(5), принадлежащий характеристическому значению λ_s, $s \in N_+$, то вектор $(\overset{s}{\omega}_n)_{n\in J}$, где $\overset{s}{\omega}_n \equiv 0$, когда $|n| > s$, будем считать нормированным: $\| (\overset{s}{\omega}_n)_{n\in J} \| = 1$.

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_s = \lambda$ *и последовательность* $\left\{ (\overset{s}{\omega}_n)_{n\in J} \right\}_s$ *слабо сходится в пространстве* $l_0(C)$, *то она сходится по норме и предельный вектор является собственным вектором системы уравнений* (1), *принадлежащим к характеристическому значению* λ.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
11 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Р.А. Кордзадзе*, ДАН, т. 231, № 6 (1976). [2] *Р.А. Кордзадзе*, ДАН, т. 233, № 2 (1977). [3] *Р.А. Кордзадзе*, Комплексный анализ и его приложения, Сб. статей, посвящен. акад. И.Н. Векуа и его семидесятилетию, М., 1978. [4] *Р.А. Кордзадзе*, ДАН, т. 244, № 2 (1979). [5] *Р.А. Кордзадзе*, Тр. ин-та прикл.матем. ТГУ, т. 5–6, Тбилиси, (1978).

УДК 512.9

МАТЕМАТИКА

В.Л. МАТРОСОВ

КОРРЕКТНЫЕ АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННОЙ ЕМКОСТИ НАД МНОЖЕСТВАМИ НЕКОРРЕКТНЫХ АЛГОРИТМОВ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 14 II 1980)

В работах ([1],[2]) была доказана корректность линейных или алгебраических замыканий моделей алгоритмов распознавания с кусочно-линейными разделяющими поверхностями и вычисления оценок. Однако, так как данные замыкания содержали бесконечные множества алгоритмов и представляли собой типичные теоремы существования, они не позволяли реально построить алгоритм, корректный для данной задачи, если ее информационная матрица неизвестна. Проблема была решена в ([3]) посредством эффективного выделения конечного множества алгоритмов (в замыкании), среди которых находится алгоритм, корректный для данной задачи $\widetilde{Z} = \langle I_0, (S^1, S^2, \ldots, S^q)\rangle$, где I_0 — начальная информация, $\widetilde{S}^q = (S^1, S^2, \ldots, S^q)$ — выборка из множества допустимых объектов. Указанный алгоритм задается параметрически $A = R \circ r(\widetilde{C})$, где R — оператор,

$$(1) \qquad R = (c_1 + c_2) \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{l} \beta_{ij} A^k(i, j),$$

определенный в ([2]); $\beta_{ij} \in \{0, 1\}$, $r(\widetilde{C})$ — некоторое фиксированное решающее правило.

В работе ([4]) была введена мера разнообразия класса $\{A(\alpha)\}$ параметрических (по α) алгоритмов (решающих правил). Данной мерой служит емкость класса $\{A(\alpha)\}$, равная максимальному числу h допустимых объектов (векторов) $S^1, S^2, \ldots, S^h$ из рассматриваемого пространства X, которые алгоритмами из $\{A(\alpha)\}$ делятся на две группы всеми способами, если такое h существует, и является бесконечной в противном случае. Из результатов В.И. Вапника и А.Я.Червоненкиса ([4]) следует, что если емкость класса $\{A(\alpha)\}$ ограничена и в нем существует алгоритм $A(\alpha^*)$, корректный для данной задачи Z, то может быть указана процедура, позволяющая выбрать алгоритм $A(\alpha_{\text{д}})$, близкий (по функционалу качества) к $A(\alpha^*)$.

Ю.И. Журавлев поставил задачу о выделении в классе параметрических алгоритмов $\{A\}$ $A = R(\tilde{\varepsilon}, \tilde{p}, \tilde{\gamma}, \tilde{x}, \tilde{\beta}, k) \circ r(\tilde{c})\}$ максимального подкласса, имеющего ограниченную емкость. Основной результат нашей статьи состоит в том, что искомый класс алгоритмов в точности совпадает со всем классом $\{A\}$.

Сохраним обозначения, принятые в работах ([2],[3]). Пусть $I_0' = \{S_1, \ldots, S_m\}$ – обучающая выборка из начальной информации I_0. Без ограничения общности будем полагать, что $\tilde{K}_J = \{S_1, S_2, \ldots, S_{m_1}\}$ и его дополнение в I_0' $\widetilde{CK}_J = \{S_{m_1+1}, \ldots$ $\ldots, S_m\}$, $m_1 = 1, 2, \ldots, m$.

Осуществим ряд вспомогательных построений. Пусть дана произвольная выборка допустимых объектов $\tilde{S}^\delta = (S^1, \ldots, S^\delta)$. Относительно начальной информации I_0 выборка $\tilde{S}^\delta$ порождает два семейства перестановок упорядоченного набора $(1, 2, \ldots, \delta)$: первое из них состоит из $m_1 n$ элементов

$$(t_{r1}^1, t_{r2}^1, \ldots, t_{r\delta}^1), \quad (t_{r1}^2, t_{r2}^2, \ldots, t_{r\delta}^2), \ldots, (t_{r1}^{m_1}, t_{r2}^{m_1}, \ldots, t_{r\delta}^{m_1});$$
$$r = 1, 2, \ldots, n,$$

второе семейство состоит из $(m - m_1)n$ элементов

$$(\alpha_{r1}^1, \alpha_{r2}^1, \ldots, \alpha_{r\delta}^1), \quad (\alpha_{r1}^2, \alpha_{r2}^2, \ldots, \alpha_{r\delta}^2), \ldots, (\alpha_{r1}^{m-m_1}, \alpha_{r2}^{m-m_1}, \ldots, \alpha_{r\delta}^{m-m_1});$$
$$r = 1, 2, \ldots, n,$$

для которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&\rho(r, j, t_{r1}^j) \leqslant \rho(r, j, t_{r2}^j) \leqslant \ldots \leqslant \rho(r, j, t_{r\delta}^j), \quad j = 1, 2, \ldots, m_1;\\
&r = 1, 2, \ldots, n,\\
(2)\quad &\rho(r, m_1 + j, \alpha_{r1}^j) \leqslant \rho(r, m_1 + j, \alpha_{r2}^j) \leqslant \ldots \leqslant \rho(r, m_1 + j, \alpha_{r\delta}^j),\\
&j = 1, 2, \ldots, m - m_1; \quad r = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Выборку $\tilde{S}^\delta$ назовем выборкой общего типа, если все неравенства (2) являются строгими. Такая выборка уже однозначно порождает семейства перестановок. Рассмотрим матрицы размерности $n \times \delta$, строками которых являются указанные выше перестановки:

$$(3а)\quad \| t_{ri}^1 \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} t_{11}^1 \ t_{12}^1 \ldots t_{1\delta}^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_{n1}^1 \ t_{n2}^1 \ldots t_{n\delta}^1 \end{pmatrix}, \quad \| t_{ri}^2 \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} t_{11}^2 \ldots t_{1\delta}^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_{n1}^2 \ldots t_{n\delta}^2 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, \| t_{ri}^{m_1} \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} t_{11}^{m_1} \ldots t_{1\delta}^{m_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_{n_1}^{m_1} \ldots t_{n\delta}^{m_1} \end{pmatrix},$$

$$(3б)\quad \| \alpha_{ri}^1 \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1 \ \alpha_{12}^1 \ldots \alpha_{1\delta}^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}^1 \ \alpha_{n2}^1 \ldots \alpha_{n\delta}^1 \end{pmatrix}, \quad \| \alpha_{ri}^2 \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^2 \ldots \alpha_{1\delta}^2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}^2 \ldots \alpha_{n\delta}^2 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, \| \alpha_{ri}^{m-m_1} \|_{n\times\delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{m-m_1} \ldots \alpha_{1\delta}^{m-m_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}^{m-m_1} \ldots \alpha_{n\delta}^{m-m_1} \end{pmatrix}.$$

Пусть даны произвольный набор $\widetilde{\epsilon}=(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ и опорное множество $\Omega=\{i\}$. Для всякого $r=1, 2, \ldots, n$ числу ϵ_r поставим в соответствие две последовательности чисел $K_{r1}, K_{r2}, \ldots, K_{rm_1}$ и $l_{r1}, l_{r2}, \ldots, l_{r(m-m_1)}$, определенные следующим образом: K_{rj} есть наибольшее число p, при котором выполняется неравенство $\rho(r, j, t^j_{rp}) \leqslant \epsilon_r$, и $K_{rj}=0$, если $\rho(r, j, t^j_{r1}) > \epsilon_n$, $j=1, \ldots, m_1$; l_{rj} есть наибольшее число q, при котором $\rho(r, m_1+j, \alpha^j_{rq}) > \epsilon_r$, и $l_{rj}=0$, если

$$\rho(r, m_1+j, \alpha^j_{r1}) \leqslant \epsilon_r, \quad j=1, 2, \ldots, m-m_1.$$

Определение. Множества последовательностей $\tau_1(\widetilde{\epsilon}, \Omega) = \{(K_{r1}, \ldots, K_{rm_1}) | \ r=1, 2, \ldots, n\}$ и $\tau_2(\widetilde{\epsilon}, \Omega)=\{(l_{r1}, \ldots, l_{r(m-m_1)}) | \ r=1, 2, \ldots, n\}$ будем называть $\widetilde{\epsilon}$-разбиением матриц перестановок (3а) и (3б).

Зафиксируем начальную информацию I_0 и выборку $\widetilde{S}^\delta$. Введем бинарное отношение на множестве всех операторов $\{\widetilde{R}\}$. Будем говорить, что операторы $R_1=R_1(\widetilde{\epsilon}_1, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{p}_1, \widetilde{x}_1)$ и $R_2=R_2(\widetilde{\epsilon}_2, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{p}_2, \widetilde{x}_2)$ с опорным множеством Ω находятся в отношении $\overset{1}{\sim}$, т.е. $R_1 \overset{1}{\sim} R_2$, если $\widetilde{x}_1=\widetilde{x}_2$ и $\tau_i(\widetilde{\epsilon}_1, \Omega)=\tau_i(\widetilde{\epsilon}_2, \Omega)$, $i=1, 2$. Данное отношение является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности (1-эквивалентности), порождаемый оператором $R\in\{\widetilde{R}\}$, будем обозначать $[R, \Omega]_1$. Без существенных изменений понятие $\widetilde{\epsilon}$-разбиения распространяется на случай операторов с опорными множествами $\Omega'=\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Соответствующий класс эквивалентности обозначим $[R, \Omega']_1$, а число классов эквивалентности типа $[R, \Omega]_1$ и $[R, \Omega']_1$ обозначим $\chi([R, \Omega]_1)$ и $\chi([R, \Omega']_1)$ соответственно. Тогда имеет место

Теорема 1. а) $\chi([R, \Omega]_1)=3(m\delta+1)^n+1$;

б) $\chi([R, \Omega]_1)=\sum\limits_{k=1}^{n} C^k_n(3(m\delta+1)^k+1)$.

Для доказательства достаточно подсчитать число различных $\widetilde{\epsilon}$-разбиений матриц перестановок (3а), (3б).

Следствие 1. *Общее число классов эквивалентности по опорным множествам Ω и Ω' не превосходит* $2^n(3(m\delta+1)^n+1)$.

Поставим в соответствие каждому объекту S^t выборки $\widetilde{S}^\delta$ и каждому классу 1-эквивалентности $[R]_1$ булев вектор $\mathfrak{S}_t([R]_1)$ следующим образом:

1) в случае класса $[R]_1 = [R, \Omega]_1$ $\mathfrak{S}_t([R, \Omega]_1)=(\mathfrak{S}^1_t, \mathfrak{S}^2_t, \ldots, \mathfrak{S}^m_t)$, где $\mathfrak{S}^i_t=(\mathfrak{S}^t_{i1}, \mathfrak{S}^t_{i2}, \ldots, \mathfrak{S}^t_{in})$, $i=1, 2, \ldots, m$; $\mathfrak{S}^t_{ir}=B(\rho(r, i, t), \epsilon_r)$ для $i=1, 2, \ldots, m_1$; $r=1, 2, \ldots, n$ и $\mathfrak{S}^t_{ir}=\overline{B}(\rho(r, i, t), \epsilon_r)$; $i=m_1+1, \ldots, m$.

2) В случае класса $[R]_1=[R_1\Omega']_1$, где $\Omega'=\{i_1, \ldots, i_k\}$, $\mathfrak{S}^t_{ir}$ определяется так же, как и в случае 1), но для $r\in\Omega'$.

Тогда

$$\mathfrak{S}^i_t=\begin{cases} \prod\limits_{r\in\Omega'} \mathfrak{S}^t_{ir}, & \text{если } i=1, 2, \ldots, m_1, \\ \operatorname{sign}\Big(\sum\limits_{r\in\Omega'} \mathfrak{S}^t_{ir}\Big), & \text{если } i=m_1+1, m_1+2, \ldots, m. \end{cases} \tag{4}$$

Векторы $\mathfrak{S}_t([R, \Omega]_1)$ и $\mathfrak{S}_t([R, \Omega']_1)$ будем называть характеристическими для объекта S^t.

Определение. Классификацией выборки $\widetilde{S}^\delta$ назовем всякое ее представление в виде объединения двух непересекающихся множеств $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$, т.е. $\widetilde{S}_1=\{S^{t1}, \ldots, S^{tk}\}$, $\widetilde{S}_2=\{S^{tk+1}, \ldots, S^{t\delta}\}$, где $\widetilde{S}_1\cup\widetilde{S}_2=\widetilde{S}^\delta$, $\widetilde{S}_1\cap\widetilde{S}_2=\phi$. Классификацию выборки будем обозначать $(\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2)$.

Действительно, по теореме 1а) число классов L-эквивалентности не превосходит

$$[3(m\delta + 1)^n + 1]^L < 2^{2L}[m\delta + 1]^{Ln}.$$

В то же время оценка (6) остается неизменной. Тогда, разрешая неравенство

$$2^{[\delta/2^{mnL}]-1} > 2^{2L}(m\delta + 1)^{Ln}$$

относительно δ, получаем (6′).

Зафиксируем параметры q и l в определении оператора R, данном в (1), и будем варьировать произвольным образом параметры $\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{p}$, $\widetilde{x}$, а также параметры $k \in N$, $\beta_{ij} \in \{0, 1\}$. Тогда верна

Теорема 3. *Пусть $\widetilde{S}^\delta$ – произвольная выборка общего типа такая, что*

(10) $\delta > 2^{mnL}[Ln \log_2(m\delta + 1) + L(n + 2) + 1]$, $L = ql(2q + l - 3)$.

Тогда существует классификация выборки $\widetilde{S}^\delta$, не реализуемая никаким оператором

$$R = (c_1 + c_2) \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{l} \beta_{ij} A^k(i, j).$$

Доказательство. Найдем число L, для которого $R \in \widetilde{U}(L)$. В работе ([2]) оператор $A(i, j)$ строился введением вспомогательных операторов $R_j = \sum_{t \neq j}^{l} R_{jt}$ и $R_i^j = \sum_{v \neq i}^{q} R_{iv}^j$, где $R_{jt} \in \{\widetilde{R}\}$, $R_{iv}^j \in \{\widetilde{R}\}$ либо $R_i^j = \sum_{v \neq i}^{q} (R_{iv}^{j1} - R_{iv}^{j2})$, R_{iv}^{j1}, $R_{iv}^{j2} \in \{\widetilde{R}\}$. Тогда $A(i, j)$ получен умножением на константу оператора $R_{ij} = R_i + R_i^j$, следовательно, $R_j \in \widetilde{U}(l - 1, 1)$, $R_i^j \in \widetilde{U}(2(q - 1), 1)$, $R_{ij} \in \widetilde{U}(2q + l - 3, 1)$; тогда $R \in \widetilde{U}_{ql}(ql(2q + l - 3), k)$ или $R \in \widetilde{U}(ql(2q + l - 3))$. В таком случае по теореме 2 существует классификация $(\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2)$ выборки $\widetilde{S}^\delta$ (при δ, удовлетворяющем (10)), не реализуемая никаким оператором R.

Следствие 2. *Класс параметрических алгоритмов*

$$K_A = \{A \mid A = R(\widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{p}, \widetilde{x}, \widetilde{\beta}, k) \circ r(\widetilde{C})\}$$

емеет емкость

$$h = \min\{\delta \mid \delta > 2^{mnL}[Ln \log_2(m\delta + 1) + L(n + 2) + 1]\},$$

где $L = ql(2q + l - 3)$.

Следствие 3. *Для невырожденных задач* ([2]) *емкость h класса K_A определяется следующим образом*:

(11) $h = \min\{\delta \mid \delta > 2^{mnL}[Ln \log_2(m\delta + 1) + 2L + 1]\}$, $L = ql(2q + l - 3)$.

Равенство (11) вытекает из того, что в случае невырожденных задач, при построении $A(i, j)$ ([2]) операторы с опорным множеством Ω' не использовались, тогда применяя (6′), получим (11).

В заключение автор выражает благодарность Ю.И. Журавлеву, под руководством которого была выполнена эта работа.

Московский государственный педагогический институт
им. В.И. Ленина

Поступило
13 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ю.И. Журавлев*, Кибернетика, № 4, 14 (1977). [2] *Ю.И. Журавлев*, там же, № 6, 21 (1977). [3] *Ю.И. Журавлев*, там же, № 2, 35 (1978). [4] *В.Н. Вапник, А.Я. Червоненкис*, Теория распознавания образов, М., "Наука", 1974.