УДК 519.714

ПОИСК ИНФОРМАТИВНЫХ ФРАГМЕНТОВ ОПИСАНИЙ ОБЪЕКТОВ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕДУРАХ РАСПОЗНАВАНИЯ[1)]

© 2002 г. Е. В. Дюкова, Н. В. Песков

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
e-mail: djukova@ccas.ru, nick@motor.ru

Поступила в редакцию 13.09.01 г.

Изучаются дискретные процедуры распознавания, основанные на поиске информативных фрагментов признаковых описаний объектов (элементарных классификаторов). Предлагается методика отбора таких фрагментов. Описывается ряд новых моделей, позволяющих расширить область применения методов дискретного анализа в задачах распознавания. Исследуются метрические (количественные) свойства элементарных классификаторов. Библ. 17.

ВВЕДЕНИЕ

В самых общих чертах задача распознавания состоит в следующем. Исследуется некоторое множество объектов M. Известно, что множество M представимо в виде объединения подмножеств (классов) $K_1, \ldots, K_l$. Объекты из M описываются некоторой системой признаков $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Имеется конечный набор объектов $\{S_1, \ldots, S_m\}$ из M, о которых известно, каким классам они принадлежат (обучающая выборка). Обучающая информация обычно представляется в виде таблицы $T_{mn} = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где a_{ij} – значение признака x_j в описании объекта S_i. Требуется по предъявленному набору значений признаков, т.е. описанию некоторого объекта $S = (a_1, \ldots, a_n)$ из M, о котором, вообще говоря, неизвестно, какому классу он принадлежит, определить этот класс.

Дискретный подход к задачам распознавания основан на комбинаторном анализе описаний обучающих объектов с целью выделения наиболее информативных подописаний (или фрагментов описаний) этих объектов. Обычно информативными считаются те фрагменты, которые позволяют различать классы. При этом исходные описания объектов задаются в виде наборов значений целочисленных признаков. Дискретные методы привели к появлению целого ряда эвристик, называемых дискретными или логическими процедурами распознавания (например, тестовые алгоритмы [1]–[3], алгоритмы типа “Кора” или алгоритмы голосования по представительным наборам [4]–[6] и т.д.).

Рассматриваются пары вида (S_i, H), где H – некоторый набор из r различных признаков вида $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$, а $S_i \in \{S_1, \ldots, S_m\}$, $S_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$. Каждая такая пара очевидным образом задает фрагмент описания объекта S_i, который называется элементарным классификатором. В данном случае это фрагмент описания объекта S_i вида $(a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_r})$.

Пусть C – множество всех элементарных классификаторов, задаваемых обучающей выборкой (таблицей T_{mn}). Каждый распознающий алгоритм A определяется некоторым подмножеством C^A множества C. Собственно говоря, для каждого класса K, $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$, строится подмножество $C^A(K)$ множества C и $C^A = \bigcup_{j=1}^{l} C^A(K_j)$. Например, из C выбираются те элементарные классификаторы, которые отличают обучающие объекты из класса K от всех обучающих объектов из других классов (представительные наборы для класса K). Более точно: элементарный классификатор, заданный парой (S_i, H), где H – набор признаков $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, S_i – объект из класса K, называется *представительным набором для* K, если для любого обучающего объекта S_q, не принадлежащего классу K, имеет место $(a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_r}) \neq (a_{qj_1}, \ldots, a_{qj_r})$. Иногда добавляется требование неизбыточности (тупиковости) представительного набора. Вопрос об отнесении

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 01-01-00575 и 00-15-96064).

объекта S к одному из классов $K_1, \ldots, K_l$ решается на основе голосования по элементарным классификаторам из C^A.

Мощность множества C (число элементарных классификаторов) растет экспоненциально с ростом размерности задачи. Поэтому поиск информативных фрагментов описаний обучающих объектов связан с большими вычислительными трудностями. При построении C^A, как правило, возникает "труднорешаемая" задача нахождения множества всех неприводимых покрытий булевой матрицы.

Данная проблематика имеет богатую историю. Основные усилия в течение многих лет были направлены на разработку общей теории сложности решения задач дискретного анализа информации и синтеза асимптотически оптимальных алгоритмов поиска информативных фрагментов [7]–[11]. Полученные в этой области результаты позволили в значительной степени преодолеть трудности переборного характера и тем самым расширить возможность использования многих ранее введенных и новых конструкций. Дальнейшее усовершенствование моделей логических процедур распознавания потребовало в том числе разработки простых эвристических правил для оценки наиболее важных информативных характеристик обучающей выборки.

В настоящей работе предложены методы, позволяющие достаточно быстро проводить предварительный анализ таблицы обучения с целью выделения "информативных зон" и оценки параметров, характеризующих информативность признаков, а также представительность (типичность) обучающих объектов и их подописаний по отношению к своим классам. Построение множества типичных объектов позволяет разбить исходную выборку на две подвыборки: базовую, содержащую типичные для классов объекты, и контрольную, содержащую все остальные объекты. Базовая подвыборка используется для построения множества C^A, а по контрольной подвыборке настраиваются информативные веса элементов из C^A. При этом для вычисления весов элементарных классификаторов из C^A используются простые эвристики; например, в качестве веса элементарного классификатора берется разность между числом правильно и неправильно классифицируемых им объектов из контрольной выборки. Предложенные методы программно реализованы для случая, когда в качестве элементов из C^A рассматриваются представительные наборы. Эффективность предложенной методики продемонстрирована на задаче из области социологии.

В классических дискретных процедурах распознавания информативными для класса K считаются такие элементарные классификаторы, которые порождаются объектами из K и позволяют отличать эти объекты от объектов из других классов. В работе предлагается ряд новых эвристик дискретного характера, в которых информативными для класса K считаются элементарные классификаторы, порождаемые объектами, не входящими в класс K. Проведено тестирование на прикладных задачах из области медицинского прогнозирования.

Исследование дискретных процедур распознавания традиционно связано с изучением метрических свойств используемых для их построения множеств элементарных классификаторов. Имеется в виду получение асимптотических оценок типичных значений числа элементарных классификаторов из C^A и длины элементарного классификатора из C^A (см. [2], [6]–[11]).

Для усовершенствования и обобщения методики построения представительных наборов и получения необходимых асимптотических оценок в [8] были введены понятия σ-покрытия и тупикового σ-покрытия целочисленной матрицы, обобщающие, соответственно, известные понятия покрытия и неприводимого покрытия булевой матрицы. В [8]–[11] были получены асимптотики числа тупиковых σ-покрытий и длины тупикового σ-покрытия для почти всех целочисленных матриц размера $m \times n$ с элементами из $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, $k \geq 2$, при условии $n \longrightarrow \infty$ и $m^\alpha \leq n \leq k^{m^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$. Показано, что в данном случае число тупиковых σ-покрытий почти всегда асимптотически совпадает с числом подматриц специального вида, называемых далее σ-подматрицами, и по порядку меньше числа покрытий. Отметим, что σ-подматрица в частном случае при $k = 2$ является единичной подматрицей. В данной работе рассмотрен прямо противоположный случай, а именно, когда $n^\alpha \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$. Получены асимптотики типичных значений числа σ-подматриц и порядка σ-подматрицы. Кроме того, для практически общего случая получены асимптотики типичных значений числа σ-покрытий и длины σ-покрытия. На основе сравнения найденных оценок показано, что в случае, когда $n^\alpha \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1/2$, почти всегда число σ-подматриц по порядку больше числа тупиковых σ-покрытий.

Работа состоит из шести разделов.

В разд. 1 описаны наиболее известные модели дискретных процедур распознавания и предлагается ряд новых моделей, таких как алгоритмы голосования по антипредставительным наборам, по элементарным классификаторам фиксированной длины, не содержащимся в классе, и по покрытиям класса. В разд. 2 описаны методы предварительного анализа исходной выборки объектов и разделения ее на базовую и контрольную подвыборки. В разд. 3 приведены результаты, полученные при решении задач анализа социологической информации и медицинского прогнозирования. В разд. 4 введены понятия σ-покрытия, тупикового σ-покрытия и σ-подматрицы целочисленной матрицы. В разд. 5 и 6 исследуются метрические свойства σ-покрытий и σ-подматриц.

Приведенные в данной работе результаты были доложены на Всероссийской конференции “Математические методы распознавания образов” в 1999 г. и в 2001 г. и опубликованы в сборниках докладов этой конференции [12], [13].

1. МОДЕЛИ РАСПОЗНАЮЩИХ ПРОЦЕДУР, ОСНОВАННЫХ НА ПОСТРОЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ

Пусть даны два объекта $S' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ и $S'' = (a''_1, \ldots, a''_n)$. Близость объектов S' и S'' по набору признаков H, $H = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$, будем оценивать величиной

$$B(S', S'', H) = \begin{cases} 0, & \text{если } a'_{j_t} = a''_{j_t} \text{ при } t = 1, 2, \ldots, r, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, объекты S' и S'' близки по набору признаков H в том и только том случае, если совпадают элементарные классификаторы, порождаемые парами (S', H) и (S'', H).

Пусть $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$, $\overline{K} = \{K_1, \ldots, K_l\}\backslash K$. Конкретная модель алгоритма распознавания A определяется принципом построения множества C^A и оценкой $\Gamma(S, K)$ принадлежности объекта S классу K, которая вычисляется на основе голосования по элементарным классификаторам из C^A. Например, считается, что элементарный классификатор из $C^A(K)$, порожденный парой (S', H), дает голос за принадлежность объекта S классу K, если $B(S, S', H) = 0$.

В классической модели алгоритма с представительными наборами множество $C^A(K)$ состоит из элементарных классификаторов, порождаемых парами (S', H), где $S' \in K$, и для любого $S'' \in \overline{K}$ имеет место $B(S', S'', H) = 1$. В простейшей модификации для оценки принадлежности объекта S классу K используется величина

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|C^A(K)|} \sum_{(S', H) \in C^A(K)} [1 - B(S, S', H)];$$

здесь и далее $|N|$ – мощность множества N.

Предлагается модель с антипредставительными наборами, в которой $C^A(K)$ состоит из элементарных классификаторов, порождаемых парами (S', H), где $S' \in \overline{K}$ и $B(S', S'', H) = 1$ при $S'' \in K$. При этом принадлежность объекта S классу K будем оценивать величиной

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|C^A(K)|} \sum_{(S', H) \in C^A(K)} B(S, S', H).$$

Заметим, что для случая $l = 2$ множество антипредставительных наборов для класса K_1 совпадает со множеством представительных наборов для класса K_2 и наоборот. Поэтому при использовании обеих моделей объект S будет отнесен к одному и тому же классу.

Таким образом, при построении множества $C^A(K)$ рассматриваются такие наборы значений признаков, которые не встречаются в описаниях обучающих объектов из класса K (“покрытия” для K), но встречаются в описаниях объектов из $\overline{K}$. Если отбросить последнее условие, то множество $C^A(K)$ будет порождаться покрытиями для K, точнее – покрытиями матрицы, образованной описаниями обучающих объектов из класса K (см. разд. 5). Эту модель назовем *алгоритмом голосования по покрытиям класса*.

Описанные модели более эффективны по сравнению с классическими в смысле вычислительных затрат при $l > 2$.

Рассмотрим известную модель вычисления оценок, в которой в качестве множества $C^A(K)$ берутся все возможные элементарные классификаторы, порождаемые парами (S', H), где $S' \in K$, а H имеет фиксированную мощность r. Значение r может задаваться экспертом или находится путем некоторого предварительного анализа обучающей выборки. Для рассматриваемой модели существует формула эффективного вычисления оценки $\Gamma(S, K)$ (см. [14]). Обозначим через $J_1(S, S')$ множество признаков, в которых описания S и S' совпадают. Пусть $D(S, S')$ – мощность множества $J_1(S, S')$. Тогда в простейшей модификации

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|K|}\sum_{S' \in K}\sum_{x_j \in J_1(S, S')} C^{r-1}_{D(S, S')-1}.$$

По аналогии построим модель алгоритмов распознавания, в которой в качестве $C^A(K)$ берется множество всех элементарных классификаторов, порождаемых парами (S', H), где $S' \in \bar{K}$, а H имеет фиксированную мощность r. Будем считать, что элементарный классификатор из $C^A(K)$, порожденный парой (S', H), где $S' \in \bar{K}$, подает голос за принадлежность объекта S классу K, если $B(S, S', H) = 1$. Положим

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|\bar{K}|}\sum_{(S', H) \in C^A(K)} B(S, S', H).$$

Нетрудно показать, что для данной модели также существует эффективная формула вычисления принадлежности объекта S классу K. Пусть $J_2(S, S')$ – множество признаков, в которых описания S и S' не совпадают, тогда

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|\bar{K}|}\sum_{S' \in K}\sum_{x_j \in J_2(S, S')} C^{r-1}_{n-1}.$$

2. ИНФОРМАТИВНОСТЬ ПРИЗНАКОВ, ОТДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРИЗНАКОВ И ФРАГМЕНТОВ ОПИСАНИЙ ОБЪЕКТОВ

Достаточно эффективными и не требующими больших вычислительных затрат являются предлагаемые в данном разделе методы оценки информативности признаков и отдельных значений признаков, основанные на вычислении близости между объектами по отдельным признакам.

Пусть $S' \in K_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Положим

$$\bar{K}_i = \bigcup_{q=1}^{l} K_q \backslash K_i, \quad \mu^{(1)}_{ij}(S') = \sum_{S'' \in K_i}[1 - B(S', S'', \{x_j\})], \quad \mu^{(2)}_{ij}(S'') = \sum_{S'' \in \bar{K}_i}[1 - B(S', S'', \{x_j\})].$$

Величины $\mu^{(1)}_{ij}(S')$ и $\mu^{(2)}_{ij}(S')$ характеризуют близость объекта S', соответственно, к своему классу и к другим классам. Величины

$$\mu_{ij}(S') = \mu^{(1)}_{ij} - \mu^{(2)}_{ij} \quad \text{и} \quad \mu_{ij} = \sum_{S' \in K_i}\mu_{ij}(S')/|K_i|$$

назовем, соответственно, весом значения признака x_j для объекта S' и средним весом значения признака x_j в классе K_i. Будем говорить, что значение признака x_j для S' является типичным, если $\mu_{ij}(S') \ge \mu_{ij}$. Множество типичных значений признаков в таблице T_{mn} образует информативную зону. Использование информативной зоны позволяет снизить влияние “шумящих” признаков (к ним, в частности, относятся многозначные признаки).

Пусть дано целое число p, $1 \le p \le n$. Объект S' будем считать типичным для класса K_i по порогу p, если неравенство $\mu_{ij}(S') \ge \mu_{ij}$ выполняется не менее чем для p признаков.

Разделим таблицу обучения на две подтаблицы; по первой (базовой) будем строить множество элементарных классификаторов C^A, по второй (контрольной) – вычислять их веса. Причем в базовую подтаблицу отберем те обучающие объекты, которые являются типичными для своих классов. Все остальные обучающие объекты попадают в контрольную выборку.

Для вычисления веса элементарного классификатора ω из C^A, порождаемого парой (S', H), можно воспользоваться различными функциями. В общем случае функция $\nu_{(S', H)}$, по которой вычисляется вес элементарного классификатора ω, должна обладать следующими свойствами: она должна монотонно возрастать по числу объектов из контрольной выборки, за которые элементарный классификатор голосует правильно, и монотонно убывать по числу объектов, за которые он голосует неправильно. Приведем примеры самых простых таких функций (см. также [15]).

Пусть ω – элементарный классификатор класса K, $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$, порождаемый парой (S', H), где S' – объект из базовой выборки, и пусть $\delta(K, \omega)$ – число объектов в контрольной выборке, за которое элементарный классификатор ω голосует "правильно", $\delta(\bar{K}, \omega)$ – число объектов в контрольной выборке, за которое он голосует "неправильно". Тогда в качестве $\nu_{(S', H)}$ можно рассматривать следующие функции:

1) $\nu_{(S', H)} = \delta(K, \omega)$;

2) $\nu_{(S', H)} = \begin{cases} \delta(K, \omega) - \delta(\bar{K}, \omega), & \text{если } \delta(K, \omega) > \delta(\bar{K}, \omega), \\ 0, & \text{если } \delta(K, \omega) < \delta(\bar{K}, \omega); \end{cases}$

3) $\nu_{(S', H)} = \dfrac{1 + \delta(K, \omega)}{1 + \delta(\bar{K}, \omega)}$.

Принадлежность объекта S классу K, $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$ для алгоритма с представительными наборами будем оценивать величиной

$$\Gamma(S, K) = \frac{1}{|C^A(K)|} \sum_{(S', H) \in C^A(K)} \nu_{(S', H)}[1 - B(S, S', H)].$$

В качестве информативного веса признака x_j будем рассматривать величину

$$I_j = \left(\sum_{(S', H) \in C^A,\, x_j \in H} \nu_{(S', H)} \right) \left(\sum_{(S', H) \in C^A} \nu_{(S', H)} \right)^{-1}. \tag{2.1}$$

3. ТЕСТИРОВАНИЕ НА РЕАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

На задаче из области медицинского прогнозирования было проведено сравнение классических конструкций и новых моделей, описанных в разд. 1. Исследовалась выживаемость больных остеогенной саркомой в течение года после лечения химическими методами. В качестве начальных данных была представлена целочисленная таблица размерностью 77×7. Столбцы таблицы представляли собой признаки, значениями которых были некоторые характеристики клеток раковой опухоли, строки таблицы (обучающие объекты) – описания больных, для которых были известны показатели по рассматриваемым признакам и результаты лечения. Обучающие объекты были разбиты на два класса. В первый класс были отнесены те больные, которые выжили в течение года после лечения, во второй класс – остальные.

Для оценки эффективности процедур распознавания использовался метод скользящего контроля. Предложенный в работе алгоритм голосования по покрытиям класса показал эффективность 75% (процент правильно распознанных объектов), в то время как классический алгоритм голосования по представительным наборам дал 61%.

Заметим, что при использовании классического алгоритма процент неправильно распознанных объектов оказался равным 14%. Причина низкой эффективности алгоритма – наличие большого числа нераспознанных объектов, т.е. объектов, для которых оценки за первый и второй класс совпали. В этом случае происходит отказ от распознавания. Модификация решающего правила дает возможность повысить процент правильно распознанных объектов до 72%, если относить "спорные" объекты к первому классу, и до 74%, если относить такие объекты ко второму классу.

Описанные в разд. 2 методы были протестированы на результатах социологического опроса, предоставленного Информационно-социологическим центром Российской академии государственной службы при Президенте Российской Федерации. Целью опроса было изучение отношения людей к политической жизни страны. Анкета состояла из вопросов, ответы на которые кодировались целыми числами. В опросе приняло участие 1629 человек. Таким образом, информация представляла собой таблицу T размерностью 1629×100, где столбцы (признаки) – вопросы, а строки (объекты) – респонденты.

Ставилась следующая задача. Выбирался целевой признак, например вопрос об отношении респондента к некоторой политической партии, с возможными вариантами ответа: симпатия, равнодушие, неприязнь, трудно сказать. Этими ответами таблица T разбивалась на 4 класса. Требовалось определить информативность признаков при таком разбиении. Информативность признаков оценивалась величиной (2.1).

Для интересных целевых вопросов при помощи предложенных в работе методов удалось выделить небольшую группу вопросов, обладающих наибольшей важностью. Остальные вопросы обладали существенно меньшей информативностью.

4. ПОНЯТИЯ σ-ПОКРЫТИЯ И ТУПИКОВОГО σ-ПОКРЫТИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ МАТРИЦЫ

Введем следующие обозначения: M_{nm}^k, $k \ge 2$, – множество всех матриц размера $m \times n$ с элементами из $\{0, 1, \ldots, k-1\}$; E_k^r, $k \ge 2$, $r \le n$, – множество всех k-ичных наборов длины r; $Q_p(\sigma)$, $\sigma \in E_k^r$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, $p \in \{1, 2, \ldots, r\}$, – множество всех таких наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ в E_k^r, для которых $\beta_p \ne \sigma_p$ и $\beta_j = \sigma_j$ при $j \in \{1, 2, \ldots, r\} \backslash \{p\}$; W_r^n, $r \le n$, – множество всех наборов вида $(j_1, \ldots, j_r)$, где $j_l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ при $l = 1, 2, \ldots, r$ и $j_1 < \ldots < j_r$; Ψ_0 – интервал $(\log_k mn, n)$; Ψ_1 – интервал

$$\left(\frac{1}{2}\log_k mn - \frac{1}{2}\log_k\log_k mn - \log_k\log_k\log_k n, \frac{1}{2}\log_k mn - \frac{1}{2}\log_k\log_k mn + \log_k\log_k\log_k n\right);$$

$a_n \approx b_n$ означает, что $\lim(a_n/b_n) = 1$ при $n \longrightarrow \infty$; $a_n \gtrsim_n b_n$ означает, что $a_n \ge b_n$ при всех достаточно больших n.

Пусть $L \in M_{mn}^k$, $\sigma \in E_k^r$. Набор H из r различных столбцов матрицы L назовем σ-покрытием L, если подматрица L^H, образованная столбцами из H, не содержит строку σ. Набор H из r различных столбцов матрицы L назовем тупиковым σ-покрытием L, если, во-первых, подматрица L^H, образованная столбцами из H, не содержит строку σ, и, во-вторых, если $p \in \{1, 2, \ldots, r\}$, то L^H содержит хотя бы одну из строк $Q_p(\sigma)$.

Заметим, что если $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, то набор столбцов H матрицы L является тупиковым σ-покрытием в том и только том случае, если выполнены следующие два условия:

1) L^H не содержит строку $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$;

2) L^H содержит (с точностью до перестановки строк) подматрицу вида

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{r-1} & \sigma_r \\ \sigma_1 & \beta_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{r-1} & \sigma_r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \ldots & \sigma_{r-1} & \beta_r \end{bmatrix},$$

где $\beta_p \ne \sigma_p$ при $p = 1, 2, \ldots, r$. Такую подматрицу будем называть σ-подматрицей.

В частности, тупиковое $(0, \ldots, 0)$-покрытие булевой матрицы является неприводимым покрытием [16].

Пусть $K \in \{K_1, \ldots, K_l\}$. Таблицу обучения T_{mn} можно рассматривать как пару матриц L_1 и L_2, где L_1 – матрица, состоящая из описаний обучающих объектов из класса K, а L_2 – матрица, состоящая из описаний остальных обучающих объектов. Тогда очевидно, что элементарный классификатор вида $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, задаваемый парой (S_i, H), $S_i \in K$, $H = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}\}$, будет (тупиковым) представительным набором для K тогда и только тогда, когда набор столбцов матрицы L_1 с номерами $j_1, \ldots, j_r$ не является $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$-покрытием, а набор столбцов L_2 с номерами $j_1, \ldots, j_r$ является (тупиковым) $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$-покрытием.

Пусть $C(L, \sigma)$ – множество всех пар вида (H, σ), где H есть σ-покрытие матрицы L; $B(L, \sigma)$ – множество всех пар вида (H, σ), где H – тупиковое σ-покрытие матрицы L; $S(L, \sigma)$ – совокупность всех σ-подматриц матрицы L. Положим

$$C(L) = \bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_{\sigma \in E_k^r} C(L, \sigma), \quad B(L) = \bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_{\sigma \in E_k^r} B(L, \sigma), \quad S(L) = \bigcup_{r=1}^{n} \bigcup_{\sigma \in E_k^r} S(L, \sigma).$$

В разд. 5 и 6 нас будут интересовать асимптотики типичных значений чисел $|C(L)|$ и $|S(L)|$, а также оценка типичного значения отношения $|S(L)|/|B(L)|$. Получение требуемых оценок будет опираться на две следующие леммы.

Будем считать $M_{mn}^k = \{L\}$ пространством элементарных событий, в котором каждое событие L происходит с вероятностью $1/\left|M_{mn}^k\right|$. Математическое ожидание случайной величины $X(L)$ будем обозначать через $\mathbf{M}X(L)$, а дисперсию – через $\mathbf{D}X(L)$.

Лемма 1 (см. [7]). *Пусть для случайных величин $X_1(L)$ и $X_2(L)$, определенных на M_{mn}^k, выполнено $X_1(L) \ge X_2(L) \ge 0$ и при $n \longrightarrow \infty$ верно $\mathbf{M}X_1(L) \approx \mathbf{M}X_2(L)$, $\mathbf{D}X_2(L)/(\mathbf{M}X_2(L))^2 \longrightarrow 0$. Тогда для почти всех матриц L из M_{mn}^k имеет место $X_2(L) \approx X_1(L) \approx \mathbf{M}X_2(L)$, $n \longrightarrow \infty$.*

Лемма 2 (см. [17]). *Пусть $X(L)$ – случайная величина, определенная на M_{mn}^k, и пусть $\Delta(m, n)$ – доля тех матриц L из M_{mn}^k, для которых $X(L) = 0$. Тогда если $\mathbf{M}X(L) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, то $\Delta(m, n) \longrightarrow 1$, $n \longrightarrow \infty$.*

5. АСИМПТОТИКА ТИПИЧНОГО ЧИСЛА σ-ПОКРЫТИЙ И ТИПИЧНОЙ ДЛИНЫ σ-ПОКРЫТИЯ

В настоящем разделе получены асимптотики типичного числа σ-покрытий и типичной длины σ-покрытия для матрицы из M_{mn}^k в случае, когда $m \le k^{n^\beta}$, $\beta < 1$ (ограничение на m не является существенным, так как при $m > k^n$ матрица обязательно содержит одинаковые строки). Справедлива

Теорема 1. *Если $m \le k^{n^\beta}$, $\beta < 1$, то для почти всех матриц L из M_{mn}^k при $n \longrightarrow \infty$ имеет место*

$$|C(L)| \approx \sum_{r \in \Psi_0}^{n} C_n^r k^r$$

и длины почти всех покрытий из $C(L)$ принадлежат интервалу Ψ_0.

Доказательство теоремы опирается на лемму 1 и приведенные ниже леммы 3–5.

Лемма 3. *Если $m \le k^{n^\beta}$, $\beta < 1$, то при $n \longrightarrow \infty$ имеет место*

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m \approx \sum_{r \in \Psi_0} C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m.$$

Доказательство. Положим $M_r = C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $r \le \log_k mn + 1$. Тогда имеем

$$\frac{M_{r-1}}{M_r} = \frac{C_n^{r-1} k^{r-1} (1 - k^{-r+1})^m}{C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m} \le \frac{r}{k(n - r + 1)} \le \frac{\log_k mn + 1}{n - \log_k mn} \le o(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{r \notin \Psi_0} M_r = o\left(\sum_{r \in \Psi_0} M_r\right)$$

при $n \longrightarrow \infty$. Лемма доказана.

Пусть $w \in W_r^n$ и $\sigma \in E_k^r$.

На множестве элементарных событий $M_{mn}^k = \{L\}$ рассмотрим случайную величину $\xi_{w,\sigma}(L)$, равную 1, если набор столбцов с номерами из w образует σ-покрытие матрицы L, и равную 0 в противном случае. Положим

$$\xi_1(L) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \xi_{(w,\sigma)}(L), \quad \xi_2(L) = \sum_{r=\Psi_0}^{n} \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \xi_{(w,\sigma)}(L).$$

Заметим, что $|C(L)| = \xi_1(L)$. Обозначим через $M_{(w,\sigma)}$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ множество всех матриц L в M_{mn}^k таких, что в подматрице матрицы L, образованной столбцами с номерами из w, не содержится строка $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Лемма 4. *Если* $m \le k^{n^\beta}$, $\beta < 1$, *то для почти всех матриц* L *из* M_{mn}^k *при* $n \longrightarrow \infty$ *имеет место*

$$\mathbf{M}\xi_1(L) \approx \mathbf{M}\xi_2(L) \approx \sum_{r \in \Psi_0} C_n^r k^r.$$

Доказательство. Очевидно также, что

$$\mathbf{M}\xi_1(L) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1),$$

где $\mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1)$ – вероятность того, что $\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1$. Очевидно также, что

$$\mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1) = |M_{(w,\sigma)}|/|M_{mn}^k| = (1-k^{-r})^m k^{mn}/|M_{mn}^k| = (1-k^{-r})^m.$$

Тогда, в силу леммы 3,

$$\mathbf{M}\xi_1(L) = \sum_{r=1}^{n} C_n^r k^r (1-k^{-r})^m \approx \sum_{r=\Psi_0} C_n^r k^r (1-k^{-r})^m.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{M}\xi_2(L) = \sum_{r=\Psi_0}^{n} \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1) = \sum_{r=\Psi_0} C_n^r k^r (1-k^{-r})^m.$$

Требуемая оценка следует из того, что при $r \in \Psi_0$ в условиях леммы имеет место $(1 - k^{-r})^m \ge \exp(-2mk^{-r}) \ge \exp(-2/n)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $m \le k^{n^\beta}$, $\beta < 1$, *то имеет место*

$$\frac{\mathbf{D}\xi_2(L)}{\mathbf{M}(\xi_2(L))^2} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем $\mathbf{D}\xi_2(L) = \mathbf{M}(\xi_2(L))^2 - (\mathbf{M}\xi_2(L))^2$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}(\xi_2(L))^2 = \sum_{r,l \in \Psi_0} \sum_{\substack{w_1 \in W_r^n \\ w_2 \in W_l^n}} \sum_{\substack{\sigma_1 \in E_k^r \\ \sigma_2 \in E_k^l}} |M|/k^{mn},$$

где $|M| = |M_{(w_1,\sigma_1)} \cap M_{(w_2,\sigma_2)}| < k^{mn}$.

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{M}(\xi_2(L))^2 \le \sum_{r,l \in \Psi_0} C_n^r k^{r+l} \sum_{a=0}^{\min(r,l)} C_r^a C_{n-r}^{l-a} \le \sum_{r,l \in \Psi_0} C_n^r C_n^l k^{r+l}.$$

С другой стороны, в силу леммы 4 имеем

$$(\mathbf{M}\xi_2(L))^2 \approx \sum_{r,\, l \in \Psi_0} C_n^r C_n^l k^{r+l}.$$

Лемма доказана.

Пусть $r_0 = \log_k m - \log_k(\log_k m \ln kn)$, и пусть

$$C_1(L) = \bigcup_{r \le r_0} \bigcup_{\sigma \in E_k^r} C(L, \sigma), \quad \xi_3(L) = \sum_{r \le r_0} \sum_{w \in W_r^n} \sum_{\sigma \in E_k^r} \xi_{(w,\sigma)}(L).$$

Заметим, что $|C_1(L)| = \xi_3(L)$.

Теорема 2. *Для почти всех матриц* $L \in M_{mn}^k$ *при* $n \longrightarrow \infty$ *справедливо*

$$|C_1(L)| = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}\xi_3(L) = \sum_{r \le r_0} \sum_{w \in W_r^n} \mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1) = \sum_{r \le r_0} C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m$$

(здесь $\mathbf{P}(\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1)$ – вероятность того, что $\xi_{(w,\sigma)}(L) = 1$).

Так как при $r \le r_0$

$$a_r = C_n^r k^r (1 - k^{-r})^m \le C_n^r k^r \exp(-mk^{-r}) \le (kn)^{r - \log_k m},$$

то

$$\sum_{r \le r_0} a_r \le (kn)^{r_0 + 1 - \log_k m} \le (kn)^{-\log_k(\log_k m \ln kn) + 1},$$

а значит, $\mathbf{M}\xi_3(L) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Отсюда, пользуясь леммой 2, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Как показано в [10], [11], существует взаимно однозначное соответствие между множеством допустимых конъюнкций двузначной логической функции, определенной на k-ичных n-мерных наборах с m нулями $\beta_1, \ldots, \beta_m$, и множеством покрытий целочисленной матрицы, строками которой являются n-мерные наборы $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Нетрудно также показать, что при $m^2 = o(k^n)$, $n \longrightarrow \infty$, почти все матрицы из M_{mn}^k являются матрицами с попарно различными строками. Поэтому при $m^2 = o(k^n)$, $n \longrightarrow \infty$, полученные в данном разделе асимптотические оценки дают асимптотики типичных значений числа допустимых конъюнкций и ранга допустимой конъюнкции указанной функции.

6. АСИМПТОТИКА ТИПИЧНОГО ЧИСЛА σ-ПОДМАТРИЦ И ПОРЯДКА σ-ПОДМАТРИЦЫ

Ниже получены асимптотики типичного числа σ-подматриц и типичного порядка σ-подматрицы для матрицы из M_{mn}^k.

Теорема 3. *Если* $n^\alpha \le m \le k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, *то для почти всех матриц* L *из* M_{mn}^k *при* $n \longrightarrow \infty$ *справедливо*

$$|S(L)| \approx \sum_{r \in \Psi_1} C_n^r C_m^r r! (k-1)^r k^{r - r^2}$$

и порядки почти всех подматриц из $S(L)$ *принадлежат интервалу* Ψ_1.

Доказательство теоремы опирается на лемму 1 и приводимые ниже леммы 6–10.

Пусть V_r^m, $r \le m$, – множество всех упорядоченных наборов вида $(i_1, \ldots, i_r)$, где $i_l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ при $l = 1, 2, \ldots, r$ и $i_{l_1} \ne i_{l_2}$ при $l_1, l_2 = 1, 2, \ldots, r$, и пусть $v \in V_r^m$, $v = (i_1, \ldots, i_r)$, $w \in W_r^n$, $w = (j_1, \ldots, j_r)$, $\sigma \in E_k^r$.

Матрицу L из M_{mn}^k назовем (v, w, σ)-матрицей, если в подматрице матрицы L, образованной столбцами с номерами $j_1, \ldots, j_r$, строка с номером i_p, $p = 1, 2, \ldots, r$, принадлежит $Q_p(\sigma)$. Обозначим через $M_{(v, w, \sigma)}$ множество всех (v, w, σ)-матриц в M_{mn}^k. Очевидно,

$$|M_{(v, w, \sigma)}| = (k-1)^r k^{mn - r^2}. \tag{6.1}$$

Лемма 6. *Если* $v_1 \in V_r^m$, $v_2 \in V_l^m$, $w_1 \in W_r^n$, $w_2 \in W_l^n$, $\sigma_1 \in E_k^r$, $\sigma_2 \in E_k^l$ *и наборы* v_1 *и* v_2 *пересекаются по* a $(a \geq 0)$ *элементам, а наборы* w_1 *и* w_2 *пересекаются по* b $(b \geq 0)$ *элементам, то*

$$|M_{(v_1, w_1, \sigma_1)} \cap M_{(v_2, w_2, \sigma_2)}| \leq (k-1)^{r + l - a} k^{mn - r^2 - l^2 + ab}.$$

Данная лемма для случая $k = 2$ доказана в [6]. В общем случае доказательство аналогично.

Лемма 7. *Если* $n^\alpha \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, *то при* $n \longrightarrow \infty$ *имеет место*

$$\sum_{r=1}^{\min(m, n)} C_m^r C_n^r r! (k-1)^r k^{r - r^2} \approx \sum_{r = \Psi_1} C_m^r C_n^r r! (k-1)^r k^{r - r^2}.$$

Лемма 8. *Если* $n^\alpha \leq m$, $\alpha > 1$, *и* $r, l \leq \frac{1}{2}\log_k mn$, *то имеет место*

$$\sum_{b=0}^{\min(r, l)} (k-1)^b k^{lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} < C_n^r C_n^l [1 + \delta(n)],$$

где $\delta(n) \longrightarrow 0$ *при* $n \longrightarrow \infty$.

Леммы 7 и 8 для случая $m^\alpha \leq n \leq k^{m^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, $k = 2$, доказаны в [6]. В рассматриваемом случае доказательства этих лемм аналогичны.

Пусть $v \in V_r^m$, $w \in W_r^n$, $\sigma \in E_k^r$. На множестве элементарных событий $M_{mn}^k = \{L\}$ рассмотрим случайную величину $\eta_{(v, w)}(L, \sigma)$, равную 1, если $L \in M_{(v, w, \sigma)}$, и равную 0 в противном случае.

Положим

$$\eta_1(L) = \sum_{r=1}^{\min(m, n)} \sum_{\substack{v \in V_r^m \\ w \in W_r^n}} \sum_{\sigma \in E_k^r} \eta_{(v, w)}(L, \sigma), \quad \eta_2(L) = \sum_{r = \Psi_1} \sum_{\substack{v \in V_r^m \\ w \in W_r^n}} \sum_{\sigma \in E_k^r} \eta_{(v, w)}(L, \sigma).$$

Заметим, что $|S(L)| = \eta_1(L)$.

Лемма 9. *Если* $n^\alpha \leq m \leq k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, *то имеет место*

$$\mathbf{M}\eta_1(L) \approx \mathbf{M}\eta_2(L) \approx \sum_{r \in \Psi_1} C_m^r C_n^r r! (k-1)^r k^{r - r^2}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{M}\eta_1(L) = \sum_{r=1}^{\min(m, n)} \sum_{\substack{v \in V_r^m \\ w \in W_r^n}} \sum_{\sigma \in E_k^r} \mathbf{P}(\eta_{(v, w)}(L, \sigma) = 1),$$

где $\mathbf{P}(\eta_{(v, w)}(L, \sigma) = 1)$ – вероятность того, что $\eta_{(v, w)}(L, \sigma) = 1$.

Из (6.1) получаем

$$\mathbf{P}(\eta_{(v, w)}(L, \sigma) = 1) = |M_{(v, w, \sigma)}| / |M_{mn}^k| = (k-1)^r k^{-r^2}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}\eta_1(L) = \sum_{r \in 1}^{\min(m,n)} C_m^r C_n^r r!(k-1)^r k^{r-r^2}, \quad \mathbf{M}\eta_2(L) = \sum_{r \in \Psi_1} C_m^r C_n^r r!(k-1)^r k^{r-r^2}.$$

Отсюда и из леммы 7 следует утверждение леммы 8.

Лемма 10. *Если* $n^\alpha \le m \le k^{n^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < 1$, *то имеет место*

$$\frac{\mathbf{D}\eta_2(L)}{\mathbf{M}(\eta_2(L))} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{D}\eta_2(L) = \mathbf{M}(\eta_2(L))^2 - (\mathbf{M}\eta_2(L))^2. \tag{6.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{M}(\eta_2(L))^2 = \sum_{r, l \in \Psi_1}^{n} \sum_{\substack{v_1 \in V_r^m,\, w_1 \in W_r^n \\ v_2 \in V_l^m,\, w_2 \in W_l^n}} \sum_{\substack{\sigma_1 \in E_k^r \\ \sigma_2 \in E_k^l}} |M|/k^{mn},$$

где $M = M_{(v_1, w_1, \sigma_1)} \cap M_{(v_2, w_2, \sigma_2)}$. Пользуясь леммой 6, получаем

$$\mathbf{M}(\eta_2(L))^2 \le \sum_{r, l \in \Psi_1} \sum_{b=0}^{\min(r,l)} k^{r+l}(k-1)^{r+l} k^{-r^2-l^2+lb} C_n^r C_r^b C_{n-r}^{l-b} C_m^r r! C_m^l l!.$$

Отсюда в силу леммы 8 имеем

$$\mathbf{M}(\eta_2(L))^2 \le \sum_{r, l \in \Psi_1} C_n^r C_n^l C_m^r r! C_m^l l! k^{r+l}(k-1)^{r+l} k^{-r^2-l^2}[1+\delta(n)], \tag{6.3}$$

где $\delta(n) \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$.

С другой стороны, в силу леммы 9,

$$(\mathbf{M}\eta_2(L))^2 \approx \sum_{r, l \in \Psi_1} C_n^r C_n^l C_m^r r! C_m^l l! k^{r+l}(k-1)^{r+l} k^{-r^2-l^2}. \tag{6.4}$$

Из (6.2)–(6.4) следует утверждение доказываемой леммы.

Утверждение теоремы 3 следует из лемм 9, 10 и леммы 1. Пусть $r_1 = \log_k mn$, и пусть

$$S_1(L) = \bigcup_{r \ge r_1}^{n} \bigcup_{\sigma \in E_k^r} S(L, \sigma), \quad \eta_3(L) = \sum_{r \ge r_1} \sum_{\substack{v \in V_r^m \\ w \in W_r^n}} \sum_{\sigma \in E_k^r} \eta_{(v,w)}(L, \sigma).$$

Заметим, что $|S_1(L)| = \eta_3(L)$.

Теорема 4. *Для почти всех матриц* $L \in M_{mn}^k$ *при* $n \longrightarrow \infty$ *справедливо*

$$|S_1(L)| = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$M\eta_3(L) = \sum_{r \ge r_1} \sum_{\substack{v \in V_r^m \\ w \in W_r^n}} \sum_{\sigma \in E_k^r} \mathbf{P}(\eta_{(v,w)}(L, \sigma) = 1),$$

где $\mathbf{P}(\eta_{(v,w)}(L,\sigma)=1)$ – вероятность того, что $\eta_{(v,w)}(L,\sigma)=1$. Следовательно, в силу (6.1),

$$\boldsymbol{M}\eta_3 = 3(L) = \sum_{r\ge r_1} C_m^r C_n^r r!(k-1)^r k^{r-r^2}.$$

Так как при $r\ge r_1$

$$C_n^r C_m^r r!(k-1)^r k^{r-r^2} \le \frac{(mn)^r}{r!}k^{2r-r^2} \le \left(\frac{k^2 e}{r}\right)^r,$$

то при достаточно большом n

$$\sum_{r\ge r_1}^{n} C_n^r C_m^r r!(k-1)^r k^{r-r^2} \le n\left(\frac{k^2 e}{\log_k mn}\right)^{\log_k mn} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty.$$

Теперь утверждение теоремы следует из леммы 2.

Замечание 2. Из теорем 2 и 4 следует, что при $n\longrightarrow\infty$ для почти всех матриц L из M_{mn}^k число тупиковых покрытий не превосходит величины $\Sigma_{r\in\Psi_2} C_n^r k^r$, где Ψ_2 – интервал $(\log_k m - \log_k(\log_k m \ln kn)$, $\log_k mn)$.

Теорема 5. *Если* $n^\alpha \le m \le k^{n^\beta}$, $\alpha>1$, $\beta<1/2$, *то для почти всех матриц* L *из* M_{mn}^k *при* $n\longrightarrow\infty$ *справедливо* $|S(L)|/|B(L)| \longrightarrow \infty$.

Доказательство. Согласно теореме 3, для почти всех матриц L из M_{mn}^k при $n\longrightarrow\infty$ справедливо

$$|S(L)| \gtrsim \sum_{r\in\Psi_1}(mn)^{r-1}(1-r/n)^r(1-r/m)^r/r!.$$

Так как

$$(1-r/n)^r \ge_n \exp(-2r^2/n) \ge \exp\left(\frac{-2\log_k^2 m}{n}\right) \ge \exp(-2n^{2\beta-1})$$

и, аналогично,

$$(1-r/m)^r \ge_n \exp\left(\frac{-2\log_k^2 m}{n}\right),$$

то имеем

$$|S(L)| \gtrsim \sum_{r\in\Psi_1}(mn)^{r-1}/(\log_k mn)! \ge (mn)^{r_1-1}/(\log_k mn)!, \tag{6.5}$$

где

$$r_1 = \frac{1}{2}\log_k mn - \frac{1}{2}\log_k\log_k mn - \log_k\log_k\log_k n.$$

В силу замечания 2, для почти всех матриц L из M_{mn}^k справедливо

$$|B(L)| \le \sum_{r\le\log_k mn} C_n^r k^r.$$

Пусть $a_r = C_n^r k^r$. Тогда

$$\frac{a_{r-1}}{a_r} \le \frac{r}{kn(1-(r-1)/n)} \longrightarrow 0, \quad n\longrightarrow\infty.$$

Следовательно,

$$|B(L)| \le_n C_n^{\log_k mn} mn \le \frac{n^{\log_k mn} mn}{(\log_k mn)!}.$$

Отсюда и из (6.5) следует, что

$$|S(L)|/|B(L)| \gtrsim (mn)^{r_1 - 2}/n^{\log_k mn} \ge n^{(\alpha + 1)(r_1 - 2) - \log_k mn} \ge n^{0.5(\alpha - 1)\log_k mn - (\alpha + 1)\log_k \log_k mn} \longrightarrow \infty, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5 следует, что в случае, когда число строк матрицы по порядку больше числа столбцов, почти всегда величина $|S(L)|$ по порядку больше величины $|B(L)|$. Ранее (см. [8]–[11]) было установлено, что в противоположном случае, когда число строк в матрице по порядку меньше числа столбцов, почти всегда $|S(L)|$ асимптотически совпадает с $|B(L)|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев А.И., Журавлев Ю.И., Кренделев Ф.П.* О математических принципах классификации предметов или явлений // Дискретный анализ. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. Вып. 7. С. 3–17.
2. *Дюкова Е.В.* Асимптотически-оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1982. Вып. 39. С. 165–199.
3. *Кузнецов В.Е.* Об одном стохастическом алгоритме вычисления информативных характеристик таблиц по методу тестов // Дискретный анализ. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973. Вып. 23. С. 8–23.
4. *Баскакова Л.В., Журавлев Ю.И.* Модель распознающих алгоритмов с представительными наборами и системами опорных множеств // Кибернетика. 1978. № 4. С. 131–137.
5. *Вайнцвайг М.Н.* Алгоритм обучения распознаванию образов “Кора” // Алгоритмы обучения распознаванию образов. М.: Сов. радио, 1973. С. 82–91.
6. *Дюкова Е.В.* Алгоритмы распознавания типа “Кора”: сложность реализации и метрические свойства // Распознавание, классификация, прогноз (матем. методы и их применение). М.: Наука, 1989. Вып. 2. С. 99–125.
7. *Носков В.Н., Слепян В.А.* О числе тупиковых тестов для одного класса таблиц // Кибернетика. 1972. № 1. С. 60–65.
8. *Дюкова Е.В.* О сложности реализации некоторых процедур распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1987. Т. 27. № 1. С. 114–127.
9. *Дюкова Е.В.* Асимптотические оценки некоторых характеристик множества представительных наборов и задача об устойчивости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 1. С. 122–134.
10. *Дюкова Е.В., Журавлёв Ю.И.* Дискретный анализ признаковых описаний в задачах распознавания большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1264–1278.
11. *Djukova E.V., Zhuravlev Yu.I.* Diskrete methods of information analysis and algorithm synthesis // J. Pattern Recognition and Image Analys. 1997. V. 7. № 2. P. 192–207.
12. *Дюкова Е.В., Песков Н.В.* О некоторых подходах к вычислению информативных характеристик обучающей выборки // Докл. Всеросс. Конф. “Матем. методы распознавания образов-9”. М.: АЛЕВ-В, 1999. С. 181–183.
13. *Дюкова Е.В., Песков Н.В.* О дискретных процедурах распознавания, основанных на построении покрытий классов // Докл. Всеросс. Конф. “Матем. методы распознавания образов-10”, М.: АЛЕВ-В, 2001. С. 48–51.
14. *Журавлёв Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1978. Вып. 33. С. 5–68.
15. *Долгоруков А.Ю., Дюкова Е.В.* Об одном способе вычисления информативных характеристик обучающей выборки // Докл. Всеросс. Конф. “Матем. методы распознавания образов-6”, М.: МПГУ, 1993. С. 22–23.
16. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. С.В. Яблонского, О.Б. Лупанова. М.: Наука, 1974.
17. *Сапоженко А.А.* Оценка длины и числа тупиковых д.н.ф. для почти всех не всюду определенных булевых функций // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 2. С. 279–300.