории Ψ эквивалентны.*

Доказательство этой леммы, как и остальных лемм данного параграфа, можно найти в [3].

При рассматриваемом подходе к решению задач классификации основной схемой перехода от одного пространства матриц к другому является схема

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(\mathfrak{I}) \arrow[r, "\mathfrak{M}"] \arrow[d, "\mathfrak{M}^0"'] & \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{I}}) \\ \mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \arrow[r, "\mathfrak{F}"] & \mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \arrow[u, "\mathfrak{M}^1"'] \end{tikzcd}$$

где семейства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^0$ состоят из унарных отображений, а семейства $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^1$ — из отображений произвольных арностей. Чтобы получить общие результаты, непосредственно приложимые к этой ситуации, рассмотрим схему

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C}(\mathfrak{U}) \arrow[r, "H(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})"] \arrow[d, "H(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})"'] & \mathfrak{C}(\mathfrak{V}) \\ \mathfrak{C}(\mathfrak{W}) \arrow[r, "\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})"] & \mathfrak{C}(\mathfrak{W}) \arrow[u, "\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})"'] \end{tikzcd}$$

где Ψ — полная допустимая категория, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — произвольные множества.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ — некоторые произвольные множества мощности, большей 1, $X \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ и $Y \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{W})$. Для того чтобы было выполнено любое из равенств:*

(2) $\qquad H(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(X) = \mathfrak{C}(\mathfrak{V})$

или

(3) $\qquad \mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})(\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(H(\mathfrak{U}, \mathfrak{W})(X))) = \mathfrak{C}(\mathfrak{V})$,

необходимо, чтобы множество X было базой категории Ψ, *Для того чтобы было выполнено любое из равенств:*

$$\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})(Y)=\mathfrak{C}(\mathfrak{V})$$

или

$$\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})(\mathscr{H}(\mathfrak{W}, \mathfrak{W})(Y)=\mathfrak{C}(\mathfrak{V}),$$

необходимо и достаточно, чтобы Y было базой категории Ψ.

Из данной леммы вытекает, что при решении задач классификации для достижения полноты необходимо, чтобы все возникающие в процессе решения множества матриц были базами категории, выражающей универсальные ограничения.

Утверждение леммы 6 для множества X не может быть усилено, т. е. неверно, что для выполнения равенств (2) или (3) достаточно, чтобы X было базой категории Ψ. Однако усиление леммы 6, неверное для произвольных баз, оказывается справедливым для баз одноэлементных, а это именно то, что требуется для задач классификации, так как в них исходное множество $\{I\}$ одноэлементное.

Л е м м а 7. *Пусть* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ *и* $\mathfrak{W}$ — *некоторые произвольные множества мощности, большей* 1, $X\subseteq\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ *и* $|X|=1$. *Для того чтобы было выполнено любое из равенств,* (2) *или* (3), *необходимо и достаточно, чтобы X было базой категории* Ψ.

Ниже будут рассматриваться классы $\mathfrak{Z}$ задач классификации, т. е. множества задач, возникающие при фиксации q, l, $\mathfrak{J}$ и $\widetilde{\mathfrak{J}}$ (каждая задача Z выделяется из $\mathfrak{Z}$ заданием категории Ψ и пары матриц $(I, \widetilde{I})$).

Пусть зафиксированы некоторый класс задач $\mathfrak{Z}$ и полная допустимая категория Ψ. Тем самым определен подкласс $\mathfrak{Z}[\Psi]$ задач, различающихся только парами матриц $(I, \widetilde{I})$.

О п р е д е л е н и е 6. Задача Z из подкласса $\mathfrak{Z}[\Psi]$ называется регулярной, если в рамках категории Ψ (т. е. среди подмножеств множества морфизмов Ψ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{J}})$) существует такое множество отображений $\mathfrak{M}$, что Z полна относительно $\mathfrak{M}$.

Легко видеть, что свойство полноты является монотонным относительно семейств отображений в следующем смысле: если некоторая задача Z полна относительно семейства отображений $\mathfrak{M}_1$ и если $\mathfrak{M}_2$ — такое семейство, что $\mathfrak{M}_1\subseteq\mathfrak{M}_2\subseteq\mathrm{Hom}_\Psi(\mathfrak{C}(\mathfrak{J}), \mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{J}}))$, то Z полна и относительно $\mathfrak{M}_2$. Следовательно, задача Z регулярна тогда и только тогда, когда она полна относительно семейства всех морфизмов категории Ψ из $\mathfrak{C}(\mathfrak{J})$ в $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{J}})$, т. е. когда имеет место равенство

$$H(\mathfrak{J}, \widetilde{\mathfrak{J}})(\{I\})=\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{J}}), \tag{4}$$

где I — матрица информации задачи Z.

Т е о р е м а. *Задача Z с матрицей информации I, принадлежащая множеству $\mathfrak{Z}[\Psi]$, регулярна тогда и только тогда, когда одноэлементное множество $\{I\}$ является базой категории Ψ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы сводится к использованию (4) и леммы 7.

Из данной теоремы и лемм 1—4 для категорий Φ_0, Φ_q, Σ_0 и Σ_q получаем

С л е д с т в и е 1. Задача Z с матрицей информации I, принадлежащая множеству $\mathfrak{Z}[\Phi_0]$ или $\mathfrak{Z}[\Sigma_0]$, регулярна тогда и только тогда, когда элементы матрицы I попарно различны.

С л е д с т в и е 2. Задача Z с матрицей информации I, принадлежащая множеству $\mathfrak{Z}[\Phi_q]$ или $\mathfrak{Z}[\Sigma_q]$, регулярна тогда и только тогда, когда строки матрицы I попарно различны.

Литература

1. *Журавлев Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I.— Кибернетика, 1977, № 4, с. 5—17; II.— № 6, с. 21—27.
2. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации.— Пробл. кибернетики, 1978, вып. 33, с. 5—68.
3. *Рудаков К. В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты). М.: ВЦ АН СССР, 1980.
4. *Рудаков К. В.* О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели). М.: ВЦ АН СССР, 1981.

Поступила в редакцию 12.IV.1985