1983 4

Кибернетика

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 519 856:007

В. В. БЕРЕЗИНА, К. В. РУДАКОВ

О МОДЕЛЯХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МЕДИЦИНСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

При проведении лечебно-оздоровительных мероприятий среди населения определенного региона (района, города и т. д.) большое значение имеет эффективное использование информации, содержащейся в отчетной медицинской документации. Результаты математической обработки этой информации помогут в организации целенаправленных оздоровительных мероприятий на базе прогноза динамики заболеваемости, особенно среди детей и подростков.

Исходным материалом при использовании предлагаемого в настоящей работе метода прогнозирования должна быть совокупность относительных показателей изучаемого явления (например, заболеваемости, частоты и тяжести осложнений и т. д.) в течение ряда лет. При этом рассматриваемые показатели относятся к определенным лечебно-профилактическим учреждениям или административным территориям и т. д. Кроме того, считается, что они относятся к соответствующим совокупностям нозологических групп заболеваний (терапевтические, хирургические и т. д.), дифференцированных по степени тяжести, формам и т. д.

Итак, объектами исследования (S) в настоящей работе являются описанные выше показатели, взятые за несколько лет. Такие объекты представляют собой наборы вида $(n_1(S), n_2(S), n_3(S), r_1(S), \ldots, r_n(S))$, где $n_1(S)$ — номер лечебно-профилактического учреждения, $n_2(S)$ — индекс группы заболеваний, $n_3(S)$ — индекс степени тяжести заболеваний, $r_t(S)$ — значение показателя в t-й год $(t \in \{1, \ldots, n\}$, n — период сбора информации).

Целью исследования является прогнозирование значения показателя в $n+1$-й год, обозначение $r_{n+1}(S)$.

Решение поставленной задачи проводится в рамках алгебраической теории распознавания образов [1, 2] на базе результатов работ [3, 4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ РАСПОЗНАВАНИЯ

Для определения двух классов задач распознавания, включающих задачи, поставленные во введении, требуется задать соответствующие пространства допустимых объектов, допустимых начальных информаций, финальных информаций (решений) и способы формирования информаций для конкретных задач.

Множество допустимых объектов $\{S\}$ для обоих описываемых классов задач — это множество $N^3 \times R_+^n$, где N и R_+ — соответственно множество натуральных и неотрицательных действительных чисел, n — некоторое фиксированное натуральное число. Таким образом, допустимые объекты S в данном случае — наборы вида $(n_1(S), n_2(S), n_3(S), r_1(S), \ldots, r_n(S))$, где $n_1(S) \in N$, $n_2(S) \in N$, $n_3(S) \in N$, $r_t(S) \in R_+$ при $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Имея в виду решение задачи прогнозирования, будем считать, что объекты допускают «продолжение», при котором объект $S = (n_1(S), \ldots, r_n(S))$ переходит в объект $S' = (n_1(S), \ldots, r_n(S), r_{n+1}(S))$, не являющийся, конечно, допустимым объектом для данных классов задач. Чтобы продолжить построение допустимых объектов, следует определить последнюю компоненту соответствующих продолженных объектов. Учитывая, что эта компонента должна быть определена лишь приближенно и возможные значения ее $(r_{n+1}(S))$ ограничены (практически это всегда имеет место при решении реальных задач), легко заключить, что задачу прогнозирования значения $r_{n+1}(S)$ можно решать как задачу классификации с конечным числом классов l (при некотором $l \in N$) — непересекающихся (в данном случае) подмножеств пространства допустимых объектов $\{S\}$.

Формализуем сказанное в предыдущем абзаце, считая, что определено (из содержательных соображений) число классов $l \in N$ и задана некоторая монотонно возрастающая функция $f: R_+ \to (0, 1)$ $\left(\text{скажем, } f(x) = \dfrac{x}{1+x} \text{ при } x \in R_+\right)$. При этом принадлежность объекта S классу K_j $(K_j \subseteq \{S\}$, $j \in \{1, \ldots, l\})$ определим по значению $r_{n+1}(S)$ — $n+1$-й действительной компоненте соответствующего продолженного объекта S':

$$(S \in K_j) \equiv \left(\frac{j-1}{l} \leqslant f(r_{n+1}(S)) < \frac{j}{l}\right),$$

$$\text{если } f(x) = \frac{x}{x+1},$$

то для вычисления номера класса получаем формулу

$$j = \left[\frac{l r_{n+1}(S)}{1 + r_{n+1}(S)}\right] + 1.$$

Для первого класса задач распознавания Z_R множество допустимых начальных информаций I_R определяется равенством

$$I_R = N^3 \times R_+^n \times \bigcup_{m=1}^{\infty} (N^3 \times R_+^{n+1})^m,$$

а для второго класса (Z_ρ) — равенством

$$I_\rho = N^3 \times \bigcup_{m=1}^{\infty} (N^3 \times R_+^{n+1})^m.$$

Пространство $\mathbf{I}$ финальных информаций для обоих классов задач то же: $\mathbf{I} = E_2 = \{0, 1\}$.

Для формирования информации при постановке конкретных задач из классов Z_R и Z_ρ требуется задание набора «обучающих» объектов $(S_1, \ldots, S_m)$ $(m \in N)$, классификация которых известна, или, что то же, известны $n+1$-е действительные компоненты соответствующих продолженных объектов. В этом случае для объекта S в задаче из класса Z_R начальной информацией будет набор, состоящий из самого объекта и продолженных обучающих объектов. В задаче же из класса Z_ρ информацией об объекте S будет набор

$$(n_1(S),\ n_2(S),\ n_3(S),\ n_1(S_1),\ n_2(S_1),\ n_3(S_1),$$
$$|r_1(S) - r_1(S_1)|, \ldots, |r_n(S) - r_n(S_1)|,$$
$$r_{n+1}(S_1), \ldots, r_{n+1}(S_m)).$$

Задача распознавания Z из каждого класса определяется набором $(I(S^1), \ldots, I(S^q))$ начальных информаций о допустимых объектах из конечной выборки $(S^1, \ldots, S^q)$ и так называемой информационной матрицей $\|\mathbf{I}_{ij}\|_{q \times l}$, где $\mathbf{I}_{ij} \in \mathbf{I}$ и $(\mathbf{I}_{ij} = 1) \equiv \equiv (S^i \in K_j)$ для всех $i \in \{1, \ldots, q\}$ и $j \in \{1, \ldots, l\}$.

Решением задачи Z является отображение A (алгоритм распознавания) пространства I^q (пространства наборов вида $(I_1, \ldots, I_q)$, где $I_i \in I$ при $i \in \{1, \ldots, q\}$) в пространство $C_{q,l}(\mathbf{I})$ (пространство матриц размерности $q \times l$ над $\mathbf{I}$) такое, что

$$A(I(S^1), \ldots, I(S^q)) = \|\mathbf{I}_{ij}\|_{q \times l}.$$

В работах [3, 4] установлено, что при решении задач распознавания из содержательных соображений необходимо определить категорию отображений, в рамках которой следует проводить построение искомого алгоритма. В данном случае ограничения категорного характера сводятся прежде всего к инвариантности допустимых отображений относительно действия произвольных пар биекций $\varphi_1, \varphi_2 : N \to N$. Это значит, что биекциям φ_1 и φ_2 сопоставляется биекция $(\varphi_1, \varphi_2) : \{S\} \to \{S\}$ так, что $(\varphi_1, \varphi_2)(S) = (\varphi_1, \varphi_2)(n_1(S), n_2(S), n_3(S), r_1(S), \ldots, r_n(S)) = (\varphi_1(n_1(S)), \varphi_2(n_2(S)), n_3(S), r_1(S), \ldots, r_n(S))$. Аналогично определяется действие пары биекций (φ_1, φ_2) и на множество продолженных объектов, и на множества допустимых начальных информаций для классов задач Z_R и Z_ρ (требуется, чтобы пара (φ_1, φ_2) действовала одновременно и на допустимый объект S, и на все объекты $S_1, \ldots, S_m$ из обучающей выборки). Требование инвариантности относительно действия биекций φ_1 и φ_2 выражается равенством

$$A((\varphi_1, \varphi_2)(I_1), \ldots, (\varphi_1, \varphi_2)(I_q)) = A(I_1, \ldots, I_q) -$$

для произвольных $I_1 \in I, \ldots, I_q \in I$. Кроме того, классифицировать различные объекты следует по одному и тому же закону. В терминах работ [3, 4] это означает, что рассматриваемые алгоритмы должны быть морфизмами категории K_{φ_i}.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ

Легко видеть, что условие инвариантности допустимых отображений относительно действия пар биекций на пространствах допустимых начальных информаций можно задать как условие постоянства этих отображений на классах эквивалентности по следующему отношению: $I_1 \approx I_2$ тогда и только тогда, когда существует пара биекций (φ_1, φ_2) $(\varphi_1 : N \to N$ и $\varphi_2 : N \to N)$ такая, что $I_2 = (\varphi_1, \varphi_2)(I_1)$. Отсюда вытекает, что каждому алгоритму распознавания, удовлетворяющему условию инвариантности, соответствует алгоритм, действующий на пространстве информаций, факторизованном по данному отношению эквивалентности.

В качестве факторизаций пространств I_R и I_ρ используем пространства I'_R и I'_ρ:

$$I'_R \subseteq N \times R_+^n \times \bigcup_{m=1}^{\infty} (C_{m+1,m+1}(E_2))^2 \times (N \times R_+^{n+1})^m$$

и

$$I'_\rho \subseteq N \times \bigcup_{m=1}^{\infty} (C_{m+1,m+1}(E_2))^2 \times (N \times R_+^{n+1})^m.$$

При этом канонические сюръекции $\psi_R : I_R \to I'_R$ и $\psi_\rho : I_\rho \to I'_\rho$ индуцируются отображением $\eta : N^{m+1} \to \to C_{m+1,m+1}(E_2)$, при котором набору $(n_1, \ldots, n_{m+1}) \in \in N^{m+1}$ сопоставляется двоичная матрица

$$\|\alpha_{ij}\|_{m+1 \times m+1} \in C_{m+1,m+1}(E_2),$$

где $(\alpha_{ij} = 1) \equiv (n_i = n_j)$, где $i, j \in \{1, \ldots, m+1\}$.

Для наглядности скажем, что теперь в задаче из класса Z_R начальной информацией об объекте S будет набор $(n_3(S),$

$$r_1(S), \ldots, r_n(S_m),\ \|\alpha_{ij}^1(S)\|_{m+1 \times m+1},$$
$$\|\alpha_{ij}^2(S)\|_{m+1 \times m+1},\ n_3(S_1),\ r_1(S_1), \ldots, r_{n+1}(S_m)),$$

а в задаче из класса Z_ρ — набор $(n_3(S),$ $\|\alpha_{ij}^1(S)\|_{m+1 \times m+1},$ $\|\alpha_{ij}^2(S)\|_{m+1 \times m+1},$ $n_3(S_1),$ $|r_1(S) - r_1(S_1)|, \ldots, r_{n+1}(S_m))$, где $(\alpha_{ij}^1(S) = 1) \equiv \equiv (n_1(S_i) = n_1(S_j))$ и $(\alpha_{ij}^2(S) = 1) \equiv (n_2(S_i) = = n_2(S_j))$ при $i, j \in \{1, \ldots, m+1\}$ (здесь и далее по определению считаем $S_{m+1} = S$).

Корректность проведенной факторизации очевидна.

В дальнейшем для задач из классов Z_R и Z_ρ в качестве пространств допустимых начальных информаций будем рассматривать соответственно пространства I'_R и I'_ρ. В результате требование инвариантности, сформулированное в конце предыдущего раздела, оказывается автоматически выполненным.

3. УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ ДЛЯ Z_R И Z_ρ

Сформулируем условия полноты, т. е. условия разрешимости задач из классов Z_R и Z_ρ в рамках категории $\mathbf{K}_{\varphi_l}$. Иначе говоря, это условия разрешимости задач в рамках семейства алгоритмов распознавания (т. е. отображений вида $A: I^q \to C_{q,l}(\mathbb{I})$) таких, что каждый алгоритм определяется некоторым набором функций $f_1, \ldots, f_l$, где $f_j: I \to \mathbb{I}$ при $j \in \{1, \ldots, l\}$, следующим образом:

$$\forall (I_1, \ldots, I_q)\, A(I_1, \ldots, I_q) = \| f_j(I_i) \|_{q \times l},$$

$$(I_1, \ldots, I_q) \in I^q.$$

В работах [1, 2] аналогичные условия называются *условиями регулярности*.

Из общего критерия полноты задач распознавания в категории $\mathbf{K}_{\varphi_l}$ ([4], теорема 12) для задач из классов Z_R и Z_ρ имеем:

1) задача Z из класса Z_R полна тогда и только тогда, когда для любых $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ выполнено хотя бы одно из условий А—Г;

2) задача Z из класса Z_ρ полна тогда и только тогда, когда для любых $i_1 \neq i_2$ из множества $\{1, \ldots, q\}$ выполнено хотя бы одно из условий А—Д:

А) $n_3(S^{i_1}) \neq n_3(S^{i_2})$;

Б) $\exists k\, (\alpha^1_{k,m+1}(S^{i_1}) \neq \alpha^1_{k,m+1}(S^{i_2}))$, $k \in \{1, \ldots, m\}$;

В) $\exists k\, (\alpha^2_{k,m+1}(S^{i_1}) \neq \alpha^2_{k,m+1}(S^{i_2}))$, $k \in \{1, \ldots, m\}$;

Г) $\exists t\, (r_t(S^{i_1}) \neq r_t(S^{i_2}))$, $t \in \{1, \ldots, n\}$;

Д) $\exists k, t\, (|r_t(S^{i_1}) - r_t(S_k)| \neq |r_t(S^{i_2}) - r_t(S_k)|)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $t \in \{1, \ldots, n\}$.

Кроме того, считаем, что в рассматриваемых задачах

$$\{S^1, \ldots, S^q\} \cap \{S_1, \ldots, S_m\} = \varnothing.$$

4. МОДЕЛИ РАСПОЗНАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ $\mathfrak{M}_R$ И $\mathfrak{M}_\rho$

Данные модели операторов предназначены для решения задач из классов Z_R и Z_ρ соответственно. Пространство оценок для них — это множество действительных чисел R. Поскольку процесс формирования алгоритмов распознавания на базе моделей распознающих операторов подробно изучен в [1—4], то ниже он рассматриваться не будет.

Модель $\mathfrak{M}_R$. Распознающие операторы B из этой модели (суть отображения $B: I^q \to C_{q,l}(R)$) определяются набором кусочно-линейных предикатов $R_k: R^n \to E_2$ при $k \in N$ (т. е. предикатов, задаваемых с помощью кусочно-линейных функций $f_k: R^n \to R$ так, что для любой точки $x \in R^n$ выполнено $(R_k(x) = 1) \equiv (f_k(x) \geqslant 0)$), набором действительных неотрицательных параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ и функцией $\xi: E_2^2 \to E_2$.

Для задачи Z из класса Z_R оператор B формирует матрицу оценок $B(I(S^1), \ldots, I(S^q)) = \| B_j(I(S^i)) \|_{q \times l}$, где значения $B_j(I(S))$ ($j \in \{1, \ldots, l\}$, $S \in \{S\}$) определяются так:

1) множество $\{S_1, \ldots, S_m\}$ разбивается на четыре подмножества $S^j_{\alpha\beta}(I(S))$:

$$S^j_{\alpha\beta}(I(S)) = \{S_k \mid P_j(S_k) = \alpha,$$

$$R_{n_3(S)}(S_k) = \beta\}, \quad \alpha, \beta \in E_2;$$

2) вычисляются величины $Q^j_{\alpha\beta}(I(S))$:

$$Q^j_{\alpha\beta}(I(S)) = \sum_{S_k \in S^j_{\alpha\beta}(I(S))} \xi(\alpha^1_{k,m+1}(S), \alpha^2_{k,m+1}(S))\gamma_k,$$

$$\alpha, \beta \in E_2;$$

3) вычисляются, наконец, оценки

$$Q^j_1(I(S)) = Q^j_{00}(I(S)) + Q^j_{11}(I(S)),$$

$$Q^j_0(I(S)) = Q^j_{01}(I(S)) + Q^j_{10}(I(S)),$$

$$B_j(S) = \begin{cases} Q^j_1(I(S))(Q^j_0(I(S)) + 1)^{-1} \text{ при } R_{n_3(S)}(S) = 1, \\ Q^j_0(I(S))(Q^j_1(I(S)) + 1)^{-1} \text{ при } R_{n_3(S)}(S) = 0. \end{cases}$$

Модель $\mathfrak{M}_\rho$. Распознающие операторы B из этой модели определяются выбором неотрицательных действительных параметров $\varepsilon_1(k), \ldots, \varepsilon_n(k)$ $(k \in N)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, выбором системы опорных множеств $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_r\}$, т. е. системы непустых подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$ и функции $\xi: E_2^2 \to E_2$. При этом требуется, чтобы имело место равенство $\Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_r = \{1, \ldots, n\}$.

Каждому набору $\tilde{\varepsilon}(k) = (\varepsilon_1(k), \ldots, \varepsilon_n(k))$ сопоставляется функция близости $b_{\tilde{\varepsilon}(k)}: \mathfrak{B}(\{1, \ldots, n\}) \times R^n_+ \to E_2$ так, что для всех $\Omega \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и $(r_1, \ldots, r_n) \in R^n_+$:

$$(b_{\tilde{\varepsilon}(k)}(\Omega, r_1, \ldots, r_k) = 1) \equiv (\forall t\, (r_t \leqslant \varepsilon_t(k)),$$

$$t \in \Omega).$$

Для задачи Z из класса Z_ρ оператор B формирует матрицу оценок $\| B_j(I(S^i)) \|_{q \times l}$, где значения $B_j(I(S))$ при $j \in \{1, \ldots, l\}$ и $S \in \{S\}$ определяются следующим образом:

$$B_j(I(S)) = \Gamma^1_j(I(S)) + \Gamma^0_j(I(S)),$$

где

$$\Gamma^\alpha_j(I(S)) = \sum_{S_k: P_j(S_k) = \alpha} \sum_{t=1}^{r} \xi(\alpha^1_{k,m+1}(S), \alpha^2_{k,m+1}(S)) \times$$

$$\times \gamma_k \delta(\alpha, t, k),$$

$$\delta(\alpha, t, k) = b^\alpha_{\tilde{\varepsilon}(n_3(S))}(\Omega_t, |r_1(S) - r_1(S_k)|, \ldots$$

$$\ldots, |r_n(S) - r_n(S_k)|), \quad \alpha \in E_2,$$

$$b^1_{\underset{\varepsilon}{\sim}} = b_{\underset{\varepsilon}{\sim}}, \quad b^0_{\underset{\varepsilon}{\sim}} = 1 - b_{\underset{\varepsilon}{\sim}}.$$

Отметим, что для построения моделей $\mathfrak{M}_R$ и $\mathfrak{M}_\rho$ использованы идеи работ [1, 2].

Теорема. Построенные модели полны в категории K_{φ_i} для соответствующих классов задач ($\mathfrak{M}_R$ — для класса Z_R, $\mathfrak{M}_\rho$ — для класса Z_ρ).

Данная теорема есть утверждение о принципиальной неулучшаемости моделей $\mathfrak{M}_R$ и $\mathfrak{M}_\rho$ в рамках категории K_{φ_i}. Иначе говоря, это утверждение о том, что, используя эти модели, можно построить корректные алгоритмы для всех полных задач из классов Z_R и Z_ρ.

Доказательство утверждения о полноте моделей $\mathfrak{M}_R$ и $\mathfrak{M}_\rho$, имеющее чисто технический характер, проводить не будем. Скажем только, что в силу результатов работ [3, 4] это доказательство сводится к проверке того, что для произвольной полной задачи из класса Z_R или Z_ρ и для произвольных $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, q\}$, в рамках моделей $\mathfrak{M}_R$ или соответственно $\mathfrak{M}_\rho$ возможно построение распознающего оператора B, порождающего для этой задачи матрицу оценок, в которой i_1- и i_2-я строки различны.

Операторы и соответствующие им алгоритмы выписываются в явном виде, поэтому их программирование не представляет особых трудностей. Программы для ЭВМ, реализующие алгоритмы алгебраического подхода, включены в пакет для решения задачи распознавания классификаций и прогнозирования и успешно применяются в медицинской диагностике и медицинском прогнозировании. Задачи, описанные в данной работе, являются типичными задачами медицинского прогнозирования, поэтому эффективно решаются методами, изложенными в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I, II.— Кибернетика, 1977, № 4, с. 5—17; № 6, с. 21—27.
2. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации.— Пробл. кибернетики, 1978, вып. 33, с. 5—68.
3. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (общие результаты).— М.: ВЦ АН СССР, 1980.— 66 с.
4. Рудаков К. В. О некоторых классах алгоритмов распознавания (параметрические модели).— М.: ВЦ АН СССР, 1981.— 48 с.

Поступила 04.02.83