ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 388, № 1, с. 1–4

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.68 : 681.513.7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА ОБУЧАЕМЫХ АЛГОРИТМОВ ВЫДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ

© 2003 г. Член-корреспондент РАН К. В. Рудаков, Ю. В. Чехович

Поступило 18.09.2002 г.

В качестве необходимой для применения алгебраического подхода [1–4] формализации проблемы синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов предлагается следующая конструкция.

Рассматривается множество конечных плоских конфигураций вида $\bar{S}^d = (S^1, S^2, \ldots, S^d) = ((t^1, v^1), (t^2, v^2), \ldots, (t^d, v^d))$, где $t \in R$, $v \in R$, $t^1 \le t^2 \le \ldots \le t^d$, причем при $t^i = t^{i+1}$ выполнено $v^i < v^{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$, $d \ge 1$. При использовании для конечных плоских конфигураций нижних индексов α везде далее считается, что $\bar{S}_\alpha^{d(\alpha)} = (S_\alpha^1, S_\alpha^2, \ldots, S_\alpha^{d(\alpha)})$.

Множество всех d-точечных плоских конфигураций обозначим $C^d = \{\bar{S}^d\}$. Определим также множество всех конфигураций $C = \bigcup_{d=1}^{\infty} C^d$.

Конфигурация $\bar{S}_1^d$ и $\bar{S}_2^d$ называются сдвиг-эквивалентными, если существует такой вектор $p^* = (t^*, v^*) \in R^2$, что $S_1^i = S_2^i + p^* = (t_2^i + t^*, v_2^i + v^*)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, d$, где $S_1^i \in \bar{S}_1^d$, $S_2^i \in \bar{S}_2^d$. В этом случае используется запись $\bar{S}_1^d \cong \bar{S}_2^d$.

Словарем разметки или множеством меток называется конечное множество $M = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\}$, $r \ge 1$. Например, словарь разметки может выглядеть следующим образом: $M = \{\max, \min, \mathrm{non}\}$.

Множество $M_\Delta = M \cup \{\Delta\}$, $\Delta \notin M$, где Δ – специальная метка, интерпретируемая как “не размечено”, называется расширенным множеством меток или расширенным словарем разметки.

При фиксированном множестве меток M и соответственно расширенном множестве меток M_Δ разметкой длины d называется любая последовательность $\bar{\mu}^d = (\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^d)$ длины $d \ge 1$, если $\mu^i \in M$, или частичной разметкой длины d, если $\mu^i \in M_\Delta$.

Отметим, что именно понятие частично размеченных конфигураций дает возможность формулировать задачу обучения как задачу синтеза корректного алгоритма разметки конфигураций.

Множество всех различных разметок длины d обозначим M^d, а множество всех различных частичных разметок длины d соответственно M_Δ^d. Положим также, что $\mathfrak{M} = \bigcup_{d=1}^{\infty} M^d$ и $\mathfrak{M}_\Delta = \bigcup_{d=1}^{\infty} M_\Delta^d$ – множества всех различных разметок.

Размеченной конфигурацией называется пара $(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d)$, где $\bar{S}^d \cong C^d$, $\bar{\mu}^d \in M$. При этом $\bar{\mu}^d$ называется разметкой или полной разметкой конфигурации $\bar{S}^d$. При $\bar{\mu}^d \in M_\Delta^d$ пара $(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d)$ называется частично размеченной конфигурацией, а разметка $\bar{\mu}^d$ при этом называется частичной разметкой конфигурации $\bar{S}^d$.

Разметка $\bar{\mu}^d = (\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^d)$ (полная или частичная) конфигурации $\bar{S}^d$ называется продолжением разметки $\bar{\mu}_0^d = (\mu_0^1, \mu_0^2, \ldots, \mu_0^d)$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, d$ выполнено условие $(\mu_0^i = \mu^i) \vee (\mu_0^i = \Delta)$.

Введем определение алгоритма выделения трендов как алгоритма разметки конечных плоских конфигураций.

Определение 1. Алгоритмом разметки называется всякий алгоритм A, реализующий отображение $A\colon C \to \mathfrak{M}$ такое, что для любого $d \ge 1$ верно $A(\bar{S}^d) = \bar{\mu}^d$, где $\bar{S}^d \in C^d$, $\bar{\mu}^d \in M^d$.

Существенной особенностью данной задачи по сравнению с общими задачи распознавания и классификации, для которых изначально был разработан алгебраический подход, является наличие дополнительных условий (правил), связывающих геометрические характеристики конфигураций с возможными “разумными” разметками [5].

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук, Москва

Аксиомами или правилами разметки называется набор $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ эффективно вычислимых предикатов

$$\pi_i\colon \bigcup_{d=1}^{\infty} (C^d \times M^d) \to \{0, 1\}.$$

Тот же символ Π будет использоваться и для обозначения конъюнкции предикатов π_i:

$$\Pi = \bigwedge_{i=1,\ldots,l} \pi_i, \quad \Pi\colon \bigcup_{d=1}^{\infty} (C^d \times M^d) \to \{0, 1\}.$$

Пусть фиксирована система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$. Разметка $\bar{\mu}^d$ называется подходящей для $\bar{S}^d$, если $\Pi(\bar{S}^d, \bar{\mu}^d) = 1$. Частичная разметка $\bar{\mu}_0^d \in M_\Delta^d$ называется подходящей для $\bar{S}^d$ тогда и только тогда, когда существует полная подходящая разметка $\bar{\mu}^d$, являющаяся продолжением $\bar{\mu}_0^d$.

Система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ называется сдвиг-устойчивой тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall_C \bar{S}_1^d, \bar{S}_2^d\colon (\bar{S}_1^d \cong \bar{S}_2^d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall_A \bar{\mu}^d\colon (\Pi(\bar{S}_1^d, \bar{\mu}^d) = 1) \Leftrightarrow (\Pi(\bar{S}_2^d, \bar{\mu}^d) = 1).$$

Алгоритм разметки A называется сдвиг-устойчивым тогда и только тогда, когда любые две сдвиг-эквивалентные конфигурации алгоритм размечает одинаково:

$$\forall_C \bar{S}_1^d, \bar{S}_1^d\colon (\bar{S}_1^d \cong \bar{S}_2^d) \Rightarrow A(\bar{S}_1^d) = A(\bar{S}_2^d).$$

Пусть фиксирована система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$. Тогда алгоритмы, дающие только подходящие разметки для всех $\bar{S}^d$ из C, называются подходящими алгоритмами.

Далее будем считать, что заданы словарь разметки M и сдвиг-устойчивая система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$, и будем рассматривать только сдвиг-устойчивые подходящие алгоритмы.

Произвольное конечное множество пар вида

$$H = \{(\bar{S}_i^{d(i)}, \bar{\mu}_i^{d(i)}) \mid \bar{S}^{d(i)} \in C^{d(i)};\ \bar{\mu}_i^{d(i)} \in M_\Delta^{d(i)};\ i = 1, 2, \ldots, q\}$$

называется набором прецедентов.

Рассмотрим набор, который составляют сдвиг-эквивалентные конфигурации $\bar{L} = (\bar{S}_1^d, \bar{S}_2^d, \ldots, \bar{S}_l^d)$, которым сопоставлены частичные разметки $\bar{L}^\mu = (\bar{\mu}_1^d, \bar{\mu}_2^d, \ldots, \bar{\mu}_l^d)$.

Определение 2. Набор $\bar{L}$ частично размеченных сдвиг-эквивалентных конфигураций длины d называется противоречивым тогда и только тогда, когда для любой полной разметки $\bar{\mu}_*^d = (\mu_*^1, \mu_*^2, \ldots, \mu_*^d) \in M^d$ верно, что из того, что разметка для всех конфигураций из набора является подходящей, следует, что у каких-либо двух эквивалентных конфигураций две размеченные точки с одинаковым номером имеют различную разметку, т.е.

$$\left(\forall_{M^d} \bar{\mu}_*^d \ \exists|_{\{1, 2, \ldots, l\}} \alpha\colon \Pi(\bar{S}_\alpha^d, \bar{\mu}_*^d) = 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists|_{\{1, 2, \ldots, d\}} i \ \exists|_{\{1, 2, \ldots, l\}} \beta\colon (\mu_\beta^i \neq \mu_*^i) \wedge (\mu_\beta^i \neq \Delta).$$

Набор H, который не содержит противоречивых поднаборов сдвиг-эквивалентных конфигураций, называется непротиворечивым.

Отметим также, что определение применимо и для случая частичных разметок одной конфигурации $\bar{S}_1^d = \bar{S}_2^d = \ldots = \bar{S}_l^d$, т.е. для случая, когда поднабор содержит несколько различных частичных разметок одной и той же конфигурации.

Далее будем считать, что зафиксирован некоторый набор прецедентов

$$H = \{(\bar{S}_i^{d(i)}, \bar{\mu}_i^{d(i)}) \mid \bar{S}^{d(i)} \in C^{d(i)};\ \bar{\mu}_i^{d(i)} \in M_\Delta^{d(i)};\ i = 1, 2, \ldots, q\}.$$

Задача Z выделения трендов заключается в синтезе подходящего алгоритма A такого, что при всех $i = 1, 2, \ldots, q$ полная разметка $A(\bar{S}_i^{d(i)})$ является продолжением разметки $\bar{\mu}_i^{d(i)}$, или, иначе говоря, такого, что выполнено условие:

$$\forall_{(1, 2, \ldots, d(i))} j(\mu_i^j \in \bar{\mu}_i^{d(i)}) \Rightarrow ((\mu_i^j \neq \Delta) \Rightarrow (\mu_i^j = \gamma_i^j)), \quad (1)$$

где $\bar{\gamma}_i^{d(i)} = A(\bar{S}_i^{d(i)})$.

Отметим, что из того, что алгоритм A подходящий, следует, что для всех $\bar{\gamma}_i^{d(i)} = A(\bar{S}_i^{d(i)})$ выполнено условие $\Pi(\bar{S}_i^{d(i)}, \bar{\gamma}_i^{d(i)}) = 1$.

Алгоритм A, удовлетворяющий условию (1), называется корректным для задачи Z.

Определение 3. Задача выделения трендов Z называется разрешимой тогда и только тогда, когда для нее существует подходящий корректный алгоритм A.

Теорема 1 (критерий разрешимости). *Задача Z является разрешимой тогда и только тогда, когда набор прецедентов H является непротиворечивым.*

Определение 4. Задача Z называется регулярной тогда и только тогда, когда Z разрешима при любых подходящих частичных разметках $\bar{\mu}_i^{d(i)} \in M_\Delta^{d(i)}$ всех конфигураций $\bar{S}_i^{d(i)}$ из H.

Теорема 2 (критерий регулярности). *Разрешимая задача Z является регулярной тогда и только тогда, когда для любого поднабора* $\tilde{H} = \{(\bar{S}_p^{d(p)}, \bar{\mu}_p^{d(p)}) | p \in \{l_1, l_2, \ldots, l_u\} \subseteq \{1, 2, \ldots, q\}, u > 1\}$ *набора H, такого, что для любых* $i, j \in \{l_1, l_2, \ldots, l_u\}$ *выполнено* $\bar{S}_i^{d(i)} \cong \bar{S}_j^{d(j)}$, *из правил разметки следуют существование и единственность подходящей разметки конфигураций* $\bar{S}_p^{d(p)}$, $p \in \{l_1, l_2, \ldots, l_u\}$.

Дополнительной важной особенностью рассматриваемой задачи является необходимость формализации и использования свойств локальности [6].

Подконфигурацией $P(\bar{S}^d)$ конфигурации $\bar{S}^d$ называется любой подмножество точек из $\bar{S}^d$: $P(\bar{S}^d) \subseteq \bar{S}^d$. Подконфигурация $P_0(\bar{S}^d)$ конфигурации $\bar{S}^d$ называется связной, если $P_0(\bar{S}^d) = (S^\alpha, S^{\alpha+1}, \ldots, S^{\beta-1}, S^\beta)$, где $1 \le \alpha \le \beta \le d$.

Окрестностью точки $S^i \in \bar{S}^d$ называется пара, содержащая собственно точку S^i и некоторую связную подконфигурацию $P_0(\bar{S}^d)$ конфигурации $\bar{S}^d$, включающую эту точку:

$$O(S^i, S^d) = (S^i, P_0(\bar{S}^d)) = (S^i, (S^\alpha, S^{\alpha+1}, \ldots, S^\beta)),$$
$$\text{где} \quad 1 \le \alpha \le i \le \beta \le d.$$

Точка S^i называется опорной точкой окрестности $O(S^i, \bar{S}^d)$.

На конфигурации $\bar{S}^d$ задана система окрестностей $O(\bar{S}^d)$, если каждой точке $S^i \in \bar{S}^d$ поставлена в соответствие некоторая ее окрестность $O(S^i, \bar{S}^d)$. Система окрестностей Ω задана на C, если для каждой конфигурации из C задана система окрестностей.

Система окрестностей $O(\bar{S}^d)$ конфигурации $\bar{S}^d$ называется тривиальной, если окрестность каждой точки совпадает со всей конфигурацией, т.е.

$$\forall_{\bar{S}^d} S^i: O(S^i, \bar{S}^d) = \bar{S}^d.$$

Система окрестностей Ω, заданная на C, называется тривиальной тогда и только тогда, когда тривиальной является система окрестностей каждой конфигурации из C, т.е.

$$\forall_C \bar{S}^d \forall_{\bar{S}^d} S^i: O(S^i, \bar{S}^d) = \bar{S}^d.$$

Пусть задана нетривиальная система окрестностей Ω на C. Аксиома $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ называется Ω-локальной тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\forall_C \bar{S}_1^{d(1)}, \bar{S}_2^{d(2)} \forall_{\bar{S}_1^{d(1)}} S_1^\alpha \forall_{\bar{S}_2^{d(2)}} S_2^\beta:$$
$$(O(S_1^\alpha, \bar{S}_1^{d(1)}) \cong O(S_2^\beta, \bar{S}_2^{d(2)})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall_M \bar{\mu}^b: \pi_i(S_1^\alpha, \bar{\mu}^b) = \pi_i(S_2^\beta, \bar{\mu}^b)),$$

где $b = \left|O(S_1^\alpha, \bar{S}_1^{d(1)})\right| = \left|O(S_2^\alpha, \bar{S}_2^{d(2)})\right|$

Систему аксиом $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$ называется Ω-локальной тогда и только тогда, когда Ω-локальной является каждая аксиома из Π.

Пусть на C задана система окрестностей Ω и сдвиг-устойчивая Ω-локальная система аксиом $\Pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k\}$.

Определение 5. Алгоритм разметки A называется Ω-локальным тогда и только тогда, когда при любых конфигурациях $\bar{S}^{d(\alpha)}, \bar{S}^{d(\beta)} \in C$ при всех $\alpha = 1, 2, \ldots, d(\alpha)$ и $\beta = 1, 2, \ldots, d(\beta)$ выполнено условие

$$(O(S^\alpha, \bar{S}^{d(\alpha)}) \cong O(S^\beta, \bar{S}^{d(\beta)})) \Rightarrow \mu^\alpha = \mu^\beta,$$

где $\mu^\alpha \in \bar{\mu}^{d(\alpha)} = A(\bar{S}^{d(\alpha)})$ и $\mu^\beta \in \bar{\mu}^{d(\beta)} = A(\bar{S}^{d(\beta)})$.

Отметим, что по своему устройству окрестность отличается от конфигурации. По сути дела, окрестность – это пунктированная конфигурация, т.е. конфигурация, в которой выделена опорная точка. Поэтому для окрестностей необходимо собственное определение сдвиг-эквивалентности: окрестности $O(S_1^\alpha, \bar{S}_1^d) = (S_1^\alpha, (S_1^{\alpha-k}, S_1^{\alpha-k+1}, \ldots, S_1^\alpha, \ldots, S_1^{\alpha+l}))$ и $O(S_2^\beta, \bar{S}_2^d) = (S_2^\beta,$

$(S_2^{\beta-k}, \ldots, S_2^{\beta}, \ldots, S_2^{\beta+l})$) где $k \geq 0$ и $l \geq 0$, называются сдвиг-эквивалентными, если существует такой вектор $p^* = = (t^*, v^*)$, что для всех $m \in \{-k, -k+1, \ldots, l\}$ выполнено условие $S_1^{\alpha+m} = S_2^{\beta+m} + p^*$.

Отметим, что при $m = 0$ из сдвиг-эквивалентности окрестностей следует выполнение условия $S_1^{\alpha} = = S_2^{\beta} + p^*$.

Определение 6. Задача Z_l называется локально разрешимой, если для нее существует подходящий корректный локальный алгоритм A_l.

Множество частично размеченных окрестностей точек из конфигураций набора прецедентов обозначим $O_H = \{O(S_i^j, (\bar{S}_i^{d(i)}, \bar{\mu}_i^{d(i)}))| \bar{S}_i^{d(i)} \in H, \bar{\mu}_i^{d(i)} \in H\}$.

Теорема 3 (критерий локальной разрешимости). *Задача является локально разрешимой тогда и только тогда, когда множество частично размеченных окрестностей O_H, соответствующее набору прецедентов H, является непротиворечивым набором.*

Определение 7. Задача Z_l называется локально регулярной, если она локально разрешима при любых подходящих частичных разметках $\bar{\mu}_i^{d(i)} \in M_{\Delta}^{d(i)}$ всех конфигураций $\bar{S}_i^{d(i)}$ из H.

Теорема 4 (критерий локальной регулярности). *Локально разрешимая задача является локально регулярной тогда и только тогда, когда для любого поднабора сдвиг-эквивалентных окрестностей точек из набора прецедентов из правил разметки следуют существование и единственность подходящей разметки.*

Отметим, что введенный комплекс понятий и полученные результаты позволяют также решать важную с прикладной точки зрения задачу поиска минимальной системы окрестностей по заданному набору прецедентов H.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02–01–00326, 02–01–06213).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев Ю.И.* // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5–17; № 6. С. 21–27; 1978. № 2. С. 35–43.
2. *Журавлев Ю.И.* // Пробл. кибернетики. 1978. В. 33. С. 5–68.
3. *Журавлев Ю.И., Рудаков К.В.* Проблемы прикладной математики и информатики. М.: Наука, 1987. С. 187–198.
4. *Рудаков К.В.* Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 176–201.
5. *Рудаков К.В., Чехович Ю.В.* // Прикл. математика и информатика. 2001. № 8. С. 97–113.
6. *Чехович Ю.В.* // Искусств. интеллект. 2002. № 2. С. 298–305.