АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1984

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 24, 1984 № 12

УДК 519.7

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЦЕНОК ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ С КОНТИНУАЛЬНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

АШУРОВ А. Р., РУДАКОВ К. В.

(Москва)

Рассмотрено обобщение известного семейства алгоритмов вычисления оценок на случай, когда обучающая информация в задачах распознавания представляет собой не перечень допустимых объектов с известной классификацией, но набор измеримых множеств таких объектов. Для ряда частных случаев получены эффективные формулы вычисления соответствующих оценок.

§ 1. Постановка задачи

При описании класса задач распознавания прежде всего должно быть определено пространство допустимых объектов. В качестве таких пространств в классе задач, для которого предложены алгоритмы вычисления оценок, обычно рассматривалось декартово произведение $M_1\times\ldots\times M_n$, где M_i — пространства с полуметриками, $i=1, 2,\ldots, n$ (см. [1]–[3]). В настоящей работе (без существенного снижения общности проводимых ниже построений) будет считаться, что пространство допустимых объектов $\{S\}$ есть n-мерное евклидово пространство R^n.

Будем предполагать, что в $\{S\}$ имеется конечный набор $K_1,\ldots,K_l$ подмножеств-классов, причем, вообще говоря,

$$K_{j_1}\cap K_{j_2}\neq\varnothing,\quad j_1\neq j_2.$$

Кроме того, будем предполагать, что задана некоторая начальная информация

$$I_0=\{Q_1,\ldots,Q_l\,|\,Q_j=\bigcup_{j'=1}^{l} Q_{j'}\cap K_j, j=1,2,\ldots,l\},$$

т. е. задана непустая область $Q=\bigcup_{j=1}^{l} Q_j$ с известным разбиением на классы. Элементы множества Q будем называть обучающими и обозначать $S=(x_1,\ldots, x_n)$. Предполагаем, что множества Q_j, $j=1, 2,\ldots, l$, измеримы.

Задача распознавания Z заключается в следующем: требуется, используя информацию I_0, для произвольного объекта $S^0\in\{S\}$, $S^0=(x_1^0,\ldots, x_n^0)$, установить, к каким классам из набора $K_1,\ldots, K_l$ принадлежит данный объект S^0.

Этап I задания алгоритмов вычисления оценок — это указание системы $\{\Omega\}$ подмножеств множества $\{1, 2,\ldots, n\}$, элементы которой называются опорными множествами. Каждому подмножеству $\Omega=\{i_1,\ldots, i_k\}$ сопоставим характеристический булев вектор $\tilde\omega=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_{i_1}=\ldots=\alpha_{i_k}=1$ и остальные координаты равны нулю.

Этап II — определение функции близости $B(\Omega, S, S^0)$, где $S=(x_1,\ldots$

$\ldots, x_n)$ и $S^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — произвольные объекты из $\{S\}$ и $\Omega\in\{\Omega\}$. Ниже будут рассматриваться так называемые пороговые функции близости, задаваемые дополнительно набором n неотрицательных действительных чисел $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ следующим образом: $B(\Omega, S, S^0)=1$, если $|x_i-x_i^0|\leqslant\varepsilon_i$ для всех $i\in\Omega$, и $B(\Omega, S, S^0)=0$ в противном случае. Вместе с функцией $B(\Omega, S, S^0)$ рассматривается ее отрицание $\bar{B}(\Omega, S, S^0)$. Для удобства в дальнейшем функции B, $\bar{B}$ обозначаются через B^α, где $\alpha\in\{0, 1\}$, $B=B^1$, $\bar{B}=B^0$.

Этап III — определение «весов» опорных множеств. Ниже будет рассматриваться случай, когда веса опорных множеств $\Omega(\Omega\in\{\Omega\})$ определяются формулой

$$p(\Omega)=\sum_{i\in\Omega} p_i,$$

где неотрицательные действительные числа $p_1, \ldots, p_n$ — веса отдельных признаков.

Этап IV — определение «весов» обучающих объектов. В классическом случае конечного числа обучающих объектов этот этап сводился к определению соответствующего набора действительных неотрицательных чисел. Здесь же будет предполагаться, что определена положительная измеримая функция $\gamma(S)$, $S\in Q$, значения которой характеризуют «плотность важности информации» в точке S.

После выполнения всех этапов оценка произвольного объекта $S^0\in\{S\}$ за класс K_j определяется следующим образом:

$$\Gamma_j(S^0)=x_1\int_{Q_j}\sum_{\{\Omega\}}\gamma(S)p(\Omega)B(\Omega,S,S^0)\,dS+ \\ +x_0\int_{CQ_j}\sum_{\{\Omega\}}\gamma(S)p(\Omega)\bar{B}(\Omega,S,S^0)\,dS, \tag{1.1}$$

где $CQ_j=Q\setminus Q_j$.

Здесь x_1, x_0 — параметры, принимающие значения 0 и 1, учитывающие разный смысл оценок, полученных по множествам Ω в ситуациях: «близок к элементу из класса K_j», «далек от элемента, не принадлежащего K_j».

Отметим, что если в качестве «плотностей важности информации» $\gamma(S)$ использовать конечные суммы δ-функций с положительными весами, т. е. полагать

$$\gamma(S)=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\delta(S,S_i),$$

то (1.1) сведется к известной формуле для вычисления оценок $\Gamma_j(S^0)$ в случае дискретной обучающей информации (см. [3], [4]).

§ 2. Общие формулы для вычисления оценок в случае континуальной начальной информации

В [3] построены два прямых метода свертывания формул типа (1.1). Первый из них основан на пороговой зависимости функции близости от параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Этот метод будем обобщать на случай континуальных множеств объектов обучения.

Формулу (1.1) записываем в виде

$$\Gamma_j(S^0)=x_1\int_{Q_j}\Gamma^1(S,S^0)\,dS+x_0\int_{CQ_j}\Gamma^0(S,S^0)\,dS, \tag{2.1}$$

где

$$(2.2)\qquad \Gamma^{\alpha}(S,S^0)=\sum_{\{\Omega\}}\gamma(S)p(\Omega)B^{\alpha}(\Omega,S,S^0),\qquad \alpha\in\{0,1\}.$$

Сопоставим паре $(S=(x_1,\ldots,x_n),\ S^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0))$ допустимых объектов характеристический вектор $\tilde\delta(S,S^0)=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$:

$$\delta_i=\begin{cases}1, & \text{если}\quad |x_i-x_i^0|\leqslant\varepsilon_i,\\ 0, & \text{если}\quad |x_i-x_i^0|>\varepsilon_i,\quad i=1,2,\ldots,n.\end{cases}$$

Зафиксируем признак t, $t\in\{1,2,\ldots,n\}$. Обозначим через $F^t_{\{\Omega\},\tilde\varepsilon}(S,S^0)$, где $\tilde\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, число подмножеств Ω из $\{\Omega\}$, содержащих признак t и таких, что $B(\Omega,S,S^0)=1$.

Тогда формулу (2.2) при $\alpha=1$ запишем в виде

$$(2.3)\qquad \Gamma^1(S,S^0)=\sum_{\{\Omega\}}\gamma(S)p(\Omega)B(\Omega,S,S^0)=$$
$$=\gamma(S)\sum_{\{\Omega\}}B(\Omega,S,S^0)\sum_{t\in\Omega}p_t=\gamma(S)\sum_{\Omega:B(\Omega,S,S^0)=1}\ \sum_{t\in\Omega}p_t=$$
$$=\gamma(S)\sum_{t=1}^{n}p_tF^t_{\{\Omega\},\tilde\varepsilon}(S,S^0).$$

Обозначим через $\|\tilde\delta(S,S^0)\|$ число единиц в $\tilde\delta(S,S^0)$. Так как рассматривается функция $B(\Omega,S,S^0)$, которая равна 1 в том и только том случае, когда единичные координаты $\tilde\omega\leftrightarrow\Omega\in\{\Omega\}$ содержатся среди единичных координат $\tilde\delta(S,S^0)$, то для конкретных систем опорных множеств получаем следующие результаты.

1. Пусть система опорных множеств состоит из всех k-элементных подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$, тогда

$$(2.4)\qquad F^t_{\{\Omega\},\tilde\varepsilon}(S,S^0)=C^{k-1}_{\|\tilde\delta(S,S^0)\|-1}.$$

Действительно, так как t – признак, которому соответствуют единичные координаты векторов $\tilde\omega$ и $\tilde\delta(S,S^0)$, то выбор оставшихся $k-1$ единичных координат вектора $\tilde\omega$ производится из $\|\tilde\delta(S,S^0)\|-1$ единичных координат вектора $\tilde\delta(S,S^0)$. Число возможностей выбора $C^{k-1}_{\|\tilde\delta(S,S^0)\|-1}$.

Таким образом, формула (2.3) приобретает вид

$$(2.5)\qquad \Gamma^1(S,S^0)=\gamma(S)(\tilde\delta(S,S^0)\cdot\mathbf{p})\,C^{k-1}_{\|\tilde\delta(S,S^0)\|-1},$$

где $(\tilde\delta(S,S^0)\cdot\mathbf{p})$ – скалярное произведение векторов $\tilde\delta(S,S^0)$ и $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)$ (где вектор $\tilde\delta(S,S^0)$ рассматривается как вектор над полем действительных чисел).

Рассмотрим формулу (2.2) при $\alpha=0$:

$$\Gamma^0(S,S^0)=\gamma(S)\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)\bar B(\Omega,S,S^0).$$

Используя очевидное свойство функции близости $B+\bar B=1$ и формулу (2.5), имеем

$$\Gamma^0(S,S^0)=\gamma(S)\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)[1-B(\Omega,S,S^0)]=$$

$$= \gamma(S)\left[\sum_{\{\Omega\}} p(\Omega) - \sum_{\{\Omega\}} p(\Omega) B(\Omega, S, S^0)\right] =$$

$$= \gamma(S)\left[\left(\sum_{t=1}^{n} p_t\right) C_{n-1}^{k-1} - (\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, C_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}^{k-1}\right].$$

В результате формула (2.1) сводится к следующей:

$$\Gamma_j(S^0) = x_1 \int_{Q_j} \gamma(S)\,(\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, C_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}^{k-1}\, dS + \tag{2.6}$$

$$+ x_0 \int_{CQ_j} \gamma(S)\left[\sum_{t=1}^{n} p_t C_{n-1}^{k-1} - (\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, C_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}^{k-1}\right] dS.$$

2. Пусть система опорных подмножеств состоит из всех непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через Ω^k систему всех подмножеств мощности k данного множества.

Обозначим

$$\Omega' = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega^k.$$

Тогда (2.2) при $\alpha=1$ записываем в виде

$$\Gamma^1(S, S^0) = \sum_{\Omega\in\Omega'} \gamma(S)\, p(\Omega)\, B(\Omega, S, S^0) =$$

$$= \gamma(S) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\Omega\in\Omega^k} B(\Omega, S, S^0) \sum_{t\in\Omega} p_t =$$

$$= \gamma(S) \sum_{k=1}^{n} \sum_{\Omega\in\Omega^k :\, B(\Omega, S, S^0)=1} \sum_{t\in\Omega} p_t = \gamma(S) \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} p_t F^t_{\{\Omega\},\, \tilde{\varepsilon}}(S, S^0).$$

Используя (2.4) и свойства коэффициентов бинома Ньютона, получаем

$$\Gamma^1(S, S^0) = \gamma(S) \sum_{k=1}^{n} (\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, C_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}^{k-1} =$$

$$= \gamma(S)\,(\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p}) \sum_{k=1}^{n} C_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}^{k-1} = \gamma(S)\,(\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p}) \times$$

$$\times\, [C^0_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1} + \cdots + C^n_{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}] = \gamma(S)\,(\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, 2^{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}.$$

Таким образом, имеем

$$\Gamma^1(S, S^0) = \gamma(S)\,(\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\cdot 2^{\|\tilde{\delta}(S, S^0)\|-1}. \tag{2.7}$$

Положим $\bar{\tilde{\delta}}(S, S^0) = (1, \ldots, 1) - \tilde{\delta}(S, S^0)$. Тогда

$$\sum_{t=1}^{n} p_t - (\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p}) = (\bar{\tilde{\delta}}(S, S^0)\cdot \mathbf{p}). \tag{2.8}$$

При $\alpha=0$ для формулы (2.2), используя $\bar{B}=1-B$ и (2.7), (2.8), получаем

$$\Gamma^0(S, S^0) = \gamma(S)\left[\left(\sum_{t=1}^{n} p_t\right) - (\tilde{\delta}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\right] 2^{\|\bar{\tilde{\delta}}(S, S^0)\|-1} = \tag{2.9}$$

$$= \gamma(S)\,(\bar{\tilde{\delta}}(S, S^0)\cdot \mathbf{p})\, 2^{\|\bar{\tilde{\delta}}(S, S^0)\|-1}.$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.1), имеем

$$(2.10)\qquad \Gamma_j(S^0)=x_1\int\limits_{Q_j}\gamma(S)(\tilde{\delta}(S,S^0)\cdot\mathbf{p})\,2^{\|\tilde{\delta}(S,S^0)\|-1}\,dS+$$
$$+x_0\int\limits_{CQ_j}\gamma(S)(\bar{\tilde{\delta}}(S,S^0)\cdot\mathbf{p})\,2^{\|\tilde{\delta}(S,S^0)\|-1}\,dS.$$

Из формул (2.6) и (2.10) следует, что при вычислении $\Gamma_j(S^0)$ необходимо приближенно вычислить n-кратный интеграл по областям Q_j, CQ_j, что при больших n представляет собой сложную задачу. Нашей дальнейшей целью будет получение соотношений, позволяющих существенно упростить вычислительный процесс.

§ 3. Вычисление оценочных интегралов по произвольным параллелепипедам

Пусть в пространстве объектов заданы параллелепипеды Π^ν, $\nu=1,2,\ldots$ $\ldots,m$, в виде

$$\Pi^\nu=(a_1^\nu,\ b_1^\nu;\ldots;\ a_n^\nu,\ b_n^\nu),\ \text{т. е.}\ \Pi^\nu=[a_1^\nu,\ b_1^\nu]\times\ldots\times[a_n^\nu,\ b_n^\nu].$$

Сопоставим им характеристические функции $\chi_{\Pi^\nu}:R^n\to\{0,1\}$:

$$\chi_{\Pi^\nu}(S)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad S\in\Pi^\nu,\\ 0 & \text{при}\quad S\overline{\in}\Pi^\nu\end{cases}\qquad \forall S\in\{S\}.$$

Будет изучаться случай, когда функция $\gamma(S)$ («плотность важности информации» обучающих объектов) является суммой кусочно-постоянных на параллелепипедах Π^ν, $\nu=1,2,\ldots,m$, в пространстве допустимых объектов функций. Итак, будем предполагать, что

$$\gamma(S)=\sum_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu\chi_{\Pi^\nu}(S),$$

где γ_ν — положительные действительные числа, $\chi_{\Pi^\nu}(S)$ — характеристические функции параллелепипедов Π^ν.

Кроме того, предполагаем, что для любых $j\in\{1,2,\ldots,l\}$ и $\nu\in\{1,2,\ldots$ $\ldots,m\}$ выполнено одно из соотношений: $Q_j\cap\Pi^\nu=\Pi^\nu$ либо $Q_j\cap\Pi^\nu=\varnothing$.

Положим $\varkappa_j=\{\nu|\nu\in\{1,2,\ldots,m,\ Q_j\cap\Pi^\nu=\Pi^\nu\}$. Обозначим

$$(3.1)\qquad \Gamma_\nu^\alpha(S^0)=\int\limits_{\Pi^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)B^\alpha(\Omega,S,S^0)\,dS,\ \text{где}\ \alpha\in\{0,1\}.$$

Тогда (1.1) приобретает вид

$$\Gamma_j(S^0)=x_1\sum_{\nu\in\varkappa_j}\gamma_\nu\Gamma_\nu^1(S^0)+x_0\sum_{\nu\overline{\in}\varkappa_j}\gamma_\nu\Gamma_\nu^0(S^0).$$

Таким образом, задача сводится к вычислению функций Γ_ν^α при $\alpha\in$ $\in\{0,1\}$ и $\nu\in\{1,2,\ldots,m\}$.

При $\alpha=1$ формула (3.1) имеет вид

$$(3.2)\qquad \Gamma_\nu^1(S^0)=\int\limits_{\Pi^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)B(\Omega,S,S^0)\,dS,$$

$$(3.3)\qquad \Gamma_\nu^1(S^0)=\int\limits_{a_1^\nu}^{b_1^\nu}\ldots\int\limits_{a_n^\nu}^{b_n^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)B(\Omega,S,S^0)\,dS.$$

Определим при данном $S^0=(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ множества M_t^0 и M_t^1 при $t\in \in\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$M_t^0=[a_t^\nu, b_t^\nu]\setminus[x_t^0-\varepsilon_t, x_t^0+\varepsilon_t],$$

$$M_t^1=[a_t^\nu, b_t^\nu]\cap[x_t^0-\varepsilon_t, x_t^0+\varepsilon_t],$$

и определим их меру: $\mu_t^0=\mu(M_t^0)$, $\mu_t^1=\mu(M_t^1)$.

Рассмотрим совокупность булевых векторов $\{\bar\omega_0\}=E_2^n$. Каждому набору $\bar\omega_0=(\omega_0^1 \ldots \omega_0^n)\in\{\bar\omega_0\}$ поставим в соответствие множество $M^{\bar\omega_0}$ в R^n: $: M^{\bar\omega_0}=M_1^{\omega_0^1}\times\ldots\times M_n^{\omega_0^n}$.

В результате для параллелепипеда Π^ν получаем представление

$$\Pi^\nu=\bigcup_{\{\bar\omega_0\}} M_1^{\omega_0^1}\times\ldots\times M_n^{\omega_0^n},$$

где при $\bar\omega_0'\neq\bar\omega_0''$ имеет место $M^{\bar\omega_0'}\cap M^{\bar\omega_0''}=\varnothing$.

Легко видеть, что значения функции близости $B(\Omega, S, S^0)$ постоянны на множествах $M^{\bar\omega_0}$ при всех $\bar\omega_0\in E_2^n$ и равны 1 на тех и только тех из этих множеств, для которых выполнено равенство $\tilde\omega\cdot\bar\omega_0=\tilde\omega$, где под умножением векторов $\tilde\omega\cdot\bar\omega_0$ понимается операция их покоординатного умножения ($\tilde\omega$ — характеристический вектор, соответствующий опорному множеству Ω).

Учитывая сказанное и используя очевидное равенство

$$\int\limits_{M_1^{\omega_0^1}}\cdots\int\limits_{M_n^{\omega_0^n}} dS=\prod_{i=1}^n \mu_i^{\omega_0^i},$$

приводим формулу (3.3) к виду

$$\Gamma_\nu^1(S^0)=\sum_{\{\bar\omega_0\}}\int\limits_{M_1^{\omega_0^1}}\cdots\int\limits_{M_n^{\omega_0^n}}\sum_{\{\Omega\}} p(\Omega)B(\Omega, S, S^0)\,dS= \tag{3.4}$$

$$=\sum_{\{\bar\omega_0\}}\sum_{\{\Omega\}} p(\Omega)\int\limits_{M_1^{\omega_0^1}}\cdots\int\limits_{M_n^{\omega_0^n}} B(\Omega, S, S^0)\,dS=\sum_{\{\bar\omega_0\}}\mu^{\bar\omega_0}\Big[\sum_{\{\tilde\omega\}_{\bar\omega_0}} p(\Omega)\Big],$$

где

$$\mu^{\bar\omega_0}=\prod_{i=1}^n \mu_i^{\omega_0^i},\qquad \{\tilde\omega\}_{\bar\omega_0}=\{\tilde\omega\,|\,\tilde\omega\in\{\tilde\omega\},\ \tilde\omega\cdot\bar\omega_0=\tilde\omega\}.$$

Очевидно, формулу (3.4) в общем случае больше нельзя упростить. Далее будут рассмотрены конкретные системы опорных множеств.

§ 4. Вычисление оценочных интегралов для конкретных систем опорных множеств

Случай 1. Система опорных множеств $\{\Omega\}$ состоит из всех подмножеств мощности k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем $k\neq 1, n$.

В этом случае формулу (3.4) записываем в виде

$$\Gamma_\nu^1(S^0)=\sum_{i=1}^n p_i\sum_{\{\bar\omega_0\,|\,\omega_0^i=1\}}\mu^{\bar\omega_0}C_{\|\bar\omega_0\|-1}^{k-1}, \tag{4.1}$$

Вынесем общий множитель μ_i^1 и введем следующие обозначения: $\mu_{(i)}^{\bar\omega_0}=\mu_1^{\omega_0^1}\times\ldots\times\mu_{i-1}^{\omega_0^{i-1}}\times\mu_{i+1}^{\omega_0^{i+1}}\times\ldots\times\mu_n^{\omega_0^n}$; $\{\bar\omega_0\}_{(i)}$ — множество векторов, получающихся из векторов системы $\{\overline{\omega}_0\}$ вычеркиванием i-х координат; тогда $\{\overline{\omega}_0 | \omega_0^i=1\}_{(i)} | l = \{\overline{\omega}_0\}_{(i)} | l$, где символ за вертикальной чертой указывает, что суммирование проводится лишь по тем $\overline{\omega}_0 \in \{\overline{\omega}\}$, у которых $\|\overline{\omega}_0\| = l$, и поэтому

$$\Gamma_\nu^1(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \sum_{\{\overline{\omega}_0 | \omega_0^i=1\}} \mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0} C_{\|\overline{\omega}_0\|-1}^{k-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \sum_{l=k-1}^{n-1} C_l^{k-1} \sum_{\{\overline{\omega}_0\}_{(i)} | l} \mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0}.$$

Обозначим

$$\Psi^{n-1,\, l}(\overline{\mu}_i) = \sum_{\{\overline{\omega}_0\}_{(i)} | l} \mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0}, \tag{4.2}$$

где $\overline{\mu} = (\mu_1^0, \mu_1^1, \dots, \mu_n^0, \mu_n^1)$, при этом $\overline{\mu}'_{\nu_1,\dots,\nu_k}$ означает, что у вектора $(\mu_1^0, \mu_1^1, \dots, \mu_n^0, \mu_n^1)$ отсутствуют компоненты μ_i^α, где $i \in \{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ и $\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда имеем

$$\Gamma_\nu^1(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \sum_{l=k-1}^{n-1} C_l^{k-1} \Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i). \tag{4.3}$$

Итак, вычисление оценки $\Gamma_\nu^1(S^0)$ сводится к вычислению $n(n-k+1)$ значений функций $\Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i)$ при $l \in \{k-1, \dots, n-1\}$ и $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Прямое использование определения (4.2) для этой цели практически невозможно, так как при небольших k потребовалось бы вычислить порядка $n \cdot 2^n$ произведений $\mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0}$. В силу этого нашей ближайшей целью будет обоснование эффективных формул для вычисления значений функций $\Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i)$.

Рассматривая (4.2) и считая, что $i' \neq i$, получаем

$$\Psi^{n-1,\, l}(\overline{\mu}_i) = \sum_{\{\overline{\omega}_0\}_{(i)} | l} \mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0} = \mu_{i'}^1 \sum_{(\{\overline{\omega}_0\}_{(i)})_{(i')} | (l-1)} (\mu_{(i)})_{(i')}^{\overline{\omega}_0} + \tag{4.4}$$

$$+ \mu_{i'}^0 \sum_{(\{\overline{\omega}_0\}_{(i)})_{(i')} | l} (\mu_{(i)})_{(i')}^{\overline{\omega}_0} = \mu_{i'}^1 \Psi^{n-2,\, l-1}(\overline{\mu}_{i,\, i'}) + \mu_{i'}^0 \Psi^{n-2,\, l}(\overline{\mu}_{i,\, i'}).$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов $\Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i)$, где $l \in \{k-1, \dots, n-1\}$, имеет место рекуррентное соотношение (4.4).

Проведем теперь преобразование вектора аргументов $(\mu_1^0, \mu_1^1, \dots, \mu_n^0, \mu_n^1)$, заменив его на вектор $(k_1(\tilde{\mu}_1^0, \tilde{\mu}_1^1), \dots, k_n(\tilde{\mu}_n^0, \tilde{\mu}_n^1))$, где

$$k_i = \begin{cases} \mu_i^1, & \text{если } \mu_i^0 = 0, \\ \mu_i^0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad \tilde{\mu}_i^\alpha = \mu_i^\alpha / k_i,$$

$\alpha \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. В результате для (4.2) имеем представление

$$\Psi^{n-1,\, l}(\overline{\mu}_i) = \prod_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} k_{i'} \sum_{\{\overline{\omega}_0\}_{(i)} | l} \tilde{\mu}_1^{\omega_0^1} \times \dots \times \tilde{\mu}_{i-1}^{\omega_0^{i-1}} \times \tilde{\mu}_{i+1}^{\omega_0^{i+1}} \times \dots \times \tilde{\mu}_n^{\omega_0^n}, \tag{4.5}$$

где

$$\prod_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^{n} k_{i'} = k_1 \times \dots \times k_{i-1} \times k_{i+1} \times \dots \times k_n.$$

Таким образом, задача вычисления значений функций $\Psi^{n-1,l}(\bar{\mu}_i)$ сводится к вычислению значений функций $\Psi^{n-1,l}(\bar{\bar{\mu}}_i)$, где

$$\Psi^{n-1,l}(\bar{\bar{\mu}}_i)=\sum_{\{\bar{\omega}_0\}_{(i)}\,|\,l}\tilde{\mu}_1^{\omega_0^1}\times\ldots\times\tilde{\mu}_{i-1}^{\omega_0^{i-1}}\times\tilde{\mu}_{i+1}^{\omega_0^{i+1}}\times\ldots\times\tilde{\mu}_n^{\omega_0^n}.$$

и $\bar{\bar{\mu}}_i=(\tilde{\mu}_1^0,\tilde{\mu}_1^1,\ldots,\tilde{\mu}_{i-1}^0,\tilde{\mu}_{i-1}^1,\tilde{\mu}_{i+1}^0,\tilde{\mu}_{i+1}^1,\ldots,\tilde{\mu}_n^0,\tilde{\mu}_n^1)$.

Разобьем множество индексов $\{1,2,\ldots,n\}/\{i\}$ на три непересекающихся подмножества: $\{1,2,\ldots,n\}/\{i\}=\{i_1',\ldots,i_r'\}\cup\{i_1'',\ldots,i_s''\}\cup\{i_1,\ldots\ldots,i_t\}$, $r+s+t=n-1$, таким образом, чтобы при $k\in\{1,2,\ldots,r\}$ выполнялось $\tilde{\mu}^0_{i'_k}=0$, при $k\in\{1,2,\ldots,s\}$ выполнялось $\tilde{\mu}^1_{i''_k}=0$ и, наконец, при $k\in\{1,2,\ldots,t\}$ выполнялось $\tilde{\mu}_{i_k}^0=1$, $\tilde{\mu}_{i_k}^1\neq0$.

Из рекуррентного соотношения (4.4) получаем

$$\Psi^{n-1,l}(\bar{\bar{\mu}}_i)=\Psi^{n-r-1,l-r}(\bar{\bar{\mu}}_{i,i_1',\ldots,i_r'})=$$

$$=\Psi^{n-r-s-1,l-r}(\bar{\bar{\mu}}_{i,i_1',\ldots,i_r',i_1'',\ldots,i_s''})=\Psi^{t,l-r}(\tilde{\mu}^1_{i_1},\ldots,\tilde{\mu}^1_{i_t}).$$

Таким образом, на базе рекуррентного соотношения (4.4) удается понизить, вообще говоря, размерность исходной задачи.

Введем обозначение

$$P_t^b(x_1,\ldots,x_a)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_b\leqslant a}x_{i_1}\ldots x_{i_b},\qquad b\leqslant a.$$

Легко видеть, что

$$\Psi^{t,l-r}(\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ldots,\tilde{\mu}_{i_t}^1)=P_t^{l-r}(\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ldots,\tilde{\mu}_{i_t}^1).$$

В результате решение исходной задачи свелось к вычислению значений многочлена в правой части последнего равенства.

Рассмотрим произведение

(4.6) $\qquad F_t(1+\tilde{\mu}_{i_1}^1x)\ldots(1+\tilde{\mu}_{i_t}^1x),$

определяющее многочлен t-й степени от x. Нетрудно заметить, что

$$F_t=1+\sum_{l=1}^{t}P_t^l(\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ldots\tilde{\mu}_{i_t}^1)x^l.$$

Отсюда вытекает, что

$$P_t^l(\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ldots,\tilde{\mu}_{i_t}^1)=\frac{1}{l!}\frac{d^{(l)}F_t}{(dx)^l}\bigg|_{x=0}.$$

Из (4.6) следует простой способ вычисления многочленов $P_t^l[\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ldots\ldots,\tilde{\mu}^1_{i_t})$, $l=1,2,\ldots,t$, который состоит в последовательном вычислении коэффициентов частичных произведений

$$F_t^k=(1+\tilde{\mu}_{i_1}^1x)\ldots(1+\tilde{\mu}_{i_k}^1x)=1+a_1^kx+\ldots+a_k^kx^k.$$

Это вычисление сводится к использованию рекуррентного соотношения:

$$a_0^k=1,\ \ k\in\{1,2,\ldots,t\},\quad a_1^1=\tilde{\mu}_{i_1}^1,\ \ a_i^1=0,\quad i\in\{2,3,\ldots,t\},$$

$$a_i^{k+1}=a_i^k+a_{i-1}^k\tilde{\mu}^1_{i_{k+1}},$$

$$a_{k+1}^{k+1}=a_k^k\tilde{\mu}^1_{i_{k+1}}\qquad k\in\{1,2,\ldots,t-1\}\ \text{и}\ i\in\{1,2,\ldots,k+1\}.$$

При $\alpha=0$ формула (3.1) имеет вид

$$\Gamma_\nu^1(S^0)=\int\limits_{\Pi^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)\overline{B}(\Omega,S,S^0)\,dS.$$

Используя $\overline{B}=1-B$ и (3.2), имеем

$$\Gamma_\nu^0(S^0)=F(\Pi^\nu)-\Gamma_\nu^1(S^0),\qquad F(\Pi^\nu)=\int\limits_{\Pi^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)\,dS. \tag{4.7}$$

Далее,

$$F(\Pi^\nu)=\int\limits_{\Pi^\nu}\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)\,dS=\Big[\sum_{\{\Omega\}}p(\Omega)\Big]\int\limits_{\Pi^\nu}dS= \tag{4.8}$$
$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}p_iC_{n-1}^{k-1}\Big)\Big[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^1+\mu_k^0)\Big].$$

Подставляя (4.3) и (4.8) в (4.7), имеем

$$\Gamma_\nu^0(S^0)=\Big(C_{n-1}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}p_i\Big)\Big[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^1+\mu_k^0)\Big]-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}p_i\mu_i^1\sum_{l=k-1}^{n-1}C_l^{k-1}\ \Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i),$$

где коэффициенты $\Psi^{n-1,l}(\overline{\mu}_i)$ вычисляются по формуле (4.5).

Случай 2. Система опорных множеств $\{\Omega\}$ состоит из всевозможных непустых подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$.

В этом случае, симмируя в (4.1) по всем k, где $k=1,2,\ldots,n$, имеем

$$\Gamma_\nu^1(S^0)=\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{\{\overline{\omega}_0\mid\omega_0^i=1\}(i)}\mu^{\overline{\omega}_0}2^{\|\overline{\omega}_0\|-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i\mu_i^1F_n^i(\overline{\mu}_i),$$

где

$$F_n^i(\overline{\mu}_i)=\sum_{\{\overline{\omega}_0\mid\omega_0^i=1\}(i)}2^{\|\overline{\omega}_0\|}\mu_{(i)}^{\overline{\omega}_0}.$$

Нетрудно заметить, что

$$F_n^i(\overline{\mu}_i)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(2\mu_k^1+\mu_k^0).$$

Таким образом, для $\Gamma_\nu^1(S^0)$ получена следующая формула:

$$\Gamma_\nu^1(S^0)=\sum_{i=1}^{n}p_i\mu_i^1\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(2\mu_k^1+\mu_k^0). \tag{4.9}$$

При $\alpha=0$ для (3.1), используя $\overline{B}=1-B$ и (4.9), получаем

$$\Gamma_\nu^0(S^0)=2^{n-1}\sum_{i=1}^{n}p_i\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^1+\mu_k^0)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}p_i\mu_i^1\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(2\mu_k^1+\mu_k^0).$$

С л у ч а й 3. Система опорных множеств $\{\Omega\}$ состоит из всех одноэлементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

В этом случае формулу (4.1) записываем в виде

$$\Gamma_\nu^1(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{\{\bar{\omega}_0 \mid \omega_0^i = 1\}} \mu^{\bar{\omega}_0} = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \bar{F}_n^{\,i}(\bar{\mu}_i),$$

где

$$\bar{F}_n^{\,i}(\bar{\mu}_i) = \sum_{\{\bar{\omega}_0 \mid \omega_0^i = 1\}_{(i)}} \bar{\mu}_{(i)}^{\bar{\omega}_0}.$$

Замечая, что

$$\bar{F}_n^{\,i}(\bar{\mu}_i) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\mu_k^1 + \mu_k^0),$$

имеем для $\Gamma_\nu^1(S^0)$ формулу

$$\Gamma_\nu^1(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\mu_k^1 + \mu_k^0). \tag{4.10}$$

Используя $\bar{B} = 1 - B$ и (4.10), получаем

$$\Gamma_\nu^0(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{k=1}^{n} (\mu_k^1 + \mu_k^0) - \sum_{i=1}^{n} p_i \mu_i^1 \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (\mu_k^1 + \mu_k^0).$$

С л у ч а й 4. $\{\Omega\} = \{\{1, 2, \ldots, n\}\}$.

В этом случае для $\Gamma_\nu^1(S^0)$, $\Gamma_\nu^0(S^0)$ из (3.1) имеем

$$\Gamma_\nu^1(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{k=1}^{n} \mu_k^1$$

и

$$\Gamma_\nu^0(S^0) = \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{k=1}^{n} (\mu_k^1 + \mu_k^0) - \sum_{i=1}^{n} p_i \prod_{k=1}^{n} \mu_k^1.$$

В заключение авторы выражают глубокую признательность Ю. И. Журавлёву за постоянное внимание к работе.

Литература

1. *Журавлёв Ю. И., Никифоров В. В.* Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок.— Кибернетика, 1971, № 3, с. 1—11.
2. *Журавлёв Ю. И., Камилов М. М., Туляганов Ш. Е.* Алгоритмы вычисления оценок и их применение. Ташкент: Фан, 1974.
3. *Журавлёв Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации.— В кн.: Пробл. кибернетики. Вып. 33. М.: Наука, 1978, с. 5—68.
4. *Журавлёв Ю. И.* Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I.— Кибернетика, 1977, № 4, с. 17—24.

Поступила в редакцию 22.IV.1983