АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1980

**ЖУРНАЛ**
**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Том 20** **Май 1980 Июнь** **№ 3**

УДК 519.7

# О КОРРЕКТНОСТИ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ТИПА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

***К. В. РУДАКОВ***

***(Москва)***

Рассмотрены вопросы полноты алгебр над множествами алгоритмов метода потенциальных функций. Получены критерии полноты задач распознавания.

## § 1. Основные понятия

Рассматриваются 4 множества: $\{S\}$ — множество допустимых объектов, $\{I\}$ — множество допустимых начальных информаций, $\{P\}$ — множество предикатов на $\{S\}$, $\{A\}$ — множество алгоритмов.

Алгоритмы из множества $\{A\}$ служат для определения значений предикатов из $\{P\}$ на допустимых объектах по допустимым начальным информациям. Будет изучаться задача построения алгоритма, вычисляющего по $I\in\{I\}$ предикаты $P_1\in\{P\},\dots,P_l\in\{P\}$ для объектов $S_1\in\{S\},\dots,S_q\in\{S\}$. Такого рода задача рассматривалась в работах [1-3].

Приведем несколько нужных нам для дальнейшего определений и утверждений из [2].

Определение 1. Матрица $\|\alpha_{ij}\|_{q\times l}$, где $\alpha_{ij}=P_j(S_i)$ при $i=1, 2,\dots, q$, $j=1, 2,\dots, l$, является информационной матрицей набора $(S_1,\dots, S_q)$ по системе предикатов $(P_1,\dots, P_l)$. Вектор $(\alpha_{i1},\dots, \alpha_{il})$ называется информационным вектором допустимого объекта $S_i$.

Определение 2. Алгоритм $A$ называется корректным для задачи $Z(I, S_1,\dots, S_q, P_1,\dots, P_l)$ (задачи построения алгоритма, определяющего по информации $I$ значения предикатов $P_1,\dots, P_l$ на объектах $S_1,\dots, S_q$), если $A(I, S_1,\dots, S_q, P_1,\dots, P_l)=\|\alpha_{ij}\|_{q\times l}$, т. е. если он правильно определяет значения всех предикатов $P_1,\dots, P_l$ на наборе допустимых объектов $(S_1,\dots, S_q)$. Далее символом $\bar{I}$ будет обозначаться стандартный набор аргументов $I, S_1,\dots, S_q, P_1,\dots, P_l$. Так, вместо «задача $Z(I, S_1,\dots, S_q, P_1,\dots, P_l)$» будем писать «задача $Z(\bar{I})$», и т. п.

Будем рассматривать множества таких алгоритмов $A$, результатом работы которых является матрица $\|\beta_{ij}\|_{q\times l}$, где $\beta_{ij}\in\{0, 1, \Delta\}$ (равенство $\beta_{ij}=\Delta$ означает, что алгоритм не может определить значение предиката $P_j$ на объекте $S_i$, где $i=1, 2,\dots, q$, $j=1, 2,\dots, l$). Итак, пусть $\{A\}$ — множество таких, вообще говоря, некорректных алгоритмов. В [2] доказана

Теорема 1. *Каждый алгоритм $A\in\{A\}$ представим в виде $B\circ C$, где $B(\bar{I})=\|a_{ij}\|_{q\times l}$, $a_{ij}\in R^1$, $C(\|a_{ij}\|_{q\times l})=\|\beta_{ij}\|_{q\times l}$, $B=B(A)$, $C=C(A)$.*

Итак, $\{A\}$ порождает $\{B\}$ — множество алгоритмических операторов и $\{C\}$ — множество решающих правил.

Определение 3. Решающее правило $C$ корректно, если для всякого набора $(S_1, \ldots, S_q)$ допустимых объектов и набора предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$ существует числовая матрица $\|a_{ij}\|_{q\times l}$ такая, что $C(\|a_{ij}\|_{q\times l}) = \|\alpha_{ij}\|_{q\times l}$, где $\|\alpha_{ij}\|_{q\times l}$ — информационная матрица набора $(S_1, \ldots, S_q)$ по системе предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$.

Во множестве алгоритмических операторов $\{B\}$ вводятся операции «$+$» и «$\times a$» (сложения и умножения на $a \in R^1$) следующим образом:

$$a \cdot B(\bar{I}) = \|a \cdot a_{ij}\|_{q\times l}, \tag{1.1}$$

$$(B' + B'')(\bar{I}) = \|a_{ij}' + a_{ij}''\|_{q\times l}. \tag{1.2}$$

Замыкание $\{B\}$ по операциям (1.1) и (1.2) образует векторное пространство $\bar{L}\{B\}$.

Зафиксируем некоторую задачу $Z(\bar{I})$. Множеству $\{B\}$ алгоритмических операторов естественным образом соответствует множество числовых матриц $\{B(\bar{I})\}$.

Определение 4. Если множество матриц $\{B(\bar{I})\}$ содержит базис пространства числовых матриц размера $q \times l$, то задача $Z(\bar{I})$ полна относительно $\{B\}$.

Смысл этого определения выясняется следующей теоремой (см. [2]).

Теорема 2. *Если $\{Z\}$ состоит лишь из задач, полных относительно $\{B\}$, $C_0$ — произвольное фиксированное корректное решающее правило, то в $\bar{L}\{B\}$ для любой задачи $Z \in \{Z\}$ существует алгоритмический оператор, образующий вместе с $C_0$ алгоритм, корректный для задачи $Z$.*

## § 2. Корректность алгоритмов метода потенциальных функций

Метод потенциальных функций [4] создан для решения задач распознавания или классификации. В этих задачах $\{S\} = K_1 \cup \ldots \cup K_l$. Множества $K_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, называются классами. Предикаты $P_i$ суть характеристические функции этих классов.

Далее рассматривается случай, когда информация $I$ имеет следующий вид: задан некоторый перечень допустимых объектов $S_1', \ldots, S_m'$ вместе с их информационными векторами по системе предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$. Таким образом, информация $I$ в нашем случае есть упорядоченный набор $(S_1', \tilde{\alpha}(S_1'), \ldots, S_m', \tilde{\alpha}(S_m'))$, где $\tilde{\alpha}(S) = (P_1(S), \ldots, P_l(S))$ — информационный вектор элемента $S \in \{S\}$.

Для алгоритмов метода потенциальных функций определяющим является выбор некоторой функции $F: \{S\}^2 \to R^1$ (потенциальной функции) и вида числовой последовательности $\langle r_i \rangle$, члены которой зависят от информации $I$ и процесса формирования матрицы $B(\bar{I})$, определенного, вообще говоря, неоднозначно. Потенциальные функции выбираются симметричными.

Будем рассматривать алгоритмы метода потенциальных функций в качестве алгоритмических операторов. Итак, каждый такой алгоритмический оператор $B$ зависит от потенциальной функции $F$ и способа формирования числовой последовательности, который обозначим через $\Delta$.

При вычислении $B(\bar{I})$ определяются $l$ функционалов

$$f_j: \{S\} \to R^1, \qquad j=1, 2, \ldots, l,$$

так что

$$f_j(S) = \sum_{i=1}^{m} r_{ij} F(S_i', S),$$

где $r_{ij} \in R^1$ выбираются в соответствии с набором инструкций $\Delta$. Результат работы алгоритмического оператора $B$ таков:

$$B(\bar{I}) = \| f_j(S_i) \|_{q \times l}.$$

При фиксированной потенциальной функции $F$ и при различных способах выбора параметров $r_{ij}$ возникают различные алгоритмические операторы, образующие множество, которое назовем $\Omega(F)$.

Рассмотрим отдельно $ml$ алгоритмических операторов $B_{rs}$, которые возникают, если выбрать $r_{ij} = \delta_{ir}\delta_{js}$, где $i=1, 2, \ldots, m$, $r=1, 2, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, l$, $s=1, 2, \ldots, l$, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Обозначим это множество алгоритмических операторов через $\Lambda(F)$. При любой допустимой информации $I$ для любого набора допустимых объектов $(S_1, \ldots, S_q)$ и предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$ алгоритмические операторы из множества $\Lambda(F)$ формируют $ml$ матриц, содержащих только по одному ненулевому столбцу. Нетрудно видеть, что матрицы, которые могут быть построены операторами из $\Omega(F)$, являются линейными комбинациями матриц, сформированных алгоритмическими операторами из $\Lambda(F)$. Это означает, что $\Omega(F) \subseteq L\Lambda(F)$.

Данное включение «локально» в том смысле, что в $L\Lambda(F)$ может не найтись алгоритмического оператора, который для любой информации $I$ и любого набора допустимых объектов будет давать такой же результат, как некоторый алгоритмический оператор $B \in \Omega(F)$. Это связано с тем, что никак не ограничена возможность выбора способа порождения числовой последовательности $\langle r_{ij} \rangle$. Однако для всякой фиксированной допустимой информации $I$, фиксированного набора допустимых объектов $(S_1, \ldots, S_q)$ и набора предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$ в $L\Lambda(F)$ для каждого алгоритмического оператора из $\Omega(F)$ существует алгоритмический оператор, дающий тот же результат. Если включение $\Omega(F) \subseteq L\Lambda(F)$ строгое, то при использовании некоторого корректного решающего правила для некоторой задачи $Z$ в $\Omega(F)$ не найдется алгоритмического оператора, способного составить вместе с ним корректный алгоритм для этой задачи, в то время как в $L\Lambda(F)$ такой алгоритм будет существовать.

Таким образом, из-за неудачного выбора способа формирования последовательности $\langle r_{ij}\rangle$ может оказаться потерянной информация, которую несут в себе значения потенциальной функции. Более подробно эта ситуация рассматриваться не будет: в дальнейшем считается, что $\Omega(F)=L\Lambda(F)$.

Далее предполагается, что информация $I$, набор допустимых объектов $(S_1,\ldots,S_q)$ и набор предикатов $(P_1,\ldots,P_l)$ фиксированы.

Рассмотрим множество матриц, которые возникают в этом случае в результате работы алгоритмических операторов из $L\Lambda(F)$. Столбцы этих матриц являются некоторыми линейными комбинациями столбцов матрицы

$$\chi=\|F(S_j', S_i)\|_{q\times m}.$$

Ясно, что для полноты задачи $Z(\bar{I})$ относительно множества алгоритмических операторов $\Lambda(F)$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\chi$ был равен $q$ (в этом случае во множестве $L\Lambda(F)$ для любого корректного решающего правила найдется алгоритмический оператор, составляющий вместе с ним корректный алгоритм для данной задачи). Оформим это утверждение в виде теоремы.

Теорема 3. *Задача $Z(\bar{I})$ полна относительно множества алгоритмических операторов метода потенциальных функций $\Omega(F)$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\chi$ равен $q$.*

Следствие 1 («условие существования тестов», см. [5]). Для полноты задачи $Z$ относительно $\Omega(F)$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(2.1)\qquad \forall i\ \forall j\neq i\ \exists k\ \ (F(S_k', S_i)\neq F(S_k', S_j))\qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant q,\quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Доказательство. Если условие (2.1) не выполнено, то в матрице $\chi$ совпадают по меньшей мере 2 строки.

Следствие 2. Для полноты задачи Z относительно $\Omega(F)$ необходимо выполнение неравенства $m\geqslant q$ (число «обучающих» объектов должно быть не меньше, чем число «распознаваемых» объектов).

Доказательство. Число $m$ есть число столбцов матрицы $\chi$.

Следствие 2 устанавливает весьма неудобную нижнюю границу для объема информации $I=(S_1', \tilde{\alpha}(S_1'),\ldots, S_m', \tilde{\alpha}(S_m'))$, необходимой для работы алгоритмических операторов метода потенциальных функций, из-за чего возникает необходимость расширить исходное множество алгоритмических операторов. Это расширение достигается использованием некоторого класса потенциальных функций. Будем рассматривать ситуацию, когда потенциальные функции принадлежат заданному однопараметрическому семейству.

Пусть $\tilde{F}:\{S\}^2\times R^1\to R^1$ — функция трех переменных, симметричная по первым двум из них. Рассмотрим ее как однопараметрическое семейство потенциальных функций $\{\tilde{F}(S', S'', a)\,|\,a\in R^1\}$.

Пусть

$$\Lambda(\tilde{F})=\bigcup_{a\in R^1}\Lambda(\tilde{F}(S',S'',a)).$$

Нас будет интересовать полнота относительно множества алгоритмических операторов $\Lambda(\tilde{F})$. Снова рассматривая фиксированную информацию $I$, фиксированный набор допустимых объектов $(S_1, \ldots, S_q)$ и предикатов $(P_1, \ldots, P_l)$, видим, что ненулевые столбцы любой матрицы, получающейся в результате работы любого алгоритмического оператора из $\Lambda(\tilde{F})$, имеют вид

$$(2.2) \qquad \tilde{\chi}_j = \|\tilde{F}(S_j', S_i, a)\|_{q\times 1},$$

где $j=1, 2, \ldots, m$, $a \in R^1$.

Применение произвольного алгоритмического оператора из $L\Lambda(\tilde{F})$ приведет к матрице, столбцы которой являются линейными комбинациями столбцов вида (2.2). Учитывая это, легко получить необходимые и достаточные условия полноты задачи $Z$ относительно множества алгоритмических операторов $\Lambda(\tilde{F})$.

Теорема 4. *Задача $Z(\bar{I})$ полна относительно множества алгоритмических операторов $\Lambda(\tilde{F})$ тогда и только тогда, когда существуют набор индексов $k_1, \ldots, k_q$, где $k_i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $i=1, 2, \ldots, q$, и набор значений параметра $a$: $a_1, \ldots, a_q$, $a_i \in R^1$, $i=1, 2, \ldots, q$, такие, что ранг матрицы*

$$\tilde{\chi} = \|\tilde{F}(S_{k_j}' \; S_i, \; a_j)\|_{q\times q}$$

*равен $q$.*

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то в $\Lambda(\tilde{F})$ операторы $B_{rs}$ с $F=\tilde{F}(S', S'', a_r)$ и $r_{ij}=\delta_{ik_r}\delta_{js}$ при $r=1, 2, \ldots, q$, $s=1, 2, \ldots, l$, $i=1, 2, \ldots, q$, $j=1, 2, \ldots, l$ образуют для задачи $Z$ множество из $ql$ линейно-независимых матриц, являющееся базисом пространства всех действительных матриц размера $q\times l$, т. е. задача $Z$ полна относительно $\Lambda(\tilde{F})$.

Если же условия теоремы не выполнены, то все векторы-столбцы $\tilde{\chi}_j$ (см. (2.2)) лежат в собственном подпространстве $q$-мерного евклидова пространства и, следовательно, матрицы, у которых столбцы выбираются из множества столбцов вида (2.2), не могут содержать базис всего пространства действительных матриц размера $q\times l$.

Следствие 3 («условие существования тестов»). Для полноты задачи $Z(\bar{I})$ относительно множества алгоритмических операторов $\Lambda(\tilde{F})$ необходимо, чтобы было выполнено условие

$$(2.3) \qquad \forall i \; \forall j\neq i \; \exists a \exists k \; (\tilde{F}(S_k', S_i, a) \neq \tilde{F}(S_k', S_j, a)), \qquad 1\leqslant i, j\leqslant q,$$
$$a\in R^1, \quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

Доказательство. Если условие (2.3) не выполнено, то в матрице $\tilde{\chi}$ совпадают по крайней мере 2 строки.

Сопоставим каждому $i=\{1, 2, \ldots, m\}$ для задачи $Z$ разбиение множества $\{S_1, \ldots, S_q\}$ на классы $M_1^i, \ldots, M_{t_i}^i$ такое, что объекты $S_r$ и $S_s$, $r=1, 2, \ldots, q$, $s=1, 2, \ldots, q$, попадают в один класс $M_u^i$, $u=1, 2, \ldots, t_i$, тогда и только тогда, когда

$$\forall a (\tilde{F}(S_i', S_r, a) = \tilde{F}(S_i', S_s, a)), \qquad a\in R^1.$$

Иначе говоря, $M_u^i$ ($i=1, 2, \ldots, m$, $u=1, 2, \ldots, t_i$) — это классы допустимых объектов, неразличимых по отношению к объекту $S_i'$ с помощью потенциальной функции $\tilde{F}(S', S'', a)$.

Рассмотрим характеристические функции классов $M_u^i$ как векторы-столбцы в $R^q$. Назовем множество этих векторов множеством $\Psi$. Теперь можно доказать

Следствие 4. Для полноты задачи $Z(\tilde{I})$ относительно $\Lambda(\tilde{F})$ необходимо, чтобы во множестве $\Psi$ содержался базис пространства $R^q$.

Доказательство. Все столбцы матрицы $\tilde{\chi}$ являются суммами векторов из $\Psi$ (причем коэффициентами служат значения потенциальной функции).

Заметим, что из выполнения условий следствия 4 следует выполнение условий следствия 3. Действительно, если условия следствия 3 не выполнены, то во множестве $\{S_1, \ldots, S_q\}$ есть по крайней мере 2 неразличимых объекта. Следовательно, соответствующие компоненты всех векторов множества $\Psi$ равны между собой и тем самым множество $\Psi$ не может содержать базиса пространства $R^q$.

Предметом нашего дальнейшего рассмотрения станут условия, которые, будучи наложены на выбор функции $\tilde{F}$, обеспечат достаточность выполнения необходимых условий, сформулированных в следствии 4.

Будем далее считать, что функция $\tilde{F}$ обладает следующим свойством транзитивности:

$$\forall\langle S_1, S_2, S_3\rangle \exists S_4 \forall a (\tilde{F}(S_1, S_2, a)=\tilde{F}(S_3, S_4, a)), \qquad a\in R^1. \tag{2.4}$$

Рассмотрим функцию $\tilde{F}(S', S'', a)$ как класс функций одного действительного параметра $a$. Пусть

$$\Phi=\{\tilde{F}(S', S'', a)\,|\,S'\in\{S\}, S''\in\{S\}\}.$$

Заметим, что в $\Phi$ разным парам $\langle S_1', S_1''\rangle$ и $\langle S_2', S_2''\rangle$ может соответствовать только один элемент (т. е. только одна функция одного действительного параметра).

Справедлива

Теорема 5. *Для того чтобы необходимое условие, сформулированное в следствии 4, являлось одновременно и достаточным, необходимо и достаточно, чтобы функции из множества $\Phi$ были линейно-независимы.*

Доказательство. Необходимость. Данная часть доказательства опирается на свойство (2.4) функции $\tilde{F}$.

Пусть в $\Phi$ есть конечный набор функций $\tilde{F}(S_i', S_i'', a)$, $i=1, 2, \ldots, n$, такой, что выполнено соотношение

$$\exists \bar{s}\, \forall a \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \tilde{F}(S_i', S_i'', a)=0\right), \qquad a\in R^1, \quad \bar{s}\in R^n\setminus\{\bar{0}\}. \tag{2.5}$$

Выберем некоторый допустимый объект $S_0'$. Так как $\tilde{F}$ обладает свойством (2.4), то существует набор $(S_1, \ldots, S_n)$ такой, что

$$\forall i \forall a (\tilde{F}(S_i', S_i'', a)=\tilde{F}(S_0', S_i, a)), \quad 1\leqslant i\leqslant n, \quad a\in R^1. \tag{2.6}$$

Пусть предикаты $P_1, \ldots, P_l$ заданы на $\{S\}$ произвольно, $I_0=(S_0', \tilde{\alpha}(S_0'))$. Рассмотрим задачу $Z(I_0, S_1, \ldots, S_n, P_1, \ldots, P_l)$. Так как при $i=1, 2, \ldots \ldots, n$ функции $F(S_0', S_i, a)$ различны, то для этой задачи выполнены необходимые условия, сформулированные в следствии 4 (классы $M_u^0$ при $u=1, 2, \ldots, n$ содержат по одному элементу). Однако ранг матрицы $\tilde{\chi}$ меньше $q$ при любом выборе $a_1, \ldots, a_q$, так как строки этой матрицы линейно-зависимы в силу (2.5) и (2.6). Таким образом, необходимые условия в данном случае не будут достаточными. Необходимость линейной независимости функций из множества $\Phi$ доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть задача $Z(\bar{I})$ удовлетворяет условиям следствия 4 относительно функции $\tilde{F}$ и функции из множества $\Phi$ линейно-независимы.

Рассмотрим множество столбцов

$$K=\{\|\tilde{F}(S_i', S_j, a)\|_{q\times 1} \mid i=1, 2, \ldots, m, a\in R^1\}.$$

Надо доказать, что в этом множестве содержится базис пространства $R^q$.

Предположим, что существует вектор $\bar{s}\in R^q$ такой, что

$$\forall i\, \forall a \left(\sum_{j=1}^{q} s_j\tilde{F}(S_i', S_j, a)=0\right), \qquad 1\leqslant i\leqslant m, \quad a\in R^1.$$

В силу линейной независимости функций из $\Phi$ отсюда имеем

$$\sum_{S_j\in M_u^i} s_j = 0,$$

где $j=1, 2, \ldots, q$, $i=1, 2, \ldots, m$, $u=1, 2, \ldots, t_i$. Из последнего равенства и предположения о выполнении условий следствия 4 имеем $s_j=0$ при $j=1, 2, \ldots, q$. Таким образом, для каждого ненулевого $\bar{s}\in R^q$ во множестве $K$ найдется вектор-столбец, не ортогональный $\bar{s}$. Следовательно, в $K$ содержится базис пространства $R^q$, т. е. задача $Z$ полна относительно $\Lambda(\tilde{F})$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь практически важный случай, когда множество функций одного действительного параметра $\Phi$ можно рассматривать как функцию от двух действительных параметров $f(\rho, a)$. Такая ситуация возникает, например, когда $\{S\}$ является метрическим пространством, $\rho$ — метрика в этом пространстве и $\tilde{F}(S', S'', a)=f(\rho(S', S''), a)$.

В соответствии с теоремой 5, выбор функции $f(\rho(S', S''), a)$ должен быть таков, чтобы при разных значениях $\rho(S', S'')$ получались линейно-независимые функции от $a$. Для конкретной функции $f$ такая проверка, как правило, оказывается весьма несложной.

Рассмотрим, например, в качестве $f$ функцию $\exp(-a\rho)$. Любой конечный набор функций от $a$ вида $\{\exp(-a\rho_1), \ldots, \exp(-a\rho_n)\}$ линейно-независим. Действительно, пусть

$$\exists\bar{s}\forall a \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \exp(-a\rho_i)=0\right), \qquad \bar{s}\in R^n, \quad a\in R^1.$$

Положим $\rho_{i_0}=\min\limits_i \rho_i$. Тогда

$$\forall a \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \exp[-a(\rho_i-\rho_{i_0})]=0\right), \qquad a\in R^1.$$

При $a\to\infty$ имеем $s_{i_0}=0$. Далее таким же образом последовательно получаем равенство нулю всех остальных коэффициентов, что и доказывает линейную независимость функций множества $\{\exp(-a\rho_1),\ldots,\exp(-a\rho_n)\}$.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Ю. И. Журавлёву, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

*Поступила в редакцию 22.01.1979*

### Цитированная литература

1. *Ю. И. Журавлёв.* Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификации. Докл. АН СССР, 1976, 231, № 3, 532—535.
2. *Ю. И. Журавлёв.* Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов. I. Кибернетика, 1977, № 4, 14–21.
3. *Ю. И. Журавлёв.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 33. М., «Наука», 1978, 5–68.
4. *М. А. Айзерман, Э. М. Браверман, Л. И. Розоноэр.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М., «Наука», 1970.
5. *И. А. Чегис, С. В. Яблонский.* Логические способы контроля электрических схем. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, 51, 270–360.