ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2004, том 394, № 4, с. 1–3

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.68: 681513.7

КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ МОДЕЛЕЙ АЛГОРИТМОВ И СЕМЕЙСТВ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ С ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2004 г. Член-корреспондент РАН К. В. Рудаков, Ю. В. Чехович

Поступило 22.10.2003 г.

В контексте алгебраического подхода к синтезу корректных алгоритмов распознавания образов, классификации и прогнозирования [1, 2] рассматривается класс задач, характеризуемый наличием явным образом заданных теоретико-множественных ограничений на множество допустимых ответов алгоритма.

В соответствии с [3] опишем задачу классификации в виде задачи синтеза алгоритма преобразования информации. Будем рассматривать некоторое множество $\mathcal{S} = \{S\}$, элементы которого называются объектами. Описания объектов $D(S)$ образуют пространство начальных информаций $\mathfrak{I}_i\,\{D(S)|\,S \in \mathcal{S}\}$, элементы которого обозначаются I_i, так что $\mathfrak{I}_i = \{I_i\}$.

Рассматриваемая задача синтеза алгоритмов A, реализующих отображения из пространства начальных информаций $\mathfrak{I}i$ в пространство финальных информаций $\mathfrak{I}_f = \{I_f\}$. Далее мы не будем различать алгоритмы и реализуемые ими отображения. Решения синтезируется в рамках модели алгоритмов $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \{A|A\colon \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_f\}$. Задачи определяются структурными информациями I_s, выделяющими из $\mathfrak{M}$ подмножества допустимых отображений, обозначаемые $\mathfrak{M}[I_s]$. Любой алгоритм A, реализующий произвольное допустимое отображение, называется корректным для задачи, определяемой структурой информацией I_s, и является ее решением.

Конструкции алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов основаны на использовании промежуточного по отношению к $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_f$ пространства оценок $\mathfrak{I}_e = \{I_e\}$. При этом корректные алгоритмы синтезируются на базе эвристических информационных моделей, т.е. параметрических семейств отображений из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_f$, представляющих собой специальные суперпозиции алгоритмических операторов (отображений из $\mathfrak{I}_i$ и $\mathfrak{I}_e$) и решающих правил (отображений из $\mathfrak{I}_e^p$ в $\mathfrak{I}_f$, p – арность решающего правила).

Напомним, что при произвольных множествах $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}'$ и произвольных отображениях u из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ и u' из $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{V}'$ произведением $u \times u'$ называется отображение v из $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ в $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$такое, что для любой пары (U, U') из $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ выполнено равенство $v(U, U') = (u(U), u(U'))$ [4]. Для произвольного отображения u из $\mathcal{U}^p$ в $\mathcal{V}$ при $p \ge 1$ диагонализацией u_Δ будем называть отображение из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ такое, что для любого U из $\mathcal{U}$ выполнено равенство $u_\Delta(U) = u(U, U, \ldots, U)$.

Модели $\mathfrak{M}$ определяются моделями алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$, где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{M}_* = \{B|\,B\colon \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e\}$, и решающих правил $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup\limits_{p=0}^{\infty}\{C|\,C\colon \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f\}$, следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \{C \circ (B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_p)_\Delta | \times \times C \in \mathfrak{M}^1, B_1, B_2, \ldots B_p \in \mathfrak{M}^0\}.$$

Для синтеза корректных алгоритмов используются также множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операций, определенных над множеством отображений $\mathfrak{M}_*$. Корректирующие операции F, рассматриваемые в настоящей работе, индуцируются операциями F над пространством оценок $\mathfrak{I}_e$:

$$F(B_1, B_2, \ldots B_p)(I_i) \stackrel{\text{def}}{=} F(B_1(I_i), B_2(I_i), \ldots, B_p(I_i)),$$

где I_i пробегает пространство начальных информаций $\mathfrak{I}_i$, алгоритмические операторы $B_1, B_2, \ldots, B_p$ – произвольные отображения из $\mathfrak{I}_i$ в $\mathfrak{I}_e$ и F – операция над $\mathfrak{I}_e$.

Схема построения модели алгоритмов $\mathfrak{M}$ представлена на следующей коммутативной диаграмме [3]:

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук, Москва

$$\begin{array}{ccc} \Im_i & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \Im_f \\ \mathfrak{M}^0\downarrow & & \uparrow\mathfrak{M}^1. \\ \Im_e^p & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \Im_e \end{array}$$

Для рассматриваемых в настоящем сообщении задач с теоретико-множественными ограничениями модели алгоритмов $\mathfrak{M}$ строятся на базе параметрических семейств моделей алгоритмических операторов и корректирующих операций. При этом предполагается, что $\mathfrak{M}^0 = \{\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega} | \lambda \in L, \omega \in W(\lambda)\}$ и $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}^\lambda | \lambda \in L\}$, где $W(\lambda)$ и L – множества структурных индексов. Модель $\mathfrak{M}$ строится в виде

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}),$$

где при всех $\lambda \in L$ и $\omega \in W(\lambda)$ выполнено равенство

$$\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}) = \{C \circ F_1((B_1^1, B_2^1, \dots B^1_{r(1)}) \times$$

$$\times \dots \times F_p(B_1^p, B_2^p, \dots B^p_{r(1)}))_\Delta \big| \, C \in \mathfrak{M}^1,$$

$$(F_1, F_2, \dots F_p) \in (\mathfrak{F}^\lambda)^p, B_1^1, B_2^1, \dots B^1_{r(1)} \in \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega(1)},$$

$$\dots, B^p_{r(p)}, \dots, B^p_{r(p)} \in \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega(p)}\}.$$

Для формализации понятия теоретико-множественных ограничений введем набор $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$ предикатов $\pi_i\colon \Im_i \times \Im_f \to \{0, 1\}$.

Пусть I_i – произвольный элемент пространства $\Im_i$. Положим $\Pi(I_i) = \left\{ I_f | I_f \in \Im_f, \underset{1,\dots,k}{\forall} j : \pi_i(I_i, I_f) = 1 \right\}$ – множество всех допустимых значений корректных алгоритмов для начальной информации I_i.

Набор Π будем называть покрывающим, если для любого I_1 из $\Im_i$ выполнено условие $\Pi(I_i) \neq \varnothing$, т.е. когда для любого элемента существует хотя бы одно допустимое значение.

В дальнейшем будем рассматривать произвольный фиксированный покрывающий набор предикатов Π.

Множество натуральных числе будем обозначать N и положим $N_0 = N \cup \{0\}$.

Определение 1. Множество

$$\mathrm{Prec} = \{((I_i^1, I_i^2, \dots, I_i^q), (I_f^1, I_f^2, \dots, I_f^q)) \big| \, q \in N,$$

$$(I_i^1, I_i^2, \dots, I_i^q) \in \Im^q, I_i^1 \neq I_i^k \quad \text{при} \quad j \neq k,$$

$$(I_f^1, I_f^2, \dots, I_f^q) \in \Im_f^q, I_f^j \in \Pi(I_i^j)$$

$$\text{при} \quad j = 1, 2, \dots, q\}$$

называется множеством набором допустимых прецедентов.

Для произвольного множества $\Im$ и $q \in N$ будем обозначать символом $(\Im^q)^*$ множество $\{(I^1, I^2, \dots, I^q) | (I^1, I^2, \dots, I^q) \in \Im^q, I^k \neq I^i$ при $k \neq j\}$.

Отметим, что $\mathrm{Prec} = \bigcup_{q \in N} \bigcup_{(I_i^1, \dots, I_i^q) \in (\Im_i^q)^*} \{(I_i^1, I_i^2, \dots, I_i^q), \Pi(I_i^1) \times \Pi(I_i^2) \times \dots \times \Pi(I_i^q)\}$.

Определение 2. Модель $\mathfrak{M}$ называется Π-полной, если выполнены условия (1) и (2):

$$\underset{\Im_i}{\forall} I_i\colon \mathfrak{M}(I_i) = \{A(I_i) | A \in \mathfrak{M}\} \subseteq \Pi(I_i); \tag{1}$$

$$\underset{P_{rec}}{\forall}((I_i^1, I_i^2, \dots, I_i^q), (I_f^1, I_f^2, \dots, I_f^q)) \times$$

$$\times \underset{\mathfrak{M}}{\exists} A\colon \underset{\{1,\dots,q\}}{\forall} j\colon A(I_i^j) = I_f^j. \tag{2}$$

Отметим, что условия (1) и (2) независимы. Кроме того, при выполнении условия (2) условие (1) эквивалентно условию

$$\underset{\Im_i}{\forall} I_i\colon \mathfrak{M}(I_i) = \{A(I_i) | A \in \mathfrak{M}\} = \Pi(I_i). \tag{1'}$$

Целью анализа проблемы полноты в рамках алгебраического подхода является установление условий, которым должны удовлетворять семейства $\mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^0$, чтобы в совокупности обеспечивать полноту модели $\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega})$.

Нетрудно видеть, что излучение проблемы полноты модели $\mathfrak{M}$ можно проводить в предположении, что q равно 1. Действительно, для этого достаточно перейти от исходного пространства начальных информаций $\Im_i$ к $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_i^q$, от исходного пространства финальных информаций $\Im_f$ и $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_f^q$, от исходного пространства оценок $\Im_e$ к $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_e^q$ и от исходных отображений, скажем, $A \in \mathfrak{M}$, $A\colon \Im_i \to \Im_f$ к $A^*\colon \bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_i^q \to \bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_f^q$, где $A^*(I_i^1, I_i^2, \dots, I_i^q) \overset{\mathrm{def}}{=} (A(I_i^1), A(I_i^2), \dots, A(I_i^q))$.

Определение 3. Семейство решающих привил $\mathfrak{M}^1$ называется Π-полным, если существуют модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ такие, что модель $\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega})$ является Π-полной.

Рассмотрим непустое семейство решающих правил $\mathfrak{M}^1 = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{M}_p^1$, где при любом p из N_0 выполнено соотношение $\mathfrak{M}_p^1 \subseteq \{C|\ C: \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_f\}$. При этом для любого $X \subseteq \mathfrak{I}_e$ оказывается выполненным условие

$$\mathfrak{M}^1(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{M}_p^1(X^p) \bigcup_{p=0}^{\infty} \bigcup_{C \in \mathfrak{M}_p^1} \bigcup_{\bar{x} \in X^p} C(\bar{x}).$$

Определение 4. Пусть $p \in N_0$. Для произвольного I_i из $\mathfrak{I}_i$ множеством $\alpha_p(\mathfrak{M}^1, I_i)$ называется пересечение в p-й декартовой степени пространства оценок $\mathfrak{I}_e$ всех полных прообразов множества $\Pi(I_i)$ относительно решающих правил арности p:

$$\alpha_p(\mathfrak{M}^1, I_i) = \bigcap_{C \in \mathfrak{M}_p^1} C^{-1}(\Pi(I_i)) = \\ = \{\bar{I}_e | \bar{I}_e \in \mathfrak{I}_e^p,\quad \forall_{\mathfrak{M}_p^1} C: C(\bar{I}_e) \in \Pi(I_i)\}. \tag{3}$$

Определение 5. Пусть $p \in N_0$. Для семейства $\mathfrak{M}^1$ и элемента I_i пространства $\mathfrak{I}_i$ подмножество $X(I_i)$ пространства оценок $\mathfrak{I}_e$ называется допустимой p-проекцией, если выполнено условия (4) и (5):

$$(X(I_i))^p \subseteq \alpha_p(\mathfrak{M}^1, I_i), \tag{4}$$

$$\neg \exists Z \subseteq \mathfrak{I}_e: (X(I_i) \subset Z) \wedge (Z^p \subseteq \alpha_p(\mathfrak{M}^1, I_i)). \tag{5}$$

Множество всех допустимых p-проекций для семейства $\mathfrak{M}^1$ и элемента I_i обозначим $\xi_p(\mathfrak{M}^1, I_i)$.

Для произвольного I_i из $\mathfrak{I}_i$ введем множество $\Phi(\mathfrak{M}^1, I_i)$ функций выбора допустимых проекций:

$$\Phi(\mathfrak{M}^1, I_i) = \{\varphi | \varphi: N_0 \to B(\mathfrak{I}_e), \\ \forall_{N_0} p: ((\mathfrak{M}_p^1 = \emptyset) \Rightarrow (\varphi(p) = \mathfrak{I}_e)) \wedge ((\mathfrak{M}_p^1 \neq \emptyset) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\varphi(p) \in \xi_p(\mathfrak{M}^1, I_i)))\},$$

где $B(\mathfrak{I}_e)$ – множество всех подмножеств множества $\mathfrak{I}_e$.

Для каждой функции выбора допустимых проекций φ из $\Phi(\mathfrak{M}^1, I_i))$ положим $X(I_i, \varphi) = \bigcap_{p=0}^{\infty} \varphi(p)$. Отметим, что $\mathfrak{M}^1(X(I_i, \varphi)) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcup_{C \in \mathfrak{M}_r^1} C\left(\left(\bigcap_{p=0}^{\infty} \varphi(p)\right)^r\right)$.

Пусть $\Phi'(\mathfrak{M}^1, I_i) = \{\varphi |\ \varphi \in \Phi(\mathfrak{M}^1, I_i), X(I_i, \varphi) \neq \emptyset\}$.

Т е о р е м а 1. *При всех* I_i *из* $\mathfrak{I}_i$ *выполнено соотношение* (6):

$$\bigcup_{\varphi \in \Phi'(\mathfrak{M}^1, I_i)} \mathfrak{M}^1(X(I_i, \varphi)) \subseteq \Pi(I_i). \tag{6}$$

Т е о р е м а 2 (критерий П-полноты для семейств решающих правил). *Для* П-*полноты семейства решающих правил* $\mathfrak{M}^1$ *необходимо и достаточно, чтобы при любом* I_i *из* $\mathfrak{I}_i$ *было выполнено условие*

$$\bigcup_{\varphi \in \Phi'(\mathfrak{M}^1, I_i)} \mathfrak{M}^1(X(I_i, \varphi)) = \Pi(I_i). \tag{7}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02–01–00326, 03–01–06459).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев Ю.И.* // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5–17; № 6. С. 21–27; 1978. № 2. С. 35–43.
2. *Журавлев Ю.И.* // Пробл. кибернетики. 1978. В. 33. С. 5–68.
3. *Рудаков К.В.* // Кибернетика. 187. № 2. С. 30–35; № 3. С. 106–109; № 4. С. 73–77.
4. *Бурбаки Р.* Теория множеств. М.: Мир, 456 с.