

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН
Центральный аэрогидродинамический институт
им. профессора Н.Е. Жуковского
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Международная конференция по прикладной математике
и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения
академика А.А. Дородницына

ВЦ РАН, Москва, Россия, 7–11 декабря 2010 г.

Тезисы докладов

International Conference on Applied Mathematics
and Computer Science Dedicated to Academician
A.A. Dorodnitsyn's 100-th Birthday Anniversary

CC RAS, Moscow, Russia, December 7–11, 2010

Abstracts

МОСКВА
2010

Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А.А. Дородницына (ВЦ РАН, Москва, 7–11 декабря 2010 г.): Тезисы докладов.

Организаторы

Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН

Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора
Н.Е. Жуковского

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Organizers

Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre
of RAS

Central Aerohydrodynamic Institute

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Научное издание

© Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр
им. А.А. Дородницына РАН, 2010

Программный комитет конференции

Козлов В.В. — председатель, Евтушенко Ю.Г. — заместитель председателя, Белоцерковский О.М., Журавлев Ю.И., Петров А.А., Поспелов И.Г., Пальцев Б.В., Степанов С.Я., Зубов В.И., Власов В.И., Скороходов С.Л. — секретарь

Организационный комитет конференции

Евтушенко Ю.Г. — председатель, Турчак Л.И. — заместитель председателя, Белоцерковский О.М., Журавлев Ю.И., Марчук Г.И., Ильин В.А., Моисеев Е.И., Петров А.А., Егоров И.В., Кудрявцев Н.Н., Поспелов И.Г., Флеров Ю.А., Михайлов Г.М., Власов В.И., Пальцев Б.В., Степанов С.Я., Чарахчян А.А., Шуршалов Л.В., Дородницына В.В., Селюн М.И.

Конференция проводится при финансовой поддержке Президиума РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-06107-г).

Program Committee

Kozlov V.V. (Chairman), Evtushenko Yu.G. (Vice-chairman), Belotserkovskii O.M., Zhuravlev Yu.I., Petrov A.A., Pospelov I.G., Paltsev B.V., Stepanov S.Ya., Zubov V.I., Vlasov V.I., Skorokhodov S.L. (Secretary)

Organizing Committee

Evtushenko Yu.G. (Chairman), Turchak L.I. (Vice-chairman), Belotserkovskii O.M., Zhuravlev Yu.I., Marchuk G.I., Il'in V.A., Moiseev E.I., Petrov A.A., Egorov I.V., Kudryavtsev N.N., Pospelov I.G., Flerov Yu.A., Mikhailov G.M., Vlasov V.I., Paltsev B.V., Stepanov S.Ya., Charakhch'yan A.A., Shurshalov L.V., Dorodnicyna V.V., Selyun M.I.

The Conference is supported by RAS Presidium and Russian Foundation for Basic Research (project No 10-01-06107-r).

Содержание

Механика сплошных сред

Аристов В. В., Забелок С. А., Фролова А. А. Решение уравнения Больцмана и новые кинетические эффекты	21
Аристов В. В., Ильин О. В. Неустойчивость и пространственно-временной хаос для кинетической системы	23
Архипов А. С., Бишаев А. М. Нестационарный подход к моделированию струи разреженной плазмы, исходящей из источника плазмы .	25
Богданов А. Н., Диесперов В. Н., Жук В. И., Чернышев А. В. Феномен свободного взаимодействия в трансзвуковых течениях и устойчивость пограничного слоя	28
Брушлинский К. В., Игнатов П. А., Чмыхова Н. А. Математические модели равновесия плазмы в магнитном поле ловушек-галатей	30
Брыкина И. Г., Рогов Б. В., Тирский Г. А. О континуальных моделях в переходном режиме гиперзвукового обтекания затупленных тел	32
Власов В. И., Горшков А. Б., Ковалев Р. В., Лунев В. В., Чураков Д. А. Исследования гиперзвукового обтекания тел реальным газом	34
Гайфуллин А. М., Зубцов А. В. Обобщение теоремы Прандтля–Бэтчелора на нестационарные рециркуляционные течения	36
Демьянов Ю. А. Применение переменных А.А. Дородницына и его метода при решении новых задач теории пограничного слоя	38
Диесперов В. Н., Королев Г. Л. Исследование вязкого взаимодействия при обтекании трансзвуковым потоком газа малых осесимметричных препятствий	40
Дородницын А. В. Радиационная газодинамика вблизи астрофизических объектов	42

Егоров И. В., Новиков А. В., Судочков В. Г., Федоров А. В. Численное моделирование устойчивости и восприимчивости гиперзвуковых течений вязкого газа	43
Жук В. И. Солитонные возмущения в пограничном слое	45
Жуков В. Т., Феодоритова О. Б. О методах расчета высокотемпературных процессов	47
Иванов М. Я. Метод интегральных соотношений, законы сохранения и термодинамика рабочего процесса высокотемпературных турбореактивных двигателей	50
Козлов В. В. Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность	52
Крайко А. Н. О вариационных задачах газовой динамики	52
Кузнецов М. М., Липатов И. И. Новые модели гиперзвуковых течений вязкого газа	54
Куликовский А. Г., Чугайнова А. П. Автомодельные асимптотики, описывающие распространение нелинейных волн	57
Ларина И. Н., Рыков В. А. Кинетическая модель уравнения Больцмана для двухатомного газа с вращательными степенями свободы ...	58
Милявский В. В., Фортов В. Е., Фролова А. А., Хищенко К. В., Чарахчян А. А., Шуршалов Л. В. О механизме усиления давления при увеличении пористости сред, ударно сжимаемых в конических и цилиндрических мишенях	60
Нейланд В. Я., Соколов Л. А., Шведченко В. В. Влияние температурного фактора на структуру отрывного течения в сверхзвуковом потоке газа	62
Радкевич Е. В. К проблеме усечения цепочки законов сохранения с релаксацией	62
Черемисин Ф. Г. Решение уравнения Больцмана для газа с внутренними степенями свободы молекул	64
Шалаев В. И. Преобразование А. А. Дородницына и задачи трехмерного пограничного слоя	66

Gatignol Ph. Methods of complex variable functions applied to the computation of the physical fields in the wave propagation domain	69
Pascal M. New events in stick slip oscillators behavior	71
Radev S., Onofri F. Numerical analysis of the sinuous instability of a viscous capillary jet surrounded by an nonviscous fluid	73
Slawianowski J. J. Hamiltonian systems motivated by Schroedinger equation	74
Stepanov S. Ya. Numerical investigation of limit cycles with dry friction	76
Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф. О сингулярной нелинейной самосопряженной спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	79
Азаренок Б. Н. Об одном вариационном методе построения сеток в двумерных областях	80
Аксенов А. В. Симметрии фундаментальных решений и функция Римана гиперболического уравнения второго порядка	82
Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е. Численное решение задачи о гашении колебаний балки	83
Безродных С. И., Власов В. И., Сомов Б. В. Сингулярная задача Римана–Гильберта для модели распада пересоединяющегося токового слоя	85
Безродных С. И., Власов В. И. Высокоэффективный аналитико-численный метод решения одного класса сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений	87
Белоцерковский О. М. Наша многолетняя совместная работа с Анатолием Алексеевичем Дородницыным	89
Боговский М. Е. Оценка скорости глобальной сходимости итерационного метода к сильным решениям задачи Навье–Стокса	90
Бутузов В. Ф. О сингулярно возмущенных задачах в случае кратных корней вырожденного уравнения	92

Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы (схемы расщепления) для решения нестационарных задач вязкой несжимаемой жидкости	94
Василевский Ю. В., Капырин И. В., Никитин К. Д., Данилов А. А. Консервативные и монотонные схемы для задач фильтрации и переноса в пористых средах	97
Волков А. В. Особенности применения метода Галеркина к решению уравнений Навье–Стокса	98
Гаранжа В. А. Симметризация уравнений нелинейной теории упругости	99
Голубятников А. Н. К проблеме ускорения жидкого тела	101
Гребеников Е. А., Земцова Н. И. О некоторых математических проблемах гомографической динамики	103
Гулин А. В. Об устойчивости семейства несамосопряженных разностных схем	105
Дородницын В. А. Групповые свойства конечно-разностных уравнений	107
Жура Н. А. Краевые задачи для систем уравнений главного типа с постоянными коэффициентами на плоскости	110
Заворохин Г. Л., Назаров А. И. Об упругих волнах в клине	111
Ильин В. А. О граничном управлении колебательными процессами	112
Капорин И. Е. Об эффективной реализации предобусловленных итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений на высокопроизводительных вычислительных системах	114
Керимов М. К. Специальные функции в научном исследовании академика А. А. Дородницына	115
Кобельков Г. М. О схемах расщепления для уравнений Навье–Стокса	116
Коньшин И. Н. Построение перекрытий блоков для параллельного решения симметричных линейных систем	117
Конюхова Н. Б., Курочкин С. В. О нелинейной краевой задаче Гинзбурга–Ландау для сверхпроводящей пластины в магнитном поле	118
Копачевский Н. Д. К проблеме малых движений гидросистемы “жидкость–газ”	120

Корнев А. А. Математическое моделирование процесса асимптотической стабилизации в системе четырех вихрей	123
Корпусов М. О., Свешников А. Г. О релаксации за конечное время одного нелокального уравнения	124
Матус П. П., Поляков Д. Б. Устойчивость и монотонность разностных схем для уравнений газовой динамики в инвариантах Римана ...	125
Моисеев Е. И., Холомеева А. А. Оптимальное граничное управление колебаниями струны с нелокальным граничным условием четности первого рода	126
Нечепуренко Ю. М. Анализ устойчивости нестационарных систем	128
Ольшанский М. А. Решение уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–вихрь–спиральная плотность	130
Пальцев Б. В. Об итерационном методе с расщеплением граничных условий и условиях согласования для нестационарной задачи Стокса	131
Попов В. А., Скубачевский А. Л. Локальная гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением	133
Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости	135
Рамазанов М. Д. Вычисление вариационных сплайнов в негильбертовых пространствах	137
Рахматуллин Д. Я. Приближенное интегрирование кубатурными формулами	139
Свешников А. Г., Перова Л. В. О распространении возмущений, возбуждаемых в жидкостях движущимися источниками	140
Сергеев В. С. Исследование устойчивости и динамики в системах с последствием, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра	143
Соловьев М. Б. О численных реализациях нового итерационного метода с расщеплением граничных условий решения нестационарной задачи Стокса	145
Сумбатов А. С. О стационарных движениях простейшей сервосистемы в условиях невесомости	147

Тер-Крикоров А. М. Переходные процессы от равновесия к предельному циклу в системах 2-го и 3-го порядков	149
Толстых А. И. Мультиоператорная методика построения аппроксимаций и схем высокого порядка	150
Тыртышников Е. Е. Эффективные вычисления в многомерных пространствах	152
Холодов А. С., Холодов Я. А. О высокоточных монотонных схемах для уравнений гиперболического типа	154
Цурков В. И. Расщепление и сингулярные решения уравнений сверхтекучей гидродинамики для конденсата Бозе–Эйнштейна	156
Шишкин Г. И., Шишкина Л. П. Метод асимптотических конструкций улучшенного порядка точности для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции–диффузии	158
Шкадов В. Я., Алексюк А. И., Шкадова В. П. Численное решение уравнений Навье–Стокса для задачи обтекания тел вязкой жидкостью	160

Математическое моделирование в естественных науках

Gatignol R. Asymptotic modelling of gas flows in micro-channels	163
Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. An approach for constructing a multi-body dynamics library on Modelica language	165
Албу А. Ф., Зубов В. И. Оптимальное управление тепловыми процессами	167
Архипов Б. В., Солбаков В. В., Шапочкин Д. А., Котеров В. Н. Применение математического моделирования при проведении оценок воздействия на окружающую среду	169
Бабаков А. В. Численное моделирование пространственно-нестационарных задач аэродинамики на вычислительных комплексах параллельной архитектуры	172
Белотелов Н. В. Проблема адекватности математических моделей экологических систем	174

Власов В. И., Скороходов С. Л., Фужита Яшима Х. Модель движения воздуха в нижней части тайфуна	175
Гаева З. С., Шананин А. А. Алгоритм Чебышева–Маркова–Крейна в задачах управления процессами, описываемыми уравнениями Смолуховского	178
Гущин В. А. Математическое моделирование течений несжимаемой жидкости	180
Давыдов А. А., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабо сжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах	182
Дымников В. П. О математической теории общей циркуляции атмосферы	184
Карамзин Ю. Н., Поляков С. В., Федирко В. А. Вычислительные основы моделирования электронного транспорта в микро- и наноструктурах	185
Кривцов В. М., Соловьев В. Р. Математические модели в исследовании барьерного разряда в воздухе	187
Марчук Г. И., Агошков В. И., Залесный В. Б., Пармузин Е. И., Шутяев В. П. Обратные задачи и задачи вариационной ассимиляции данных для сложных математических моделей геофизической гидродинамики	189
Марчук Г. И., Залесный В. Б., Агошков В. И., Гусев А. В., Дианский Н. А. Математическое моделирование динамики Мирового океана	191
Пархоменко В. П. Численные эксперименты с использованием глобальной климатической модели	192
Петров И. Б. Численное моделирование волновых процессов в гетерогенных средах	194
Пирумов У. Г. Математические модели нелинейных процессов в экологии и решение прикладных задач	195
Попов С. П. Численное моделирование солитонных решений нелинейных уравнений	198

Разжевайкин В. Н. Пространственные структуры и волны для уравнений реакции–нелинейной диффузии	199
Саранча Д. А. Использование точных методов в описательных науках (на эколого-биологических примерах)	201
Сушкевич Т. А. От первых научных космических экспериментов до нанодиагностики природных и космических сред	204
Тарко А. М., Усатюк В. В. Моделирование влияния экономической деятельности человечества на глобальные биосферные процессы	207
Фужита Яшима Х. Система уравнений движения воздуха с фазовыми переходами воды	209
Яковенко Г. Н. Информационное сжатие математической модели на примере взаимодействия популяций	211

Информатика и математическое моделирование в экономике

Бродский Ю. И. Инструментальная система распределенного имитационного моделирования	213
Бродский Ю. И. Колебания в нечетных конкурентных системах ...	215
Васильев Ф. П., Антипин А. С., Артемьева Л. А. Регуляризованный экстраградиентный метод решения многокритериальной задачи равновесного программирования	217
Воронцов К. В. О комбинаторной теории переобучения	219
Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А. Автоматизация проектирования летательных аппаратов в ВЦ РАН	221
Галимьянова Н. Н., Игнатьев А. Л., Коньшин И. Н., Посыпкин М. А., Сигал И. Х. Алгоритмы параллельных вычислений для решения задач дискретной оптимизации	223
Голиков А. И. Параллельные методы решения задач линейного программирования большой размерности	226
Дикусар В. В., Зубов Н. В. Качественные и численные методы в задачах управления	228
Елкин В. И. Управляемые системы, группы Ли и системы Пфаффа	230

Жадан В. Г. Мультипликативно-барьерные методы для задач полу- определенного программирования	232
Каменев Г. К., Лотов А. В. Поддержка принятия решений на основе аппроксимации многомерной границы Парето	234
Козлов М. В., Коновалов М. Г., Малащенко Ю. Е., Назаро- ва И. А. Имитационная модель управления гетерогенным вычисли- тельным комплексом	237
Матвеев И. А. Определение радужки глаза на изображении по со- гласованным максимумам проекций градиентов яркости	239
Меньшиков И. С. Теория игр и экспериментальная экономика о ра- циональности принятия решений	241
Молчанов И. Н. А. А. Дородницын — ученый и человек	243
Павловский Ю. Н. Геометрическая теория декомпозиции	244
Петров А. А. Математическое моделирование в экономике	245
Поспелов И. Г. Опыт моделирования российской экономики в период мирового финансового кризиса	246
Сенько О. В. Использование методов распознавания и интеллекту- ального анализа данных при решении задач медицинской диагностики и прогнозирования	249
Серебряков В. А. Создание программного обеспечения распределен- ных информационных систем поддержки научных исследований	251
Сухинин М. Ф. О выявлении активных индексов в задачах линейного программирования	253
Фуругян М. Г. Проблемы автоматизации проектирования вычисли- тельных систем реального времени	254
Хачатуров В. Р. Современные проблемы исследования операций ...	256
Авторский указатель	259
Авторский указатель (англ.)	263

Contents

Continuum mechanics

Aristov V. V., Zabelok S. A., Frolova A. A. Solving the Boltzmann equation and new kinetic effects	21
Aristov V. V., Ilyin O. V. Instability and spatio-temporal chaos for the kinetic system	23
Arhipov A. S., Bishaev A. M. Non-steady-state approach to the modelling of a low-density plasma jet flowing from a plasma source	25
Bogdanov A. N., Diesperov V. N., Zhuk V. I., Chernyshev A. V. Free interaction phenomenon in transonic flows and boundary layer stability	28
Brushlinsky K. V., Ignatov P. A., Chmykhova N. A. Mathematical models of plasma equilibrium in the galatea-trap magnetic field	30
Brykina I. G., Rogov B. V., Tirskiy G. A. Continuum models of hypersonic flow over blunted bodies in transitional regime	32
Vlasov V. I., Gorshkov A. B., Kovalev R. V., Lunev V. V., Churakov D. A. Investigations of hypersonic flows of real gas around bodies	34
Gaifullin A. M., Zubtsov A. V. Extension of the Prandtl–Batchelor theorem to non-stationary flows with closed streamlines	36
Demyanov Yu. A. The use of Dorodnicyn variables and method for the solution of new problems of boundary layer theory	38
Diesperov V. N., Korolev G. L. The viscous interaction investigation of transonic gas flow over a small axisymmetric element of roughness ...	40
Dorodnitsyn A. V. Radiative gas-dynamics near astrophysical objects	42
Egorov I. V., Novikov A. V., Sudakov V. G., Fedorov A. V. Numerical modelling of the stability and susceptibility of hypersonic flows of viscous gas	43
Zhuk V. I. Soliton disturbances in a boundary layer	45

Zhukov V. T., Feodoritova O. B. Some approaches to high temperature process simulation	47
Ivanov M. Ya. The method of integral relations, conservation laws and thermodynamics of the work process of high-temperature turbojet engines	50
Kozlov V. V. Vlasov kinetic equation, continuum dynamics, and turbulence	52
Kraiko A. N. Variational problems of gas dynamics	52
Kuznetsov M. M., Lipatov I. I. New models of hypersonic viscous gas flows	54
Kulikovskii A. G., Chugainova A. P. Self-similar asymptotics for solutions which describe the nonlinear waves	57
Larina I. N., Rykov V. F. Kinetic model of the Boltzmann equation for diatomic gas with rotational degrees of freedom	58
Milyavskii V. V., Fortov V. E., Frolova A. A., Khishchenko K. V., Charakhch'yan A. A., Shurshalov L. V. On the mechanism of pressure increase with increasing porosity of the media compressed in conical and cylindrical targets	60
Neyland V. Ya., Sokolov L. A., Shvedchenko V. V. Influence of temperature factor on structure of supersonic separation flows	62
Radkevich E. V. To the section problem of the chain of conservation laws with relaxation	62
Tcheremissine F. G. Solving of the Boltzmann equation for a gas with internal degrees of freedom of molecules	64
Shalaev V. I. Dorodnitsyn transformation and problems of three-dimensional boundary layer	66

Mathematical physics and computational methods

Gatignol Ph. Methods of complex variable functions applied to the computation of the physical fields in the wave propagation domain	69
Pascal M. New events in stick slip oscillators behavior	71

Radev S., Onofri F. Numerical analysis of the sinuous instability of a viscous capillary jet surrounded by an nonviscous fluid	73
Slawianowski J. J. Hamiltonian systems motivated by Schroedinger equation	74
Stepanov S. Ya. Numerical investigation of limit cycles with dry friction	76
Abramov A. A., Ul'yanova V. I., Yukhno L. F. On singular nonlinear selfadjoint spectral problem for systems of ordinary differential equations	79
Azarenok B. N. A variational grid generation method on two-dimensional domains	80
Aksenov A. V. Symmetries of fundamental solutions and Riemann function of second order hyperbolic equation	82
Atamuratov A. G., Mikhailov I. E. Numerical solution of the problem of beam oscillations damping	83
Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I., Somov B. V. A singular Riemann–Hilbert problem for a model of reconnecting current layer rupture	85
Bezrodnykh S. I., Vlasov V. I. Highly effective analytic-numerical method for solving a class of singularly perturbed systems of nonlinear differential equations	87
Belotserkovskii O. M. Our long-term teamwork with Anatoly Alekseevich Dorodnicyn	89
Bogovskii M. E. An estimate for the global convergence rate of iterations to strong solutions of the Navier–Stokes problem	90
Butuzov V. F. On singularly perturbed problems in the case of multiple roots of the degenerate equation	92
Vabishchevich P. N. Additive schemes (splitting schemes) for solving unsteady problems of incompressible viscous flows	94
Vassilevski Yu. V., Kapyrin I. V., Nikitin K. D., Danilov A. A. Conservative and monotone schemes for problems of filtration and transport in porous media	97
Wolkov A. V. Peculiarities of Galerkin method application to the solution of Navier–Stokes equations	98
Garanzha V. A. Symmetrization of finite hyperelasticity equations	99

Golubiatnikov A. N. On the problem of acceleration of a liquid body .	101
Grebenikov E. A., Zemtsova N. I. On some mathematical problems of homographic dynamics	103
Gulin A. V. On the stability of a family of non self-adjoint difference schemes	105
Dorodnitsyn V. A. Lie group symmetries of finite-difference equations	107
Zhura N. A. Boundary value problems for systems of equations of principal type with constant coefficients on the plane	110
Zavorokhin G. L., Nazarov A. I. On elastic waves in a wedge.....	111
Il'in V. A. Boundary control of oscillatory processes	112
Kaporin I. Ye. On efficient implementation of preconditioned iterative linear solvers on high-performance computer systems	114
Kerimov M. K. Special functions in the studies of academician A. A. Dorodnicyn	115
Kobelkov G. M. Splitting schemes for Navier–Stokes equations.....	116
Konshin I. N. Overlap construction for symmetric linear systems parallel solution	117
Konyukhova N. B., Kurochkin S. V. On nonlinear Ginzburg–Landau boundary value problem for a superconducting plate in a magnetic field .	118
Kopachevsky N. D. To the problem of small motions of “fluid–gas” hydrosystem	120
Kornev A. A. Mathematical modelling the asymptotic stabilization process in the four vortex system.....	123
Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. On relaxation at finite time for some nonlocal equation	124
Matus P. P., Polyakov D. B. Stability and monotonicity of difference schemes for equations of gas dynamics in Riemann invariants	125
Moiseev E. I., Kholomeeva A. A. Optimal boundary control of string oscillations with even nonlocal condition of the first kind	126
Nechepurenko Yu. M. Stability analysis of non-stationary systems ...	128

Olshanskii M. A. Solving the Navier–Stokes equations in velocity–vorticity–helical density variables	130
Paltsev B. V. On an iterative method with boundary condition splitting and compatibility conditions for the nonstationary Stokes problem	131
Popov V. A., Skubachevskii A. L. Local smoothness of generalized solutions for elliptic differential-difference equations with degeneration	133
Popov I. V., Fryazinov I. V. A method of adaptive artificial viscosity	135
Ramazanov M. D. Calculation of variational splines in non-Hilbert spaces	137
Rakhmatullin D. Ya. Approximate integration by cubature formulas .	139
Sveshnikov A. G., Perova L. V. On propagation of perturbations excited in fluid by moving sources	140
Sergeev V. S. The investigation of stability and dynamics in systems with aftereffect described by integrodifferential equations of the Volterra type	143
Soloviev M. B. Numerical implementations of a new iterative method with boundary condition splitting for the nonstationary Stokes problem .	145
Sumbatov A. S. On stationary motions of the simplest servosystem in the conditions of weightlessness	147
Ter-Krikorov A. M. Transitional process from unstable equilibrium to stable cycle in systems of two and three orders	149
Tolstykh A. I. Multioperators technique for constructing high-order approximations and schemes	150
Tyrtyshtnikov E. E. Efficient computations in multidimensional spaces	152
Kholodov A. S., Kholodov Ya. A. On high-precision monotone schemes for hyperbolic equations	154
Tsurkov V. I. Splitting and singular solutions of the two-fluid hydrodynamic equations for Bose–Einstein condensate	156
Shishkin G. I., Shishkina L. P. Asymptotic constructs method of improved order accuracy for a singularly perturbed parabolic reaction–diffusion equation	158
Shkadov V. Ya., Aleksyuk A. I., Shkadova V. P. The numerical solution of the Navier–Stokes equations for viscous fluid flow around bodies	160

Gatignol R. Asymptotic modelling of gas flows in micro-channels	163
Kosenko I. I., Aleksandrov E. B. An approach for constructing a multi-body dynamics library on Modelica language	165
Albu A. F., Zubov V. I. Optimal control of thermal processes	167
Arkhipov B. V., Solbakov V. V., Shapochkin D. A., Koterov V. N. Application of mathematical modeling at environment impact assessment	169
Babakov A. V. The numerical simulation of three-dimensional unsteady aerodynamic problems on parallel architecture computer systems	172
Belotelov N. V. The problem of the adequate models of ecological systems	174
Vlasov V. I., Skorokhodov S. L., Fujita Yashima H. A model of air motion in a lower part of typhoon	175
Gaeva Z. S., Shananin A. A. Chebyshev–Markov–Krein algorithm in control problems of the processes described by the Smoluhovsky equations	178
Gushchin V. A. Mathematical modelling of the incompressible fluid flows	180
Davydov A. A., Chetverushkin B. N., Shilnikov E. V. Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems	182
Dymnikov V. P. On mathematical theory of global atmospheric circulation	184
Karamzin Yu. N., Polyakov S. V., Fedirko V. A. Numerical basis for computer simulation of electron transport in micro- and nanostructures .	185
Krivtsov V. M., Soloviev V. R. Mathematical modelling of a surface barrier discharge in air	187
Marchuk G. I., Agoshkov V. I., Zalesny V. B., Parmuzin E. I., Shutyaev V. P. Inverse and variational data assimilation problems for complicated mathematical models of the geophysical hydrodynamics	189
Marchuk G. I., Zalesny V. B., Agoshkov V. I., Gusev A. V., Di-ansky N. A. Mathematical modelling of World ocean dynamics	191

Parkhomenko V. P. Numerical experiments with global climate model	192
Petrov I. B. Numerical modelling of wave processes in heterogeneous environment	194
Pirumov U. G. Mathematical models of nonlinear processes in ecology and solution of applied problems	195
Popov S. P. Numerical simulation of soliton solutions of nonlinear equations	198
Razzhevaikin V. N. Spatial structures and waves for reaction–nonlinear diffusion equations	199
Sarancha D. A. Using of exact methods in description sciences (on ecological-biological examples)	201
Sushkevich T. A. From pioneer science cosmic experiments to nanodiagnostics of natural and space media	204
Tarko A. M., Usatyuk V. V. Modelling the impact of economic activities of mankind on the global biosphere processes	207
Fujita Yashima H. The dynamics of air equations with water phase transitions	209
Yakovenko G. N. Information compression of mathematical model on the example of the interaction of populations	211

Computer science and mathematical modelling in economics

Brodsky Yu. I. Instrumental system for distributed simulation	213
Brodsky Yu. I. Oscillation in the odd competitive systems	215
Vasilyev F. P., Antipin A. S., Artemieva L. A. Regularized extragradient method for solving a parametric multicriteria equilibrium programming problem	217
Vorontsov K. V. On combinatorial theory of overfitting	219
Vyshinskiy L. L., Flerov Yu. A. Automating the design of aircraft in CCAS	221
Galimyanova N. N., Ignatyev A. L., Konshin I. N., Posypkin M. A., Sigal I. Kh. Parallel algorithms for discrete optimization problems	223

Golikov A. I. Parallel methods for solving large-scale linear optimization problems	226
Dikusar V. V., Zubov N. V. Qualitative and numerical methods in control problems	228
Elkin V. I. Control systems, Lie groups and Pfaffian systems	230
Zhadan V. G. Multiplicatively barrier methods for semidefinite programming problems	232
Kamenev G. K., Lotov A. V. Decision support based on approximation of the high-order Pareto frontier	234
Kozlov M. V., Konovalov M. G., Malashenko Yu. E., Nazarova I. A. Simulation model for the heterogeneous computing system management .	237
Matveev I. A. Detection of eye iris by correlated maxima of brightness gradient projections	239
Menshikov I. S. Game theory and experimental economics about rationality of decision making	241
Molchanov I. N. A. A. Dorodnicyn as a scientist and a human	243
Pavlovsky Yu. N. Geometric theory of decomposition	244
Petrov A. A. Mathematical modelling in economics	245
Pospelov I. G. Experience of modelling of the Russian economy during the global financial crisis	246
Senko O. V. The use of pattern recognition and intellectual data analysis methods in tasks of medical diagnostics and forecasting	249
Serebryakov V. A. Development of distributed current research information systems	251
Sukhinin M. F. On revealing active indices in the linear programming problems	253
Fourougian M. G. Problems of CAD of real-time systems	254
Khachaturov V. R. Contemporary problems of operations research ...	256
Author index (in Russian)	259
Author index	263

Механика сплошных сред

Continuum mechanics

Решение уравнения Больцмана и новые
кинетические эффекты

Solving the Boltzmann equation
and new kinetic effects

Аристов В. В., Забелок С. А., Фролова А. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия;

aristov@ccas.ru, serge@ccas.ru, afrol@ccas.ru

Представлены новые модификации методов прямого решения уравнения Больцмана (см. [1–3]) как детерминистические, так и монтекарловские при вычислении пятимерных интегралов столкновений. Обсуждаются различные консервативные схемы с введением понятий “макроскопическая” и “микроскопическая” консервативность. Развиваются гибридные методы с использованием кинетических уравнений в области разреженности и уравнений сплошной среды (решаемых с помощью кинетических схем) в областях плотного газа. Описываются разработанные параллельные алгоритмы для современных многоядерных суперкомпьютеров, а также алгоритмы для новой высокопроизводительной вычислительной техники, такой как устройства обработки видеоизображений (Graphics Processing Units).

На основе развитых методов решаются сложные задачи. Приводятся примеры аэродинамических задач обтекания тел, а также задач о течениях в микроканалах. Проводится сравнение с экспериментальными данными. Интерес представляет возможность изучения новых

эффектов в неравновесных течениях, которые не описываются макроскопической газовой динамикой и могут быть исследованы только с помощью кинетических методов динамики разреженных газов. Для двумерных микрополостей моделируются вихревые течения, порожденные неравномерным нагревом стенок. Особое внимание уделено аномальному эффекту переноса в неравновесных релаксационных зонах при сверхзвуковых течениях. Помимо простого одноатомного газа рассматриваются смеси простых газов, а также молекулярные газы. Рассмотрение более сложных сред позволяет получить более сложные неравновесные структуры в данной открытой системе. Решаются одномерные и двумерные задачи. Выявлены важные закономерности такого переноса на масштабах длины свободного пробега, в частности тепловой поток направлен так же, как и градиент температуры, что означает неравновесный конвективный прогрев (или охлаждение) зоны вниз по потоку в зависимости от того, положителен (или отрицателен) поток тепла на границе рассматриваемого полупространства. Также показывается, что градиент скорости может иметь тот же знак, что и соответствующая компонента тензора вязких неравновесных напряжений [4, 5]. В работе [6] определены условия, гарантирующие аномальность переноса. Обсуждается возможность сравнения полученных теоретических результатов [7] с экспериментальными тестами на основе новой техники получения неравновесных состояний с помощью “оптических решеток”.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00721-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aristov V. V.*, Direct Methods of Solving the Boltzman equation and Study of Nonequilibrium Flows. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
2. *Аристов В. В., Забелок С. А.* Детерминистический метод решения уравнения Больцмана с параллельными вычислениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 325–336.
3. *Kolobov V. I., Arslanbekov R. R., Aristov V. V., Frolova A. A., Zabelok S. A.*, “Unified solver for rarefied and continuum flows with adaptive mesh and algorithm refinement,” Journal of Computational Physics, **223**, 589–608 (2007).

4. *Аристов В. В., Забелок С. А., Фролова А. А.* Неравновесные процессы переноса в задачах о неоднородной релаксации // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 12. С. 59–75.
5. *Aristov V. V., Frolova A. A., Zabelok S. A.*, “A new effect of the nongradient transport in relaxation zones,” *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*, **88**, 30012 (2009).
6. *Аристов В. В., Паняшкин М. В.* Исследование релаксационных пространственных процессов с помощью решения кинетического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1 (в печати).
7. *Aristov V. V., Frolova A. A., Zabelok S. A.*, “Supersonic flows with non-traditional transport described by kinetic methods,” *Communications in Computational Physics* (in press).

Неустойчивость и пространственно-временной хаос для кинетической системы

Instability and spatio-temporal chaos for the kinetic system

Аристов В. В., Ильин О. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия;
aristov@ccas.ru, oilyin@gmail.com

В данной работе обсуждаются новые результаты: впервые на основе кинетической системы получены неустойчивые решения пространственной задачи, демонстрирующие турбулентные свойства [1]. Поиск пространственно-временных базовых моделей хаоса является актуальной проблемой в современной математической физике (см., например, [2]). Он связан с развитием представлений о возникновении турбулентности в различных средах и разработкой техники исследования хаотической динамики. Хорошо известная модель Лоренца [3] гидродинамического типа описывает хаотизацию во времени. Особый интерес вызывают более реалистические модели, которые способны описать пространственно-временную турбулентность, здесь можно отметить модель пространственно-временного хаоса на основе уравне-

ний Курамото–Цузуки [4]. Однако практически все известные модели апеллируют к уравнениям с квазинелинейностью переносного члена (уравнения Навье–Стокса, уравнения типа реакция–диффузия), что характерно для физических ситуаций вблизи равновесия. Вместе с тем, существуют неустойчивые процессы (включая, возможно, сверхзвуковые турбулентные течения газа), которые реализуются в условиях достаточно сильного отклонения от равновесия. Для описания таких явлений адекватным аппаратом являются кинетические уравнения с нелинейностью, связанной со столкновительным членом. Для теоретического понимания желательно построить простые обозримые модели, которые отвечали бы характеру такого физического и математического аппарата и поддавались бы всестороннему исследованию.

В настоящей работе изучается модельная система кинетических уравнений Карлемана (несмотря на простоту, она содержит аналогии закона сохранения и Н-теоремы). Ранее в [5, 6] было построено стационарное неравновесное решение краевой стационарной задачи, которое при определенных условиях обнаруживает неустойчивость в линейном приближении. Отметим важность этого факта, поскольку обычно изучают неустойчивости на фоне стационарных равновесных решений. В нелинейном случае данная задача решается численно. При уменьшении аналога числа Кнудсена прослеживаются стадии бифуркации с удвоением периода. Получен фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу. Наблюдается эффект перемежаемости, но при дальнейшем уменьшении числа Кнудсена происходит переход к полной турбулизации. Вычислены значения старших членов ляпуновских показателей (в разных режимах течения), которые оказываются положительными, что соответствует хаотическому поведению решений. Построены мгновенные и осредненные картины течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aristov V., Ilyin O.*, “Kinetic model of spatio-temporal turbulence”, *Phys. Lett. A*, **374**, 4381–4384 (2010).
2. *Малинецкий Г. Г., Пономов А. Б., Подлазов А. В.* Нелинейная динамика. М.: URSS, 2006.
3. *Lorenz E. N.*, “Deterministic nonperiodic flow”, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130–141 (1963).
4. *Kuramoto Y.*, “Chemical oscillations, waves and turbulence”, Berlin: Springer, (1984).

5. *Аристов В. В., Ильин О. В.* Изучение устойчивости решений для дискретной кинетической модели // М.: ВЦ РАН, 2006.
6. *Ильин О. В.* Неустойчивость решения краевой задачи системы Карлемана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12. С. 2076–2087.

**Нестационарный подход к моделированию
струи разреженной плазмы, исходящей
из источника плазмы**

**Non-steady-state approach to the modelling
of a low-density plasma jet flowing
from a plasma source**

Архипов А. С., Бишаев А. М.

НИИ ПМЭ, Москва, Россия; bishaev@bk.ru

В работах [1–3] были разработаны методы моделирования струйного движения разреженной плазмы, выбрасываемой в окружающее пространство из источника плазмы. Это включало в себя создание системы модельных кинетических уравнений, описывающих данное движение, постановку для их решения корректной математической задачи и построение численных методов решения этой задачи. В [4] было осуществлено решение задачи о струе в трехмерной постановке. Это расширило возможности моделирования. Существенное увеличение доступной для расчетов оперативной памяти ЭВМ позволяет теперь запоминать значения функций распределения в шестимерном пространстве, что делает возможным осуществить решение модельных кинетических уравнений в нестационарной постановке. Нужно заметить, что нестационарные методы для этой задачи являются более адекватными для описания явлений, происходящих в струе источника плазмы, а в смысле численной реализации более простыми.

В отличие от указанных выше работ моделирование проводится на

основе следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{Df}{Dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_l \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{e}{m} E_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \Theta(g/n^n - f/n^i), \\ \frac{Dg}{Dt} &= \frac{\partial g}{\partial t} + w_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = \Theta(f/n^i - g/n^n) + J_{nn}, \quad \Theta = n^i n^n \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f = f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$, $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\vec{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть координаты положения иона в фазовом пространстве и нейтралов, $g = g(t, \vec{x}, \vec{w})$ ($\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ — положение нейтрала в скоростном пространстве). Основные макропараметры: плотность $n = n(t, x, y, z)$, макроскопическая скорость $\vec{u} = \{u_l(t, x, y, z)\}$, $l = 1, 2, 3$ (x, y, z), температура $T = T(t, x, y, z)$, — определяются через интегралы по соответствующему скоростному пространству от функций распределения ионов или нейтралов. Фигурирующая в (1) величина θ есть частота столкновений на одну частицу. Она определена в [2]. Присутствующий в (1) J_{nn} есть интеграл столкновений нейтралов между собой. Как и ранее, он моделируется так же, как и в модели Крукса (см. [2]). Для замыкания модели, как и ранее, использовалось обобщение гипотезы “термализованного потенциала”.

Граничные условия для системы (1) принимались теми же, что и ранее, за исключением того, что макропараметры в максвелловских функциях могут зависеть от времени.

В предполагаемом докладе речь пойдет о построении численного метода решения задачи (1). Автоматическое применение методов расщепления, развитых в динамике разреженного газа оказалось невозможным, так как они не могли правильно воспроизвести граничное условие, которое в основном определяет структуру решения вниз по потоку. Это видно из интегрального представления решения первого уравнения (1). Оно следующее:

$$f(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = f_b + \int_0^t g_1(\vec{x}(s), \vec{\xi}(s)) \exp \left\{ - \int_s^t \nu_1(\vec{x}(\sigma)) d\sigma \right\} ds,$$

где $\nu_1 = \theta n^n$, $g_1 = g\theta/n^n$, $f_b = \tilde{\Theta}((R_1 - \bar{r})(\bar{r} - R_2))\tilde{\Theta}(\vec{\xi}_z)\bar{f}_b(\bar{t}, \vec{x}, \vec{\xi}) \times \times \tilde{\Theta}(\vec{z}(t_0)) \exp\{-\int_0^t \nu_1(q, \vec{x}(q))dq\}$, $\bar{r} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$. Здесь $\bar{f}_b(\bar{t}, \vec{x}, \vec{\xi})$ есть зависящая от соответствующих переменных функция распределения ионов, $\vec{x}(s) = \vec{x} - \vec{\xi}(t-s) + \int_s^t (q-s) \vec{E}(q, \vec{x}(q))dq$, $\vec{\xi}(s) = \vec{\xi} - \int_s^t \vec{E}(q, \vec{x}(q))dq$,

где $\vec{E} = e/m\vec{E}$, $\bar{t} = \bar{t}(z, \xi_z)$ — неявная функция, определяемая соотношением $\tilde{z}(t) = 0$. Надчеркивание над соответствующей переменной означает, что она зависит от $\bar{t}$. Представляемый численный метод основан на расщеплении системы (1) на части, определяющие влияние границы и перезарядки соответственно.

Работа выполнена при поддержке гранта “Развитие научного потенциала Высшей школы” (проект № 2.11/500).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бишаев А. М. Численное моделирование струи разреженного слабо ионизованного газа, выходящего из кольцевого отверстия // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. № 7. С. 1109–1118.
2. Бишаев А. М., Калашников В. К., Ким В. Численное исследование струи разреженной плазмы стационарного ускорителя с замкнутым дрейфом электронов (УЗДП) // Физ. плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 6. С. 698–708.
3. Бишаев А. М., Калашников В. К., Ким В., Шавыкина А. В. Численное моделирование плазменной струи стационарного плазменного двигателя, распространяющейся в среде низкого давления // Физ. плазмы. 1998. Т. 24. № 11. С. 989–995.
4. Архипов А. С., Бишаев А. М. Численное моделирование в трехмерной постановке струи плазмы, выходящей в окружающее пространство из стационарного плазменного двигателя // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47. № 3. С. 491–506.

Феномен свободного взаимодействия в трансзвуковых течениях и устойчивость пограничного слоя

Free interaction phenomenon in transonic flows and boundary layer stability

Богданов А. Н.¹, Диесперов В. Н.², Жук В. И.³,
Чернышев А. В.²

¹ *Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;*

² *МФТИ, Долгопрудный, Россия; diesvn@list.ru*

³ *ВЦ РАН, Москва, Россия; zhuk@ccas.ru*

Уравнения асимптотической модели, описывающей нестационарное свободное вязко–невязкое взаимодействие пограничного слоя и внешнего трансзвукового течения, восходящей в своих идеях к классической работе В.Я. Нейланда [1], были получены О.С. Рыжовым [2] при помощи сращиваемых асимптотических трансзвуковых разложений в приближении больших значений чисел Рейнольдса («трехпалубная» модель нестационарного свободного вязко–невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях). Исследования свободного взаимодействия в трансзвуковом диапазоне показали его значительные отличия и от дозвукового, и от сверхзвукового взаимодействия [3–5]: был обнаружен рост слабых возмущений трансзвукового пограничного слоя вне зависимости от того, превышена скорость звука или нет (для сверхзвукового режима рост возмущений не установлен). В отличие от дозвукового случая акустическое воздействие на свободно взаимодействующее в трансзвуковом режиме течение порождает волны Толлмина–Шлихтинга и при гладких граничных условиях. Результаты анализа дисперсионного уравнения в математической среде MatLab позволили обнаружить особенность поля дисперсионных кривых — особую точку типа седла.

Классическая трехпалубная модель взаимодействия в трансзвуковом диапазоне скоростей имеет ряд ограничений, обусловленных особенностями входящего в модель уравнения Линя–Рейснера–Цянля (ЛРЦ) [6]. Именно, уравнение ЛРЦ не позволяет правильно описать распространение возмущений вниз по потоку: они игнорируются мо-

делью, поскольку приобретают в ней бесконечную скорость. В связи с этим было предложено [6] использовать в модели взаимодействия уравнение ЛРЦ с сохраненным (при его выводе из полных уравнений для потенциала скорости) членом со второй производной по времени (модифицированное уравнение ЛРЦ). Модифицированное уравнение ЛРЦ получается сингулярным, и формальное пренебрежение указанным членом (более высокого порядка малости) приводит к вырождению модифицированного уравнения ЛРЦ в вырожденное гиперболическое уравнение, следствием чего являются указанные выше недостатки описания течения. Включение модифицированного уравнения ЛРЦ в модель нестационарного свободного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях позволило получить новую модель нестационарного трансзвукового свободного вязко-невязкого взаимодействия (модифицированную модель взаимодействия). Исследование на модифицированной модели различных взаимодействующих течений: их устойчивость, в том числе при внешнем воздействии (например, акустическом), — над упругой поверхностью показало существование в поле течения возмущений, выпадающих из рассмотрения при традиционном анализе. Компьютерный анализ дисперсионного уравнения показал новые особенности поведения дисперсионных кривых: переключение различных мод друг на друга при изменении величины сингулярного параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейланд В. Я.* Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва // III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Сб. аннотаций докладов съезда. М.: Наука, 1968. С. 224.
2. *Рыжов О. С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // ДАН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1091–1094.
3. *Терентьев Е. Д.* Нестационарные задачи пограничного слоя со свободным взаимодействием. Дисс. на соиск. уч. степ. доктора физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
4. *Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003.
5. *Жук В. И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.
6. *Богданов А. Н., Диеперов В. Н.* Моделирование нестационарного трансзвукового течения и устойчивость трансзвукового пограничного слоя // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 3. С. 394–403.

Математические модели равновесия плазмы в магнитном поле ловушек-галатей

Mathematical models of plasma equilibrium in the galatea-trap magnetic field

Брушлинский К. В.¹, Игнатов П. А.², Чмыхова Н. А.¹

¹ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; brush@keldysh.ru

²НИЯУ – МИФИ, Москва, Россия

Одна из основных проблем управляемого термоядерного синтеза (УТС) — удержание сжатой и нагретой плазмы магнитным полем. С ней связаны разработки магнитных ловушек и исследования равновесных конфигураций плазмы и поля в них. Перспективный класс ловушек предложен А.И. Морозовым и назван “галатеями”: в них проводники с током, создающим магнитное поле, погружены в плазменный объем, что расширяет возможности геометрии поля и позволяет ожидать более высоких параметров удержания. Пример галатей — тороидальная ловушка “Пояс” [1], значительную часть исследований которой удобно вести в распрямленной модели: плазменный цилиндр с расположенными внутри него двумя проводниками с током, параллельными оси.

Математическое моделирование и многочисленные расчеты магнитоплазменных конфигураций в ловушках в приближении магнитной газодинамики (МГД) включает плазмостатические и плазмодинамические задачи. Первые имеют дело со строго равновесными конфигурациями. В двумерных задачах, обязанных симметрии, математический аппарат сводится к одному скалярному уравнению второго порядка эллиптического типа с нелинейной правой частью — уравнению Грэда–Шафранова. Краевые задачи с ним содержат нетривиальные вопросы существования, единственности и устойчивости, общие для теории полулинейных уравнений и различных приложений в моделях процессов реакции и диффузии. Вместе с описанием численного алгоритма и подробными результатами расчетов конфигураций в ловушке “Пояс” эти вопросы изложены в докладе.

Модель с уравнением Грэда–Шафранова позволяет относительно легко рассчитать конфигурации, удовлетворяющие различным требо-

ваниям, что связано с недоопределенностью задач — свободой выбирать две произвольные функции одной переменной. Вопрос о том, как сформировать такие конфигурации, решается в терминах плазмодинамической модели, т.е. численного решения нестационарных МГД-задач о формировании равновесия. В докладе представлена одномерная модель динамики плазмы в окрестности одного прямолинейного проводника с током в связи с общим для всего класса ловушек-галатей вопросом — как избежать контакта проводников с горячей плазмой. Показано, что в плазме конечной проводимости строго равновесных конфигураций с изолированными проводниками существовать не может. Цель достигается в нестационарной модели с возрастающим на начальной стадии процесса током в проводнике [2]. При этом в плазме вблизи проводника возникает вертикальный ток обратного направления, который, взаимодействуя с азимутальным магнитным полем, отжимает плазму в нужном направлении. Затем наступает квазистационарная стадия с постоянным током в проводнике, на которой образовавшаяся конфигурация кольцевого сечения медленно (при высокой проводимости плазмы) разрушается вследствие диффузии магнитного поля.

Вопросы, рассматриваемые в докладе, изложены в последних статьях авторов [3, 4]. См. также книгу [5] с подробной библиографией на данную тему.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00181 и № 09-01-12056).

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И., Франк А. Г. Тороидальная мультипольная ловушка-галатей с азимутальным током // Физ. плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
2. Дудникова Г. И., Морозов А. И., Федорук М. П. Численное моделирование прямых плазменных конфигураций-галатей типа “Пояс” // Физ. плазмы. 1997. Т. 23. № 5. С. 387–396.
3. Брушлинский К. В., Чмылова Н. А. О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек-галатей // Матем. моделирование. 2010. Т. 22. № 6. С. 3–14.
4. Брушлинский К. В., Игнатов П. А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки “Галатей-Пояс” // ЖВФимФ. 2010. Т. 50. № 12 (в печати).
5. Брушлинский К. В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2009.

О континуальных моделях в переходном режиме гиперзвукового обтекания затупленных тел

Continuum models of hypersonic flow over blunted bodies in transitional regime

Брыкина И. Г.¹, Рогов Б. В.², Тирский Г. А.³

¹НИИ механики МГУ, Москва, Россия; brykina@imec.msu.ru

²ИММ РАН, Москва, Россия; rogov@imamod.ru

³НИИ механики МГУ, Москва, Россия; tirskiy@imec.msu.ru

Задачи гиперзвуковой аэротермодинамики в потоках разреженных газов связаны с исследованием движения космических аппаратов, зондов и метеороидов в верхних слоях атмосферы Земли и других планет и характеризуются большими числами Кнудсена Kn или малыми числами Рейнольдса Re . Дается обзор различных подходов к решению таких задач — континуального (решение уравнений Навье–Стокса или их упрощенных вариантов), кинетического (решение уравнения Больцмана или его упрощенных вариантов), методов прямого статистического моделирования Монте-Карло, решений в свободномолекулярном режиме обтекания, а также различных гибридных континуально-кинетических методов.

Основное внимание уделяется континуальному подходу решения двумерных задач гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном от континуального к свободномолекулярному режиму обтекания с использованием двух асимптотически согласованных моделей: вязкого ударного слоя (ВУС) и тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС). Модели ТВУС и ВУС были предложены соответственно Ченгом и Дэвисом и широко использовались в дальнейшем при больших числах Re . Путем асимптотического анализа показано, что уравнения ТВУС и ВУС справедливы, т.е. выводятся из уравнений Навье–Стокса, также и при малых числах Re . Выводятся асимптотически корректные граничные условия на ударной волне и на поверхности тела для моделей ВУС и ТВУС. Путем асимптотического анализа при малых числах Re получено простое аналитическое решение для коэффициентов трения, теплопередачи и давления на поверхности в зависимости от параметров набегающего потока и геометрии обтека-

емого тела, приближающееся при $Re \rightarrow 0$ к решению в свободномолекулярном потоке.

Показано, что использование асимптотически корректных граничных условий на ударной волне и на поверхности тела с учетом скорости скольжения и скачка температуры расширяет область применимости ВУС для расчета теплопередачи и трения в наветренной области холодного затупленного тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью, до высот $\sim 140 \div 150$ км на траектории входа в атмосферу Земли космического аппарата *Space Shuttle* (при радиусе затупления ~ 1 м), или до $Kn_\infty \sim 15 - 20$. Модель ТВУС дает достоверные результаты для коэффициентов теплопередачи и трения в переходном режиме обтекания на высотах более 100 км, или $Kn_\infty \geq 0.1$, и дает для этих коэффициентов правильный предельный переход к значениям в свободномолекулярном потоке при $Kn_\infty \rightarrow \infty$. При $0.1 < Kn_\infty < 10$ обе модели дают достоверные результаты, что дает возможность использовать модель ВУС (как более точную) при малых числах Kn_∞ и при $Kn \sim 1$ переходить к модели ТВУС, дающей правильную асимптотику при больших числах Kn_∞ . Таким образом, предлагается единый континуальный метод для предсказания теплового потока и трения на затупленных телах, обтекаемых гиперзвуковым потоком газа, при любых числах Kn_∞ , который базируется на использовании только континуальных моделей течения, как альтернатива континуально-кинетическим методам, требующим существенно больших затрат вычислительных ресурсов. Теоретические результаты подтверждаются сравнениями с решениями кинетических уравнений, решениями методом прямого статистического моделирования Монте-Карло и решениями в свободномолекулярном режиме обтекания.

Работа выполнена при поддержке Роснауки (гос. контракты 02.740.11.0615 и П594) и РФФИ (проект № 09-01-00728).

Исследования гиперзвукового обтекания тел реальным газом

Investigations of hypersonic flows of real gas around bodies

Власов В. И., Горшков А. Б., Ковалев Р. В., Лунев В. В.,
Чураков Д. А.

ЦНИИмаш, Королев, Московская область, Россия;
lunev_vv@mail.ru

Приводятся и обсуждаются полученные авторским коллективом результаты численных исследований обтекания летательных аппаратов (ЛА) различных форм гиперзвуковым потоком реального газа. Под реальным в данном случае подразумевается газ, в котором равновесным или неравновесным образом протекают физико-химические процессы (диссоциация молекул, их и атомов ионизация, возбуждение колебательных и электронных уровней, испускание и поглощение излучения), сопутствующие полетам ЛА в атмосфере Земли или других планет с гиперзвуковыми скоростями (до 12 км/с), соответствующими возвращению аппаратов баллистического или планирующего спуска с земных, лунных или марсианских орбит. В зависимости от высоты полета используется ламинарная или турбулентная (в рамках дифференциальных моделей) система уравнений Навье–Стокса. В качестве основных объектов исследований выбраны проектируемые или перспективные формы ЛА.

Для решения этих задач используются две численные методики, различающиеся способом дискретизации исходных дифференциальных уравнений Навье–Стокса — конечно-объемный и конечно-разностный методы.

Физико-химическая модель неравновесного воздуха в общем случае включает в себя пять атомных и молекулярных компонентов (N , N_2 , O , O_2 , NO), их ионы, электроны, электронную температуру и колебательные температуры молекул. При этом возможны и некоторые физически обоснованные упрощения этой модели, приводящие к сокращению числа неизвестных. Кроме того, используется приближенная диффузионная модель, использующаяся закон Фика и постоян-

ные числа Шмидта. Такое допущение, существенно упрощая решение громоздких многомерных задач, дает, тем не менее, удовлетворительные результаты при определении тепловых потоков — основной цели наших исследований. Для более точного определения диффузионных потоков в дальнейшем предполагается использовать соотношения Стефана–Максвелла.

Важную роль при этом играют гетерогенные реакции, определяющие граничные условия для компонентов на поверхности теплозащитных покрытий ЛА.

Сформулированную газодинамическую задачу замыкает набор данных или формул для коэффициентов скоростей реакций, определяемых, как правило, экспериментально. Эти данные пока еще недостаточно полны и достоверны и поэтому обрисованная модель нуждается в апробации, причем желательно в натурных, летных условиях. Тем не менее результаты расчетов, выполненных с применением данной модели, в целом находятся в удовлетворительном согласии с известными такими экспериментами, что и позволяет использовать соответствующие модели и основанные на них методы расчета для выполнения заказов проектных организаций.

При решении задач радиационной газовой динамики основные трудности связаны с чрезвычайно неравномерным, даже внешне, “хаотичным” распределением коэффициентов поглощения воздуха по частотам. И эти трудности усугубляются для оптически плотных газовых объемов, радиационное поле в которых описывается интегродифференциальными уравнениями. Пока эти трудности более или менее преодолены для равновесных высокотемпературных течений. Для неравновесных же задач требуется решение ряда вопросов постановочного характера. На сравнительно низких высотах полета (меньших 45 км, например, в зависимости от размера тела) в пограничном слое или в зонах отрыва начинается переход ламинарных течений в турбулентные. Несмотря на огромные усилия, этот процесс перехода все еще недостаточно изучен, хотя весьма большой набор экспериментальных данных по этому вопросу позволяет делать соответствующие прогнозы в типичных ситуациях. Что же касается развитых турбулентных течений, то известные дифференциальные модели турбулентности при должной адаптации дают приемлемые для практики результаты.

На основе изложенной постановки сформулированных задач вы-

полнена большая серия демонстрационных расчетов, проведен газодинамический анализ результатов и проведена их апробация с привлечением различных экспериментальных данных.

Обобщение теоремы Прандтля–Бэтчелора на нестационарные рециркуляционные течения

Extension of the Prandtl–Batchelor theorem to non-stationary flows with closed streamlines

Гайфуллин А. М., Зубцов А. В.

ЦАГИ, Жуковский, Россия; amgaif@mail.ru

Существуют области течения жидкости, в которых линии тока являются замкнутыми. Такие рециркуляционные течения образуются, например, при обтекании вогнутых углов, в ближнем следе за донным срезом, при обтекании тел с вырезом. Каждому рециркуляционному течению можно поставить в соответствие характерное число Рейнольдса, равное отношению циркуляции скорости по границе области к кинематическому коэффициенту вязкости. При больших числах Рейнольдса рециркуляционное течение описывается в главном приближении решением уравнений идеальной жидкости. Из этих уравнений следует, что для плоского стационарного течения завихренность зависит только от функции тока. В работах Прандтля [1] и Бэтчелора [2] было установлено, что завихренность в зоне рециркуляционного течения постоянна. Значение завихренности определяется из условия цикличности течения в пограничных слоях, ограничивающих область рециркуляционного течения [2, 3].

В данном докладе рассматривается случай, когда плоское течение жидкости в рециркуляционной области является медленно меняющимся с течением времени. Для таких течений удалось получить

интегральное соотношение, показывающее, что причинами изменения циркуляции скорости по контуру, совпадающему с линией тока, являются расширение контура и диффузия завихренности через его границу. В стационарном случае из полученного интегрального соотношения следует теорема Прандтля–Бэтчелора.

Далее рассматриваются плоские рециркуляционные течения, которые автомодельны по времени. Показано, что возможны только два класса автомодельных течений. Для них интегральные соотношения превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения, не зависящие от времени. Первый класс соответствует степенной автомодельности, при которой размер рециркуляционной области растет пропорционально корню из времени, а циркуляция меняется степенным образом. Второй класс соответствует экспоненциальной автомодельности: размер области не меняется, а циркуляция растет по экспоненциальному закону.

Приводится ряд конкретных задач, для которых реализуется степенной класс автомодельных решений: о пластинке с движущейся против потока поверхностью, о диффузии двух вихрей, об обтекании расширяющейся пластины. В случае экспоненциальной автомодельности завихренность оказывается линейной функцией функции тока. Для всех задач получено численное решение уравнений Навье–Стокса, хорошо согласующееся с автомодельным поведением характеристик течения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-08-00375 и № 10-01-00516) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Государственный контракт № 02.740.11.0203).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prandtl L.* “Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung” // *Vehr. d. III Intern. Math. Kongr.* — Heidelberg, (1904).
2. *Batchelor G. K.* “On Steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number” // *J. Fluid Mech.* (1956). V. 1. Pt. 2. Pp. 177–190.
3. *Нейланд В. Я., Сычев В. В.* “К теории течений в стационарных срывных зонах” // *Ученые записки ЦАГИ.* 1970. Т. I. № 1. С. 14–23.

**Применение переменных А.А. Дородницына
и его метода при решении новых задач
теории пограничного слоя**

**The use of Dorodnicyn variables and method
for the solution of new problems
of boundary layer theory**

Демьянов Ю. А.

МГУЛ, Мытищи, Россия

1. Применение в работах [1–3] переменных Дородницына и результатов его работы для определения тепломассообмена в потоках диссоциированного воздуха путем перехода в уравнениях к неизвестной функции теплосодержания i и аппроксимации закона вязкости μ в виде $\mu \cdot \rho \sim i^{1-n}$, где ρ — плотность.

2. Разработка в [4] способа построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий на стенке и во внешнем потоке.

3. Использование в [5, 6] переменной А.А. Дородницына в нестационарных задачах путем введения новой фиктивной поперечной скорости, обеспечивающей для безградиентных течений сведение соответствующих уравнений пограничного слоя для газа к уравнениям для несжимаемой жидкости.

4. Постановка новых задач динамики формирования пограничных слоев и следов за ударными волнами и контактными разрывами. Приближенные и некоторые точные решения поставленных задач [5–10].

5. Анализ возникающего при переходе к функции и переменным Крокко (см. [11]) в автомодельных задачах нестационарного пограничного слоя, описываемого уравнением параболического типа с вырождением на линии $\bar{V}_x = \xi$, где $\xi = x/(V_\infty t)$, и их решение методом А.А. Дородницына в каждой из областей, где коэффициент при первой производной $d\omega/d\xi$ не меняет знака, где ω — безразмерное напряжение трения (с сопряжением решений на линии вырождения) [12, 13]. Эффективность применения метода установления по фиктивному времени для решения пробных задач [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А. Об одном применении переменных в теории пограничного слоя А.А. Дородницына // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 4.
2. Демьянов Ю. А. Трение и теплообмен в потоке диссоциированного воздуха // Труды НИИ-88. 1956. № 2(14).
3. Демьянов Ю. А. Трение и теплообмен в потоке диссоциированного воздуха при наличии уноса массы с поверхности // Труды НИИ-88. 1957. № 3(2).
4. Демьянов Ю. А. Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 4.
5. Демьянов Ю. А. Автомодельные задачи неустановившегося пограничного слоя сжимаемого газа // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6.
6. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине за движущимся скачком уплотнения // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3.
7. Демьянов Ю. А. Замещение пограничных слоев при смене жидкостей или газов // ПММ. 1959. Т. 22. Вып. 2.
8. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. Применение уравнений нестационарного смещения к некоторым задачам аэродинамики // МЖГ. 1966. Вып. 3.
9. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. О формировании стационарного смещения в аэродинамическом следе // МЖГ. 1967. Вып. 3.
10. Демьянов Ю. А., Покровский А. Н., Фролов Л. Г. Формирование следа при сходе ударной волны с кромки пластины // МЖГ. 1972. Вып. 4.
11. Lam N., Crocco L. Note on the shock induced unsteady laminar boundary layer on a semiinfinite flat plate // 1. Aero/Space Sci. 1959, 26, № 1.
12. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Применение метода интегральных соотношений к решению сингулярных уравнений параболического типа, встречающихся в теории пограничного слоя // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15. № 2.
13. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Численное решение задачи формирования пограничного слоя на пластине за движущейся ударной волной // МЖГ. 1976. Вып. 1.
14. Демьянов Ю. А., Демьянов А. Ю., Касымов Ш. А. Численное исследование нестационарных автомодельных задач пограничного слоя с зоной отрыва // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21. № 5.

**Исследование вязкого взаимодействия
при обтекании трансзвуковым потоком газа
малых осесимметричных препятствий**

**The viscous interaction investigation of transonic gas
flow over a small axisymmetric element of roughness**

Диесперов В. Н.¹, Королев Г. Л.²

¹*МФТИ, Долгопрудный, Россия; diesvn@list.ru*

²*ЦАГИ, Жуковский, Россия; glk777@mail.ru*

В 1946 г. в экспериментальных исследованиях [1] было получено, что взаимодействие падающей ударной волны с ламинарным пограничным слоем носит сложный характер и не укладывается в классическое представление о пограничном слое. Они также показали, что пограничный слой существенно влияет на формирование трансзвукового течения. Дальнейшие исследования подтвердили эти выводы [2]. Теория свободного взаимодействия, в рамках которой были получены уравнения, описывающие механизм взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, появилась в конце шестидесятых годов прошлого века в работах [3, 4]. Уравнения, описывающие свободное взаимодействие внешнего стационарного трансзвукового потока с ламинарным пограничным слоем, были впервые выведены в [5].

В данной работе рассматривается трансзвуковое осесимметричное обтекание тела вращения с малой неровностью поверхности в рамках теории свободного взаимодействия. В большей своей части осесимметрическое тело представляет собой цилиндр, на котором расположена неровность. Высота неровности предполагается намного меньше радиуса цилиндра и такой, что она индуцирует в своей окрестности течение, описываемое теорией свободного взаимодействия. Согласно этой теории течение имеет трехслойную структуру. В верхней невязкой области течение описывается уравнением Кармана–Гудерлея для потенциала возмущенной скорости, в нижнем вязком пристеночном слое течение описывается уравнениями пограничного слоя. В среднем промежуточном слое давление и наклон линий тока передаются поперек него в главном приближении без изменений. Распределение давления заранее неизвестно и определяется в совместном решении

уравнений, описывающих течение в вязком подслое и невязком внешнем потоке.

Цель работы — изучить влияние величины радиуса тела и формы неровности на течение в области свободного взаимодействия при условии, что радиус цилиндра и поперечный размер области свободного взаимодействия одного порядка. В этом случае влияние трехмерности течения проявляется уже в первом приближении. Особое внимание уделяется структуре возникающих во внешней потенциальной области сверхзвуковых зон и замыкающих их ударных волн, а также зон локального отрыва, если они появляются в нижнем вязком подслое пограничного слоя.

В частности показано, что с ростом радиуса цилиндра при фиксированной высоте неровности существенно растет интенсивность ударной волны, но при этом положение основной ударной волны меняется слабо. Картина течения в этом случае качественно совпадает с полученной в экспериментах [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00999).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liepmann H. F.* "The interaction between boundary layer and shock waves in transonic flow," *Aeronaut. Sci.*, **13**, No. 2, 623-638 (1946).
2. *Moulden T. H.* *Fundamentals of Transonic Flow*, Wiley, N.Y., 1984, p. 332.
3. *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Известия АН СССР. МЖГ*. 1969. № 4. С 53–57.
4. *Stewartson K., Williams P. G.* "Self-induced separation," *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **312**, No. 509, 181–206 (1969).
5. *Messiter A. F., Feo A., Melnic R. E.* "Shock-wave strength for separation of laminar boundary layer at transonic speeds," *AIAA Journal*, **9**, No. 6, 1197–1198 (1971).

Радикационная газодинамика вблизи астрофизических объектов

Radiative gas-dynamics near astrophysical objects

Дородницын А. В.

NASA Goddard Space Flight Center, USA

Исследование магнито- и газодинамических течений вблизи компактных гравитирующих объектов, таких как сверхмассивные черные дыры в активных галактических ядрах, сопряжено с необходимостью учитывать давление излучения. В последнее время достигнут существенный прогресс в численном решении полной системы уравнений радиационной газодинамики в двух- и трехмерной постановке для физических условий, характерных для плазмы в так называемых аккреционных дисках. В дальнейшем полученные решения используются в качестве начальных данных для полного трехмерного решения задачи о переносе рентгеновского излучения, в 10^5 рентгеновских линий, учитывая поляризацию излучения.

Дается обзор результатов, полученных автором в теории переноса излучения в сильных гравитационных полях, численного моделирования переноса излучения и численного решения уравнений радиационной газодинамики. Стоит отметить, что следующее поколение космических рентгеновских обсерваторий будут впервые способны детектировать поляризацию рентгеновского излучения от астрофизических объектов, таких как аккреционные диски. В результате станет впервые возможным, сопоставляя полученные теоретические спектры с экспериментальными данными, получать информацию о таких фундаментальных характеристиках черной дыры, как ее масса и угловой момент (спин).

Численное моделирование устойчивости и восприимчивости гиперзвуковых течений вязкого газа

Numerical modelling of the stability and susceptibility of hypersonic flows of viscous gas

Егоров И. В., Новиков А. В., Судокров В. Г., Федоров А. В.

ЦАГИ, Жуковский, Россия; ivan_egorov@tsagi.ru

Предсказание ламинарно-турбулентного перехода — важная задача для проектирования и расчета сопротивления высокоскоростных летательных аппаратов. Ранний переход может привести к уменьшению эффективности силовой установки, к увеличению вязкого трения (которое может составлять более 30% полного сопротивления), к ухудшению производительности системы управления. В связи с этим стратегия достижения экономически жизнеспособных аэрокосмических систем требует применения технологий ламинаризации потока, которые существенно затягивают переход.

В двумерном высокоскоростном пограничном слое первая или вторая моды являются доминирующими при достаточно малых градиентах давления (когда поперечная неустойчивость и вихри Гертлера не проявляются). Первая мода связана с волнами Толлмина–Шлихтинга, а вторая мода — одна из семейства акустических мод. Первая мода может быть стабилизирована охлаждением поверхности, отсосом, благоприятным градиентом давления. Вторая мода начинает доминировать в пограничном слое при достаточно больших числах Маха (приблизительно $M > 4$). В противоположность первой моде охлаждение поверхности дестабилизирует вторую моду. Так как температура поверхности типичного высокоскоростного летательного аппарата существенно ниже, чем температура теплоизолированной поверхности, неустойчивость первой моды подавляется естественным образом, а возмущения второй моды растут быстрее и могут вести к раннему ламинарно-турбулентному переходу. Это говорит о том, что концепция затягивания перехода должна быть связана с неустойчивостью второй моды.

В настоящей работе исследовалось развитие возмущений второй

моды с помощью метода прямого численного моделирования. Численное решение получено с использованием неявного метода конечного объема, который основан на TVD-схеме второго порядка аппроксимации, что позволяет рассматривать в том числе и сложные конфигурации. На первом этапе получено стационарное решение уравнений Навье–Стокса, которое удовлетворяет невозмущенным граничным условиям. Для исследования восприимчивости и устойчивости пограничного слоя начальные возмущения вводятся с помощью граничных условий (локальный периодический вдув-отсос на стенке, быстрая и медленная акустические волны, энтропийная волна и волна завихренности).

В работе проведено исследование восприимчивости и устойчивости двумерного сверхзвукового пограничного слоя на следующих конфигурациях: плоской пластине, конусе, в угле сжатия и на плоской пластине с волнообразной поверхностью.

При обтекании волнообразной поверхности возмущения стабилизируются. Это связано с тем, что волнообразная стенка трансформирует течение в пограничном слое в течение в слое смещения, соединяющем близлежащие выемки. На рис. 1 показаны возмущения давления на плоской пластине, а на рис. 2 — аналогичные возмущения давления на волнообразной поверхности. В работе показано, что правильно сконструированная волнообразная поверхность может привести к уменьшению возмущений в высокоскоростном пограничном слое, что может существенно увеличить ламинарный участок.

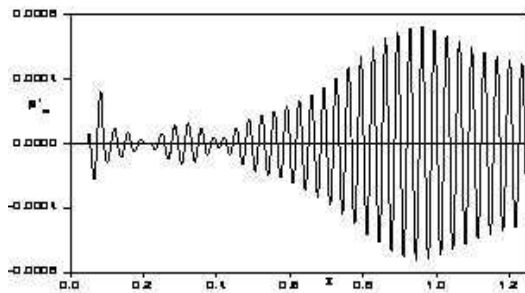


Рис. 1. Возмущения давления на плоской пластине

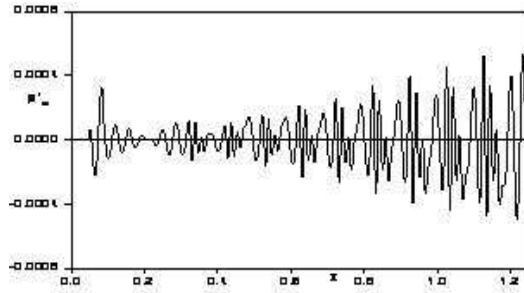


Рис. 2. Возмущения давления на волнообразной поверхности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-08-00472) и ФЦП ННПКР ГК № 02.740.11.0203.

Солитонные возмущения в пограничном слое Soliton disturbances in a boundary layer

Жук В. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; zhuk@ccas.ru

Останавливаясь на исторической ретроспективе поиска решений принципиальной проблемы движений жидкости и газа при больших числах Рейнольдса, нельзя не отметить, что вплоть до настоящего времени магистральным путем является применение классической теории пограничного слоя [1]. Однако иерархическая конструкция пограничного слоя Л. Прандтля (теория слабого взаимодействия) в ряде ситуаций требует определенного пересмотра. Далеко идущие обобщения классической теоретической схемы удалось реализовать в задачах так называемого свободного взаимодействия внешнего потока с пограничным слоем [2].

Развитые в [2] представления позволили провести асимптотический анализ [3] нелинейных пульсационных полей, существенным компонентом которого является обоснование применимости уравнений Бюргера и Бенджамина–Оно к описанию эволюции возмущений для

сверх- и дозвуковых диапазонов. Что касается трансзвуковых движений, то флуктуационная картина описывается интегро-дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_S \frac{\partial A(\tau, \xi)}{\partial \xi} \frac{d\tau d\xi}{\sqrt{(t-\tau)(x-\xi) - K_\infty(t-\tau)^2}}, \quad (1)$$

где K_∞ — трансзвуковой параметр, а сектор интегрирования S устанавливается неравенствами

$$\tau < t, \quad \xi < x - K_\infty(t - \tau).$$

Если $K_\infty \rightarrow +\infty$, уравнение (1) сводится к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{K_\infty}} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

В другом предельном случае $K_\infty \rightarrow -\infty$ уравнение (1) приобретает вид уравнения Бенджамина–Оно

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi \sqrt{-K_\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi)}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{\xi - x}.$$

Решение уравнения (1) в виде изолированного солитона

$$A = \frac{4c}{1 + c^2(c - K_\infty)(x - ct)^2}$$

существует при $K_\infty < c < 0$.

Периодическое солитонное решение уравнения (1)

$$A = \frac{2k^2}{c(c - K_\infty)} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{k^2}{c^2(c - K_\infty)} \right]^{1/2} \cos[k(x - ct)] \right\}^{-1}$$

также предполагает, что $K_\infty < c < 0$.

Двумерное обобщение

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, x', z') |\vec{k}| \mathbf{e}^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} dk_x dk_z dx' dz',$$

$$\vec{k} = (k_x, k_z), \quad \vec{x} = (x, z), \quad \vec{x}' = (x', z'),$$

уравнения Бенджамина–Оно содержит неоднородные солитонные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/500).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе // Доклады АН СССР. 1942. Т. 34. № 8. С. 234–242.
2. Нейланд В. Я. Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва // III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, 25/I-1/II 1968 г.: Сб. аннотаций докладов съезда. М.: Наука, 1968. С. 224.
3. Жук В. И. Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.

О методах расчета высокотемпературных процессов

Some approaches to high temperature process simulation

Жуков В. Т., Феодоритова О. Б.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия;
zhukov@kiam.ru, feodor@kiam.ru

Для моделирования высокотемпературных процессов, протекающих в микромишениях при обжати их пучками тяжелых ионов, в [1] предложена модель сплошной среды, частицы которой — ионы, электроны и фотоны — имеют единую плотность, общий вектор скорости, но различную температуру. На основе этой модели в ИПМ им. М.В. Келдыша созданы методика и компьютерный код НЗТ. Базовым элементом НЗТ является алгоритм [2] решения нестационарных

уравнений газовой динамики в областях сложной формы с подвижными границами. Для расчетов тепловых процессов авторами доклада построена пространственно-временная дискретизация, согласованная с газодинамическим этапом. В докладе приведены основные принципы построения и опыт использования предложенных схем. Изложение ведется для случая неортогональных сеток с криволинейными четырехугольными ячейками, в центрах которых заданы значения сеточных функций. Для аппроксимации по пространству записывается закон сохранения тепла для каждой сеточной ячейки. Потoki тепла на сторонах (ребрах) ячеек находятся интерполяцией значений сеточной функции на локальном шаблоне узлов. Интерполяция проводится методом наименьших квадратов в квадратичном базисе в локальной криволинейной системе координат, что вместе с восполнением ребер дугами окружностей обеспечивает инвариантность схемы относительно вращений, т.е. сохранение симметрии решений.

На каждом шаге по времени решение системы трех дискретных уравнений теплопроводности производится явно-итерационной схемой ЛИ-М с чебышевскими параметрами, являющейся развитием схемы [3]. Схема ЛИ-М обеспечивает высокую фактическую точность и эффективное функционирование на многопроцессорных системах. Если формально исключить внутренние итерации, то схему ЛИ-М можно представить как явную разностную схему с увеличенным в p раз шаблоном узлов сетки. Число p определяется шагом по времени τ и коэффициентами пространственной дискретизации. Каждый из p шагов схемы ЛИ-М эквивалентен по трудоемкости одному шагу явной схемы, но при заданном τ для выполнения перехода на верхний слой по времени явная схема вместо p шагов потребует $\simeq p^2$ шагов.

Принципы дискретизации уравнения теплопроводности носят достаточно универсальный характер и могут быть использованы для других задач, представляющих системы законов сохранения при наличии диссипативных процессов. Схему ЛИ-М в задачах с гладкими решениями можно использовать как предиктор, тогда получается схема ЛИ-2 второго порядка точности. Обоснование двух этих схем проведено для многомерных линейных параболических уравнений в [4].

Главная идея конструкции схем ЛИ отличается от обычного ускорения итераций: выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы; также есть

важное отличие и от способов получения устойчивых явных многошаговых схем, в которых формальное стремление к максимальному расширению области устойчивости может приводить к потере точности вследствие ухудшения аппроксимации по пространству. Исследование качества явно-итерационных схем основано на приемах, примеры которых, наряду с результатами расчетов, приведены в данном докладе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00144-а и № 09-01-12024-офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физических процессов. 1998. Вып. 3. С. 3–16.
2. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
3. *Локуцкий В. О., Локуцкий О. В.* О численном решении краевых задач для уравнений параболического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 3. С. 540–544.
4. *Жуков В. Т.* О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 10. С. 127–158.

Метод интегральных соотношений, законы сохранения и термодинамика рабочего процесса высокотемпературных турбореактивных двигателей

The method of integral relations, conservation laws and thermodynamics of the work process of high-temperature turbojet engines

Иванов М. Я.

ЦИАМ, Москва, Россия; ivanov@ciam.ru

Метод интегральных соотношений А. А. Дородницына [1] является одним из первых эффективных методов численного решения сложных нелинейных задач аэродинамики. Плодотворное развитие и практическое применение к решению актуальных задач внешней аэродинамики этот метод получил в работах О. М. Белоцерковского и П. И. Чушкина [2]. Следует подчеркнуть также возможность использования метода для получения ряда важных выводов в задачах внутренней аэродинамики при наличии теплоподвода к воздушному потоку.

В рамках настоящего исследования метод интегральных соотношений применяется для получения необходимых начальных параметров в модели излучающего теплопроводного газа. На основе этой модели удастся сформулировать замкнутую систему термодинамически согласованных законов сохранения.

Аккуратное термодинамическое согласование законов сохранения газовой динамики требуется при теоретическом решении многих прикладных задач, например в задачах разработки высокотемпературных газотурбинных двигателей (ГТД). Известные затруднения и большие временные задержки создания современных авиационных ГТД непосредственно связаны с правильным решением данной проблемы. Здесь прежде всего следует указать, что теоретически рассчитанные термогазодинамические параметры узлов и всего двигателя в целом существенно отличаются от экспериментально регистрируемых своих значений на первых опытных образцах. В частности, обычно регистрируется заметное превышение, а иногда недопустимо высокое значение температуры газа на входе в турбинный узел двигателя.

В настоящем докладе решение рассматриваемой проблемы строится теоретическим путем с привлечением современных опытных результатов физики. С целью наглядной иллюстрации материала изложение будет проводиться в рамках односкоростной двухкомпонентной ($1V2C$) математической модели сжимаемой сплошной среды с газовой и радиационной составляющими. Изложены примеры практического применения предложенной теоретической модели, которые могут служить как ее экспериментальное обоснование. В частности, дается аналитическое и численное решение модельной задачи расширения теплового следа в ламинарном потоке газа за сильно нагретой нитью. Данная задача интересна тем, что в экспериментальных исследованиях обнаружен эффект аномально интенсивного расширения теплового следа. На основе методологии $1V2C$ построена теоретическая модель реализующегося процесса и приведено соответствующее аналитическое решение. Выполнены также расчетные исследования наблюдающегося эффекта методами вычислительной гидродинамики. Представлены характерные результаты термогазодинамического расчета рабочего процесса, реализующегося в тракте авиационного ГТД. Отмечен ряд особенностей этого процесса, связанных с наличием гидродинамических и тепловых потерь, которые необходимо учитывать при согласовании различных узлов двигателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А. А.* Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики // Тр. III Всес. матем. съезда. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 3. С. 447–453.
2. *Белоцерковский О. М., Чушкин П. И.* Численный метод интегральных соотношений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 5. С. 731–759.

**Кинетическое уравнение Власова,
динамика сплошных сред и турбулентность**

**Vlasov kinetic equation,
continuum dynamics, and turbulence**

Козлов В. В.

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Москва, Россия; vvkozlov@mi.ras.ru*

Рассматривается динамика континуума взаимодействующих частиц, описываемая кинетическим уравнением Власова. Выводится бесконечная цепочка точных уравнений движения такой среды в эйлеровом представлении и исследуются их общие свойства. Важным примером служит бесстолкновительный газ, демонстрирующий необратимое поведение. Несмотря на потенциальный характер взаимодействия отдельных частиц, для динамики континуума характерны диссипативные свойства.

Рассматривается вопрос о возможности применения уравнения Власова к моделированию мелкомасштабной турбулентности.

О вариационных задачах газовой динамики

Variational problems of gas dynamics

Крайко А. Н.

ЦИАМ, Москва, Россия; akraiko@ciam.ru

Первой задачей созданного И. Ньютоном вариационного исчисления была решенная им задача (задача Ньютона — ЗН) о построении осесимметричной головной части, которая при фиксированных длине и радиусе основания имеет минимальное сопротивление. И. Ньютон решил эту задачу с использованием приближенной формулы (формулы Ньютона — ФН), которая, как выяснилось в XX в., неплохо рабо-

тает при гиперзвуковом обтекании выпуклых головных частей. В приближении точных уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера) первая вариационная задача — задача о форме сверхзвуковой части сопла максимальной тяги решена в 1957 г. под руководством А. А. Дородницына — Ю. Д. Шмыглевским — одним из учителей автора доклада. В докладе излагаются результаты, полученные докладчиком и под его руководством за последние 10–20 лет. Они включают широкий круг вариационных задач, решенных в приближении законов локального взаимодействия (ЗЛВ), в частности, ФН и ФН с трением, полных уравнений Эйлера и осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых дифференциальными моделями турбулентности.

В рамках ФН построены осесимметричные головные части, реализующие минимум сопротивления при фиксированных габаритах и объеме. В рамках ЗЛВ с трением построены пространственные тела минимального сопротивления, включая тела с заданным круговым основанием, а также с заданными круговым основанием и площадью наветренной поверхности. В рамках полных уравнений Эйлера решены задачи о плоских и осесимметричных головных частях и профилях минимального волнового сопротивления в сверхзвуковом потоке, ЗН с заданным объемом, задачи о построении до-, транс- и сверхзвуковых контуров осесимметричного сопла, реализующего при заданных общей длине и расходе максимум тяги, и задача об оптимальной пространственной сверхзвуковой части сопла, пространственность которого обусловлена габаритными ограничениями (связка сопел при заданном внешнем радиусе). Характерная особенность этих задач — наличие в оптимальных конфигурациях участков краевого экстремума, возникающих, в первую очередь, из-за габаритных ограничений. В приближении уравнений Навье–Стокса решены многокритериальные (оптимизация “по Парето”) и междисциплинарные (с учетом напряженно-деформированного состояния и ограничений по статической и динамической прочности) оптимизационные задачи о профилировании пространственных лопаток рабочего колеса и спрямляющего аппарата скоростных вентиляторов современных воздушно-реактивных двигателей.

Для решения перечисленных задач применялись не прямые и прямые методы теории оптимального управления, включая обоснованный докладчиком метод неопределенного контрольного контура, пря-

мой метод локальной линеаризации С. А. Таковицкого, генетические алгоритмы, эффективные градиентные методы с представлением искомых контуров и поверхностей кривыми Бернштейна–Безье, расчеты на грубых сетках и распараллеливание вычислений. Для расчета двумерных и пространственных течений, определения напряженно-деформированного состояния, собственных форм и частот колебаний и построения оптимальных форм развиты быстрые и точные программные комплексы, которые даже пространственные задачи решают за приемлемые времена на кластерах из 20–30 процессоров. За рубежом для решения подобных задач за такие же времена используются кластеры несоизмеримо большей мощности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00178) и Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы (проект № 2.1.1/200).

Новые модели гиперзвуковых течений вязкого газа **New models of hypersonic viscous gas flows**

Кузнецов М. М.¹, Липатов И. И.²

¹МГОГУ, Московская область, Россия; kuznets-omn@yandex.ru

²ЦАГИ, Жуковский, Россия; igor_lipatov@mail.ru

Доклад посвящен рассмотрению двух проблем, связанных с гиперзвуковыми течениями вязкого газа. При анализе этих проблем использовано преобразование Дородницына (см. [1]), сводящее уравнения сжимаемого пограничного слоя к уравнениям для несжимаемого течения. Применение преобразования при построении новых моделей позволяет заключить, что само по себе оно не является формальным и позволяет существенно продвинуться в исследовании различных проблем.

Первая из задач связана с исследованием режимов локального сильного вязко-невязкого взаимодействия, являющихся в условиях нестационарного изменения формы поверхности или проявления дру-

гих граничных условий. Применение преобразования Дородницына позволяет в этом случае получить для некоторых режимов взаимодействия краевую задачу гиперболического типа, в решении которой пересечение характеристик одного семейства приводит к формированию разрывных решений, описывая, по-видимому, некоторые формы псевдоскачка:

$$\frac{\partial A}{\partial T} + \left(A + \frac{1}{L}\right) \frac{\partial A}{\partial x} = -P + \frac{\Theta}{L}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(A - LP) = -P + \Theta, \quad \Theta = \frac{\partial D}{\partial x}.$$

Характеристики системы уравнений описываются соотношениями

$$\frac{d\tau_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\tau_2}{dx} = -\left(A + \frac{1}{L}\right)^{-1}.$$

Пересечение характеристик одного семейства может приводить к появлению разрывного решения. Из формулы Грина следует выражение для скорости перемещения разрыва

$$\frac{dx}{dT} = \frac{(A_1 + A_2)}{2} + \frac{1}{L},$$

где A_1 и A_2 — соответственно значения функции слева и справа от разрыва. Условие стационарного положения разрыва $dx/dT = 0$ сводится к условию, выведенному в [2]. В результате численного решения задачи для определенной зависимости формы поверхности от времени такие решения были найдены [3].

Вторая из задач связана с проявлением эффектов разреженного газа, в частности с проявлением эффектов поступательной неравновесности при гиперзвуковом обтекании пластины. При предельном переходе $M_\infty \rightarrow \infty$, $Re_0 \rightarrow \infty$, $RT_0/u_\infty^2 = \varepsilon \rightarrow 0$, $N = (\varepsilon\sqrt{Re_0})^{-1} \sim 1$. Для таких течений ранее была найдена в [4] соответствующая форма тензора напряжений, нелинейным образом связанная с тензором деформаций:

$$\frac{p}{p_{yy}} = 1 + \frac{6}{5\varepsilon^2 Re_0} \left(\frac{\mu}{p} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{6}{5\varepsilon^2 Re_0} \left(\frac{p_{xy}}{p_{yy}}\right)^2,$$

$$p_{xx} = p_{yy} \left[1 + \frac{18}{5\varepsilon^2 Re_0} \left(\frac{\mu}{p} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right],$$

приводящаяся в пределе при больших значениях продольной координаты к обычному тензору.

В этих условиях также оказалось, что применение преобразования Дородницына существенно упрощает задачу, разделяя ее на чисто гидродинамическую и часть, связанную с эффектами взаимодействия:

$$x(f' \dot{f}' - \dot{f} f'') - \frac{1}{2} f f'' = f''', \quad x(f' \dot{H} - \dot{f} H') - \frac{1}{2} f H' = \left[H + \frac{(\sigma - 1)}{2} f'^2 \right]'',$$

$$\frac{p}{p_{yy}} = 1 + \frac{2N^2}{3\xi} f''^2, \quad \mu = (H - f'^2).$$

Для нахождения связи между толщиной вытеснения и компонентом тензора напряжений p_{yy} используем приближенную формулу касательного клина, справедливую в широком диапазоне параметра взаимодействия $\chi = M\tau$:

$$p_{yy} = 1 + \gamma M_\infty^2 \text{Re}_0^{-1} \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 p_{yy}^2 \left[\frac{(\gamma + 1)}{4} + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} + \frac{1}{\gamma M_\infty^2 \text{Re}_0^{-1} p_{yy}^2 (d\delta/d\xi)^2}} \right], \quad \delta = \xi^{1/2} \int_0^\infty \frac{d\eta_1}{\rho}.$$

Решение полученной задачи не содержит, в отличие от классической теории сильного взаимодействия, особенности в распределении индуцированного давления, а характеризуется наличием максимума [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе // ПММ. 1942. Т. 6. № 6. С. 449–486.
2. Нейланд В. Я. Особенности взаимодействия и отрыва транскритического пограничного слоя // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 30–45.
3. Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003.
4. Кузнецов М. М., Никольский В. С. О кинетической модели тонкого вязкого ударного слоя // Физическая механика неоднородных сред. Новосибирск, 1984. С. 101–110.

5. Кузнецов М. М., Липатов И. И., Никольский В. С. Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом пограничном и ударном слоях // Известия РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 80–187.

**Автомодельные асимптотики, описывающие
распространение нелинейных волн**
**Self-similar asymptotics for solutions which describe
the nonlinear waves**

Куликовский А. Г., Чугайнова А. П.

*Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Москва, Россия;*

kulik@mi.ras.ru, A.P.Chugainova@mi.ras.ru

Рассматриваются особенности поведения нелинейных волн в упругих средах, в которых длинноволновые возмущения описываются гиперболическими уравнениями, выражающими законы сохранения. Предполагается, что в явлениях более мелкого масштаба существенны дисперсия и диссипация. Наличие дисперсии, проявляющейся в структурах ударных волн в виде колебаний, может приводить к тому, что множество разрывов, которым соответствует решение задачи о структуре разрыва в виде стационарной структуры (бегущей волны), приобретает сложное строение. При этом оказалось, что если при построении решений гиперболических систем уравнений использовать только разрывы со стационарной структурой, то для ряда автомодельных задач решения оказываются неединственными. Число решений зависит от влияния дисперсии внутри структуры и неограниченно растет с ростом этого влияния. В связи с этим возникает вопрос, какие решения реализуются и при каких условиях. С целью получения ответа на этот вопрос были проведены численные эксперименты по решению начально-краевых задач для уравнений, описывающих нелинейные волны в вязко-упругой среде с дисперсией. Проведенные исследования позволили сформулировать выводы о реализуемости автомодельных решений, рассматриваемых как асимптотики неавтомо-

дельных решений при больших временах и масштабах. Определены способы указания реализующейся асимптотики в зависимости от деталей постановки начально-краевой неавтономной задачи.

Кинетическая модель уравнения Больцмана для двухатомного газа с вращательными степенями свободы

Kinetic model of the Boltzmann equation for diatomic gas with rotational degrees of freedom

Ларина И. Н., Рыков В. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; varlav@land.ru

В основу описания двухатомной газовой среды положено уравнение Больцмана для функции распределения $f(t, \vec{x}, \vec{\xi}, e)$, заданной в момент времени t в фазовом пространстве физических векторов $\vec{x}$, поступательной скорости $\vec{\xi}$ и вращательной энергии молекул e . Расчет течений двухатомных газов сопровождается значительным увеличением затрат машинного времени по сравнению с расчетом течений одноатомного газа. Особенно это касается течений при малых и умеренных числах Кнудсена, так как шаги по времени составляют доли числа Кнудсена. При численном решении уравнения Больцмана основные затраты вычислительного времени связаны с тем, что на каждом шаге по времени в каждой дискретной точке семимерного пространства $(\vec{x}, \vec{\xi}, e)$ необходимо вычислять шестимерный интеграл столкновений.

Другим подходом к решению такого рода задач является использование кинетических модельных уравнений, приближающих уравнение Больцмана. Преимущество модельных уравнений состоит в том, что для вычисления дискретных выражений модельного интеграла столкновений приходится в каждой дискретной точке физического пространства вычислять лишь некоторое число трехкратных интегралов по скорости $\vec{\xi}$. Существенное снижение объема вычислений достигается благодаря тому, что построенное модельное кинетическое

уравнение допускает осреднение по вращательной энергии e . При помощи интегрирования по переменной e делается переход от функции распределения $f(t, \vec{x}, \vec{\xi}, e)$ к новым искомым функциям

$$f_0(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \int_0^\infty f de, \quad f_1(t, \vec{x}, \vec{\xi}) = \int_0^\infty f e de.$$

Здесь f_0 — распределение частиц в фазовом пространстве $(\vec{x}, \vec{\xi})$, f_1 — распределение плотности вращательной энергии в этом же пространстве.

Описание двухатомного газа основано на системе двух уравнений для плотностей f_i , $i = 0, 1$ (см. [1–4]):

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \xi_x \frac{\partial f_i}{\partial x} = \nu_r (f_i^r - f_i) + \nu_t (f_i^t - f_i), \quad i = 0, 1.$$

Величины ν_t и ν_r представляют собой частоты упругих и неупругих столкновений соответственно. Функции f_0^t и f_1^t можно истолковывать как плотности распределения в пространстве $(\vec{x}, \vec{\xi})$ числа частиц и их вращательной энергии, испытавших упругое столкновение, а функции f_0^r и f_1^r — испытавших неупругое столкновение. Функции f_i^t и f_i^r строятся в виде разложения по собственным функциям линейных операторов столкновений [5]. Их выражения приводятся в [1–3].

В данной работе предлагаются новые выражения для частот упругих ν_t и неупругих ν_r столкновений, которые существенно расширяют область применимости кинетической модели. На основе новых модельных уравнений решена задача о структуре ударной волны для азота и дано сравнение с экспериментом. Кинетическая модель уравнения Больцмана предназначена для расчета сложных течений двухатомного газа с учетом вращательных степеней свободы молекул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыков В. А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1975. № 6. С. 107–115.
2. Larina I. N., Rykov V. A., “The boundary condition on the body surface for a diatomic gas,” Proceedings of 15-th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Stuttgart, 1986, Vol. 1. Pp. 635–643.

3. Ларина И. Н., Рыков В. А. Пространственное обтекание конических тел потоком разреженного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 110–117.
4. Рыков В. А., Титарев В. А., Шахов Е. М. Структура ударной волны в двухатомном газе на основе кинетической модели // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. № 2. 2008. С. 171–182.
5. Ларина И. Н., Рыков В. А. Кинетическая модель уравнения Больцмана для степенного потенциала взаимодействия между молекулами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 3. С. 1–13.

О механизме усиления давления при увеличении пористости сред, ударно сжимаемых в конических и цилиндрических мишенях

On the mechanism of pressure increase with increasing porosity of the media compressed in conical and cylindrical targets

Милявский В. В.¹, Фортов В. Е.¹, Фролова А. А.²,
Хищенко К. В.¹, Чарахчян А. А.², Шуршалов Л. В.²

¹ОИВТ РАН, Москва, Россия;

²ВЦ РАН, Москва, Россия; chara@ccas.ru

Численное исследование ударно-волновых течений конденсированных сред было начато в ВЦ РАН одним из авторов (А.А.Ч.) еще при жизни Анатолия Алексеевича Дородницына (1910–1994). Это исследование, базирующееся на уравнениях бездиссипативной гидродинамики, лежало за пределами его разнообразных научных интересов (см. [1]), больше посвященных уравнениям Навье–Стокса. В то же время настоящая работа была бы невозможна без той школы вычислительной гидродинамики, которая была создана в Вычислительном центре АН СССР его директором. Авторам настоящей работы из ВЦ РАН посчастливилось работать вначале под руководством, а затем рядом с двумя выдающимися представителями этой школы — Павлом Ивановичем Чушкиным (1924–1990) и Юрием Дмитриевичем Шмыг-

левским (1926–2007), в становлении которых как ученых решающую роль сыграл Анатолий Алексеевич.

Представленные в докладе результаты продолжают цикл работ [2–6] по численному исследованию течений конденсированных пористых сред со сходящимися ударными волнами. Интерес к таким течениям связан с тем, что, в отличие от случая плоских ударных волн, в которых при уменьшении начальной плотности ρ_{00} уменьшается как давление входящей в пористое вещество ударной волны, так и давление в ударной волне, отраженной от поставленной внутри вещества стенки, здесь давление внутри вещества увеличивается при уменьшении ρ_{00} для не слишком сильных ударных волн. Исчезновение этого эффекта при увеличении интенсивности входящей в пористую среду ударной волны связано с близостью ударной адиабаты пористой среды $\rho = \rho(p, \rho_{00})$, где ρ , p — плотность и давление на фронте волны, к вырожденной ударной адиабате совершенного газа $\rho = \rho(\rho_{00})$.

Исследуется зависимость параметров волн, возникающих при ударном сжатии пористого графита, алюминия и тефлона в стальной мишени с полостью в виде обрезанного конуса, от относительной начальной плотности. Для стальной мишени с заполненной графитом цилиндрической полостью изучается эффект увеличения пикового давления на оси симметрии при замене сплошного графита на пористый.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-07-00228) и Российской академии наук (программа № 3 ОМН РАН).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А. А.* Избранные научные труды. М.: ВЦ РАН, 1997. Т. 1, 2.
2. *Чарахчъян А. А., Ломоносов И. В., Миялевский В. В. и др.* О сходящихся ударных волнах в пористых средах // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 1. С. 72–77.
3. *Чарахчъян А. А., Хищенко К. В., Миялевский В. В. и др.* Численное исследование сходящихся ударных волн в пористых средах // Ж. техн. физ. 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 15–25.
4. *Миялевский В. В., Фортон В. Е., Фролова А. А. и др.* Расчет ударного сжатия пористых сред в конических твердотельных мишенях с выходным отверстием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 5. С. 913–931.
5. *Хищенко К. В., Чарахчъян А. А., Миялевский В. В. и др.* Об усилении сходящихся ударных волн в пористых средах // Химическая физика. 2007. Т. 26. № 12. С. 46–56.

6. Charakhch'yan A. A., Khishchenko K. V., Fortov V. E., et al. Shock compression of some porous media in conical targets: numerical study // Shock Waves. 2010. DOI: 10.1007/s00193-010-0274-y.

Влияние температурного фактора на структуру отрывного течения в сверхзвуковом потоке газа

Influence of temperature factor on structure of supersonic separation flows

Нейланд В. Я., Соколов Л. А., Шведченко В. В.

ЦАГИ, Жуковский, Россия; neyland@tsagi.ru

Изучено влияние температурного фактора (отношения температуры тела к температуре торможения набегающего потока) на структуру отрывного течения, которое возникает при обтекании сверхзвуковым потоком вогнутого угла. Выявлено сильное влияние температурного фактора на длину зоны отрыва и на создаваемые потоком аэродинамические характеристики. Показано, что при достаточно больших значениях величины угла такое течение не может описываться теорией свободного взаимодействия, т.е. теорией triple deck.

К проблеме усечения цепочки законов сохранения с релаксацией

To the section problem of the chain of conservation laws with relaxation

Радкевич Е. В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; evrad07@gmail.com

Во многих физических задачах возникает проблема *усечения*

(обрыва) цепочки уравнений, моделирующей процесс [1–5]. Вопрос в том, как определять корректность такого усечения. Это одна из стандартных задач для систем моментных аппроксимаций кинетических уравнений с бесконечной цепочкой уравнений. Для линеаризации в окрестности состояния равновесия 26-моментной системы Грэда, вычисленной для молекул Максвелла, будет доказано существование корректного по Чепману усечения смешанной задачи. Более того, будет показано, что переменными усечения являются гидродинамические переменные (плотность, скорость, температура) и тепловой поток, что дает возможность использовать в качестве граничных условий для усечения физически оправданные краевые условия. Последнее позволило смоделировать эффекты плоского течения Куэтта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen G.-Q., Levermore C.D., Luu T.-P.*, Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Relaxation Terms and Entropy // *Comm. on Pure and Appl. Math.* V. XLVII (1994), pp. 787–830.
2. *Chapman S., Cowling T.* Mathematical Theory on Non-Uniform Gases, Univ. Press, Cambridge, (1970).
3. *Radkevich E. V.* Irreducible Chapman–Enskog Projections and Navier–Stokes Approximations // *Instability in Models Connected with Fluid Flows. II.* Ed. Bardos C., Fursikov A.; *Int. Mathematical Series*, Vol. 6, pp. 85–151, Springer (2007).
4. *Радкевич Е.В.* Кинетические уравнения и проблемы проекции Чепмена–Энскога // *Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова.* 2005. Т. 250. С. 219–225.
5. *Palin V. V., Radkevich E. V.* Mathematical Aspects of the Maxwell Problem // *Applicable Analysis.* 2009. V. 88, №. 8, pp. 1233–1264.

Решение уравнения Больцмана для газа с внутренними степенями свободы молекул

Solving of the Boltzmann equation for a gas with internal degrees of freedom of molecules

Черемисин Ф. Г.

ВЦ РАН, Москва, Россия; tcherem@ccas.ru

Разработка численных методов решения кинетического уравнения Больцмана началась в Вычислительном центре АН СССР в 1968 г. по инициативе Анатолия Алексеевича Дородницына. Классическое кинетическое уравнение Больцмана описывает газы, не обладающие внутренней структурой молекул. Оно применимо к одноатомным газам или их смесям, а для многоатомных газов может использоваться только в том случае, если можно пренебречь переходом кинетической энергии движения молекул во внутреннюю энергию (и обратным переходом). Запишем классическое уравнение Больцмана, определяющее функцию распределения молекулярных скоростей $f(\xi, \mathbf{x}, t)$ в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \int_{R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_m} (f' f'_* - f f_*) g b db d\varphi d\xi_*.$$

Основные трудности его решения связаны с высокой размерностью решения (ξ — вектор скорости молекулы), высокой кратностью интеграла столкновений и нелинейностью интеграла столкновений. Долгое время не удавалось найти дискретную аппроксимацию интеграла столкновений, которая сохраняла бы его основные свойства, а именно консервативность по массе, импульсу и энергии и обращение в ноль на равновесном максвелловском распределении. Эта проблема была нами решена [1], что позволило построить эффективные вычислительные алгоритмы для широкого круга задач динамики разреженного газа.

Обобщенное кинетическое уравнение Больцмана учитывает переходы энергии между вращательными и поступательными степенями свободы молекул (RT переходы), или колебательно-поступательные переходы (VT переходы). Функция распределения $f_i(\xi, \mathbf{x}, t)$ здесь опре-

делена для каждого уровня внутренней энергии i и задана вероятность перехода P_{ij}^{kl} с уровней i, j на уровни k, l :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{jkl} \int_{R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{b_m} (f_k f_l \omega_{ij}^{kl} - f_i f_j) P_{ij}^{kl} g_{ij} b db d\varphi d\xi_j.$$

Здесь $\omega_{ij}^{kl} = (q_i q_j) / (q_k q_l)$, q_i — вырожденность уровня.

Нами была получена дискретная аппроксимация оператора столкновений обобщенного кинетического уравнения Больцмана [2], обладающая теми же свойствами консервативности и зануления на термодинамически равновесной функции распределения, что и для классического уравнения Больцмана. На ее основе разработаны алгоритмы расчета течений многоатомных газов. В докладе приводится пример такого расчета — моделирование истечения азота из квадратного отверстия в вакуум. Определяются поля течения и вращательный спектр в нескольких точках по оси струи. Обнаружено неравенство вращательной и кинетической температур газа и отклонение вращательного спектра от равновесного больцмановского спектра. При расширении струи и уменьшении частоты молекулярных столкновений наблюдается “замораживание” вращательной температуры и вращательного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черемисин Ф. Г. Консервативный метод вычисления интеграла столкновений Больцмана // Доклады РАН. 1997. Т. 357. № 1. С. 53–56.
2. Черемисин Ф. Г. Решение кинетического уравнения ВангЧанг–Уленбека // Доклады РАН. 2002. Т. 387. № 4. С. 1–4.

Преобразование А. А. Дородницына и задачи трехмерного пограничного слоя

Dorodnitsyn transformation and problems of three-dimensional boundary layer

Шалаев В. И.

ФАЛТ МФТИ, Жуковский, Россия; shalaev@falt.ru

Работа А. А. Дородницына [1] появилась в 1942 г. и является основной вехой в теории пограничного слоя. Она опередила свое время, так как задачи течений вязкого теплопроводного газа стали актуальными только после второй мировой войны, когда началась интенсивная разработка и создание трансзвуковых и сверхзвуковых летательных аппаратов [2]. Поэтому не удивительно, что аналогичные работы, по своей сути повторяющие результаты [1], появились лишь спустя семь лет, в конце 40-х гг. [3, 4]. Особенно важным это направление стало со второй половины 50-х гг. двадцатого века в связи с развитием авиационно-космических аппаратов, движущихся в атмосфере с гиперзвуковыми скоростями [5, 6].

Преобразование А. А. Дородницына [1] отражает одно из основных математических и физических свойств уравнений пограничного слоя — их параболический тип и бесконечность скорости распространения возмущений вдоль нормали к поверхности. Его применение открыло путь к новым аналитическим результатам в теории пограничного слоя сжимаемого газа: открытию новых автомодельных решений, разработке теории отрыва и вязко-невязкого взаимодействия для сверх- и гиперзвуковых течений [3–6]. Оно позволило не только привести уравнения к форме, подобной несжимаемой жидкости, но и путем введения функций тока исключить уравнение неразрывности и трансформировать уравнения пограничного слоя к системе однотипных уравнений — параболических для двумерных течений и гипербола-параболических для пространственных и нестационарных течений. Это привело к разработке математически обоснованных, точных и эффективных методов численного решения задач пограничного слоя [7], как двумерных, так и пространственных [8–10]. Важно отметить, что наиболее значительные результаты в разработке, как

теоретических [6], так и численных [7, 8] подходов были получены в ЦАГИ под руководством А. А. Дородницына.

В настоящем докладе рассмотрены некоторые новые результаты в теории трехмерного стационарного и нестационарного пограничного слоя сжимаемого газа [11]. Рассмотрены пограничные слои с малыми поперечными скоростями и выделен класс течений, который описывается автомодельным решением с точностью второго порядка малости по величине пространственных возмущений. Показано, что такие течения имеют место на основной части поверхности тонких крыльев и тел с малой асимметрией поперечного сечения при малых углах атаки — двух основных элементов летательного аппарата на режиме крейсерского полета. Для особых областей в окрестности передних кромок крыльев и вершин фюзеляжей также получены автомодельные решения. Полученные результаты являются аналогом теории малых возмущений для уравнений Эйлера в приложении к пограничному слою. Представлены результаты ее верификации на основе сравнения численных решений выведенных уравнений с результатами решения полных уравнений и экспериментальными данными как для ламинарного, так и турбулентного течения.

Изучен новый класс особенностей уравнений трехмерного пограничного слоя для конических поверхностей, которые образуются в плоскости стекания, где две ветви пограничного слоя, приходящие от плоскости растекания сталкиваются между собой. Получен аналитический вид возникающих сингулярностей, проведена их классификация и показано, что в их окрестности регулярное решение уравнений Навье–Стокса имеет сложную многослойную асимптотическую структуру. В непосредственной близости плоскости стекания расположена пограничная область, в которой течение описывается укороченными параболизированными уравнениями Навье–Стокса. Далее расположена двухслойная область взаимодействующего трехмерного пограничного слоя. Для внешней части особых областей получены аналитические решения определяющих уравнений и выведены условия срачивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе // ПММ. 1942. Т. 6. № 6. С. 449–486.
2. Струминский В. В. Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985.

3. *Moore F. K.*, “Three-dimensional boundary layer theory,” *Advances in Applied Mechanics*, **4**, 159–228 (1956).
4. *Stewartson K.*, *The Theory of Laminar Boundary Layers in Compressible Fluids*, Claredon Press, Oxford (1964), p. 191.
5. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962.
6. *Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2003.
7. *Dorodnitsyn A. A.* “Exact numerical methods in the boundary layer theory,” *Fluid Dynamics Transact.*, **1**, 59–71 (1964).
8. *Петухов И. В.* Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Числ. методы решения диф. и интегр. уравнений и квадратурные формулы: сб. / доп. к ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4. № 4. С. 304–325.
9. *Cebeci T.*, *Analysis of Turbulent Flows*, Academic Press, London, N. Y. (2004) p. 376.
10. *Хиришель Э., Кордулла В.* Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. Численный расчет пограничного слоя. М.: Мир, 1987.
11. *Шалаев В. И.* Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Ч. 1. Теория пограничного слоя. М.: МФТИ, 2010.

Математическая физика и вычислительные методы

Mathematical physics and computational methods

Methods of complex variable functions applied to the computation of the physical fields in the wave propagation domain

Gatignol Ph.

*Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne,
Compiègne, France; philippe.gatignol@utc.fr*

The simulation of physical phenomena is in full expansion nowadays. It requires more and more sophisticated methods in order to evaluate numerically the field variables of interest. Beside the direct numerical methods, such as finite difference or element techniques, which need often a large extend of computer facilities, are now developed so called “semi-analytical” methods which associate analytical calculus with weak computing technique.

The last methods are mainly relevant to linear problems, such as wave propagation phenomena in electromagnetism or acoustics. In most cases, it is possible to express the physical field variables analytically through integral representations, using for example Green function technique or Fourier integrals. These integrals may seldom be solved in terms of an analytical expression. So, in a second step, they must be evaluated numerically. In that sense, the whole approach is said to be “semi-analytical”.

In wave propagation problems, Fourier integrals do appear whenever it

is relevant to decompose the incident field (the input) into plane waves [1], each plane wave having its own behaviour when reflection or diffusion phenomena are taken into account. Now, the whole physical fields produced by these phenomena (the output) may be expressed as a Fourier integral, by inversion theorem. Usually, such integrals are expressed through an integration in terms of one or two wave vector components. Computing numerically these integrals is possible by using a fast Fourier transform (FFT). However, in many cases, it reveals to be better to change the integration path, using the properties of functions of complex variables, and to implement a classical integration method such as a trapezoidal method.

It is the aim of this paper to present a number of examples where such a technique is successful. We deal essentially with twodimensionnal wave problems for which the Fourier integral representations are simple integrals along the real axis of a component of the wave vector. The second component of this vector is a bivalued function of the first one, with two branch points. To displace the integration path, owing to Cauchy theorem, then leaving the real axis, is a common procedure indeed, in order to apply the residue calculus technique for example (see [2]), or to evaluate the integral asymptotically by a steepest descent method. However, it seems that few authors report cases where Cauchy theorem is used for numerical purposes.

As an example, we compute the acoustic field radiated by a transducer modeled by a vibrating piston inserted in a rigid plane. Giving the normal acoustic velocity on the transducer and computing the resulting acoustic pressure in the fluid leads to Fourier integral with two integrable singularities on the real axis of the wave number variable. Replacing the real path by only one finite complex linear line is sufficient to avoid these singularities and to obtain much more accurate results than the ones obtained by a real integration [3].

In the case of three-dimensional wave problems, we deal with twofold Fourier integrals and the extension of the procedure is slightly difficult since we need to displace a twodimensionnal surface in $\mathbb{C}^2$, i.e. in $\mathbb{R}^4$. However, for the calculus of the field radiated by a circular transducer in a rigid plane, the method has been successfully applied. In this case, an exact analytical solution may be obtained on the acoustic axis of the transducer. By a twofold FFT applied to the integral representation, it is very difficult to recover the values of this expression. To obtain reasonable precision of the result would need a FFT of large order. However,

integrating numerically on a plane surface, as a generalization of the one variable case, leads to a very good result.

In conclusion, the theory of analytic functions of complex variables, using Cauchy theorem, is a good alternative to classical real methods in order to compute Fourier integrals in wave propagation problems.

REFERENCES

1. *Goodman J. W.*, Introduction to Fourier Optics, MacGraw Hill, New York (1981).
2. *Laurentiev M., Chabat B.*, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Editions Mir, Moscou (1972).
3. *Gatignol Ph., Potel C., Bedrici N.*, "Improvement of the computation of Fourier integrals using the complex plane: application to acoustic fields," Applied Physics Letters, **96**, 044103, (2010).

New events in stick slip oscillators behavior

Pascal M.

Universite d'Evry, France; madeleine.pascal@ibisc.univ-evry.fr

Vibrating systems excited by dry friction are frequently encountered in technical applications. These systems are strongly nonlinear, and they are usually modeled as spring-mass oscillators. They have been the subject of a large number of publications, with several models of friction characteristics, and mainly by numerical approach [1]. However, assuming Coulomb's laws of dry friction, the corresponding dynamical model is a piecewise linear system and even for multi-degrees of freedom cases, some analytical results about the existence and the stability of periodic orbits including stick slip phases have been obtained [2].

One of the most popular model of stick slip oscillator consists of several masses connected by linear springs, one (or more) of the masses is in contact with a driving belt moving at a constant velocity. Dry friction forces act between the mass and the belt. In the past, several authors investigated the behavior of this system, with different friction laws and

with or without external actions and damping. The most simple case includes only one mass: this one-degree of freedom system has been the subject of both analytical [3] and numerical [4] investigations. One interesting phenomenon is the existence, during periodic orbits with stick and slip parts, of a “overshooting” [5] slip phase. During this part of the orbit, the mass in contact with the belt moves faster than the belt. Up to now, this phenomenon has been observed only for more complex friction characteristics than Coulomb’s ones, or/and for systems with external actions. Moreover, it is easy to prove [6], that these overshooting orbits are not possible in the case of a one degree of freedom system with Coulomb’s friction characteristics. In this work, the same model of stick slip oscillator including two degrees of freedom is considered. Assuming Coulomb’s laws of dry friction, a set of periodic orbits including an overshooting part is obtained using analytical methods. The stability of these solutions are investigated by using Poincaré map modeling.

The author thanks S. Ya. Stepanov for valuable comments and help.

REFERENCES

1. *Hinrichs N., Oestreich M., Popp K.*, “On the modeling of friction oscillators,” J. Sound Vib., **216**, No. 3, 435–459 (1998).
2. *Pascal, M.*, “Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction,” ASME J. of Comput. Nonlinear Dyn., **3**, No. 3, 20–26 (2008).
3. *Andreaus U., Casini P.*, “Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force,” J. Sound Vib., **245**, No.4, 685–699 (2001).
4. *Van de Vrande B. L., Van Campen D. H., De Kraker*, “An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure,” Nonlinear Dyn., **19**, 157–169 (1999).
5. *Teufel A., Steindl A., Troger H.*, “On non smooth bifurcations in a simple friction oscillator,” PAMM, **5**, 139–140 (2005).
6. *Galvanetto U., Bishop S.R.*, “Dynamics of a simple damped oscillator undergoing stick-slip vibrations,” Meccanica, **34**, 337–347 (1999).
7. *Khizgiyayev S.V.*, “Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry “stick-slip” friction,” PMM, **71**, 905–913 (2007).
8. *Pascal M.*, “Analytical investigation of the “stick-slip” oscillations induced by the dry friction for the two degrees of freedom oscillator,” in Problems of Analytical Mechanics and the theory of Stability, Ed. Kozlov V.V., Moscow, 2009, 325–336.
9. *Pascal M.*, “Non-smooth dynamical systems,” in: Proc. 10th Conf. on Dyn. Syst. Theory and Appl., Ed. Awrejcewicz J., Lodz, Poland, 2009, 67–76.

Numerical analysis of the sinuous instability of a viscous capillary jet surrounded by an nonviscous fluid

Radev S.¹, Onofri F.²

¹ *Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia,
Bulgaria;*

² *Polytech-IUSTI, University of Provence-CNRS, Marseille, France;*

As shown by Rayleigh (1978) an isolated liquid jet is stable to nonaxisymmetrical disturbances. However when the liquid jet interacts by surrounding immiscible fluid a sinusoidal mode of instability appears, that deflects the jet axis from its rectilinear form.

It should be mentioned that from a theoretical point of view the sinuous instability is less analyzed. The first linear analysis of the instability of a nonviscous jet was performed by Weber (1931). Similar solution was proposed by Debye and Daen (1959). Both analyses are based on the Euler equations of motion written in cylindrical coordinates. Using the latter Martinon (1983) studied higher non-symmetrical modes of instability. In Entov and Yarin (1984) the sinuous instability of a viscous jet was studied by using the so-called “quasy-one-dimensional equations” derived for thin jet as an averaged form of Navier–Stokes equations.

For taking into account the viscosity of the jet in the present paper the full 3D Navier–Stokes equations were used. The effect of the ambient density, as well as the surface tension on the jet interface are taken into account. A dispersion equation for the sinusoidal disturbances propagating along the viscous jet is derived. An asymptotic analysis of this equation is performed for small wave numbers. Additionally a full numerical analysis of the inviscid and viscous version of dispersion equation is proposed and illustrated.

REFERENCES

1. *Debye P., Daen J.*, “Stability considerations on nonviscous jets exhibiting surface or body tension,” *The Physics of Fluids*, 2(1959), p. 416–421.
2. *Entov V.M., Yarin A.L.*, “The dynamics of thin liquid jets in air,” *J.Fluid Mech.*, v. 140 (1984), p. 91–111.

3. *Martinon J.*, “Stability of capillary cylindrical jets in external flow,” *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 34 (1983), p. 575–582.
4. *Rayleigh J.S.W.*, “On the Instability of Jets,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10 (1878) 4–13.
5. *Turchak L.I., Plotnikov P.V.*, *Osnovy chislennyh metodov*, Fizmatlit, Moscow (2003).
6. *Weber K.*, *Z. angew. Math. Mech.*, Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, 11 (1931), 136–154.

Hamiltonian systems motivated by Schroedinger equation

Slawianowski J. J.

Institute of Fundamental Technological Research of Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland; jslawian@ippt.gov.pl

We are discussing Hamiltonian dynamical systems with certain matrix manifolds as configuration spaces. More precisely, we deal with manifolds of linear mappings, first of all some linear groups, and manifolds of scalar products, i.e., real symmetric or complex sesquilinear hermitian forms. Next, the direct and semidirect products of those manifolds with the underlying linear spaces are used as configuration manifolds. We concentrate on geodetic models based on Riemannian structures which are in a sense intrinsic and built canonically into the structure of those configuration spaces. Those structures are not induced by any extra assumed metric in the underlying space, moreover, none such metric is assumed at all. Also certain simple non-geodetic models, i.e., ones with potential energy terms in Lagrangian are briefly mentioned, first of all, ones with “large” symmetry groups of potentials. The mentioned intrinsic metrics on our configuration spaces have “large” isometry groups and are essentially Riemannian, i.e., have non-vanishing curvature tensors. This results in a very characteristic nonlinearity even on the level of purely geodetic dynamical models. This nonlinearity has a purely geometric origin, and is very essential, i.e., non-perturbative; it does not appear as an extra correction

introduced “by hand” and imposed on some linear background as a kind of correction term.

Models of this type were formerly investigated in our dynamical models of affinely-rigid body, i.e., mechanical system ruled by the affine group, where all affine relationships between constituents are frozen during any admissible motion. This was motivated by certain problems in continuum mechanics, molecular and nuclear dynamics, and even astrophysics.

Now we concentrate on manifolds of scalar products, not on ones of linear endomorphisms. Although formally, from the analytical point of view, one deals again with matrix manifolds, this is something essentially else than Hamiltonian systems on groups; the matrices represent now twice covariant tensors (bilinear and sesquilinear forms), not mixed tensors (linear isomorphisms). This is not a formal detail, this is an important structural difference.

Models of this kind are interesting even from the purely mathematical point of view of theory of Hamiltonian dynamical systems, but we have in mind some perspectives of applications in nonlinear modifications of quantum mechanics. Nonlinearity in quantum mechanics is usually expected to be some medicine against paradoxes of the measurement process and decoherence problem. There were many attempts of introducing nonlinearity to the formalism of quantum mechanics. They were not very successful and usually happened to be more or less artificial, just because of the use of nonlinearity introduced “by hand”, ad hoc. The idea of our model is that the scalar product is not an absolute object, but a dynamical quantity; it belongs to degrees of freedom, similarly like metric tensor in General Relativity. Roughly speaking, we have two kinds of degrees of freedom: “state vector” in traditional sense of “wave function”, and “scalar product”. These two things interact mutually and the effective dynamics of the total system is essentially nonlinear. Certain preliminary discussion concerning the search of physically interpretable solutions is performed. Some attention is paid also to the problem of constraints appearing in Hamiltonian formalism when one uses the traditional Lagrangian term for the “state vector”, i.e., “wave function”. One must use then the algorithm elaborated by Dirac for such “singular Hamiltonian dynamics”. Discussed is also some alternative model, when in the “wave function” sector of the dynamics one admits in Lagrangian the terms quadratic in generalized velocities (traditional Schroedinger-type Lagrangian is linear in velocities, with configuration-dependent coefficients). Then the singu-

larity of Legendre transformation is avoided and so is the necessity of using generalized Hamiltonian formalism in Dirac sense. There are some, both formal and physical arguments for admitting such terms. There is no continuous limit transition between both models.

Usually, problems of infinite dimension obscure some simple structural ideas. To avoid this, we work in finite-dimensional manifolds and finite-dimensional spaces of “wave functions”. In the physicists language, one deals with finite-level systems. The very idea of passing over to infinite dimension, including the “usual” nonlinear Schroedinger equation with dynamical scalar product is briefly outlined, but rather heuristically, without a sufficient mathematical correctness.

Our ideas are different from what is usually meant by physicists as an analysis of classical-quantum relationships. They have not to do with quantization, limit transitions, quasi-classical WKB-limit in traditional sense, method of stationary phase and so on. Mathematically, the point is that equations we postulate for describing some quantum phenomena are, at least from the formal point of view, considered in terms of Hamiltonian systems theory. The dichotomy “quantum-classical” disappears in a sense, becomes diffused. One can suppose that physically this might be perhaps a proper procedure when describing nano-physical problems, where one deals with a convolution, overlapping of what is traditionally meant as quantum or classical.

Independently on possible quantum applications, our models may be useful for describing collective and internal degrees of freedom of classical systems, including applications in condensed matter theory.

Numerical investigation of limit cycles with dry friction

Stepanov S. Ya.

Dorodnicyn Computing center of RAS, Moscow, Russia; stepsj@ya.ru

There are many papers and books devoted to the frictional self-excited oscillations, or stick-slip phenomenon [1]. The first explanation of this

phenomenon was given by Lord Rayleigh during the years 1877–1878 [2]. This phenomenon was completely investigated for mechanical systems with one degree of freedom. For two (and more) degrees of freedom, many questions remain unanswered till now. We mention only recent papers [3–5], which relate to this paper and deal with limit cycles of predefined structure. In paper [6] an investigation is based on the one-dimensional map with successive points of transfer from stick to slip mode of friction.

We suggest a numerical algorithm, based on a two-dimensional map, for searching all possible limit cycles and their parametric investigation. We consider a double oscillator, one mass of which is in contact, with a moving with a constant velocity V , platform [4]. The equations of motion are

$$m_1\ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \quad m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - F_i$$

with the absolute coordinates x_1, x_2 referenced from equilibrium positions of masses m_1, m_2 in the absence of the friction force F_i . The Coulomb dry friction law is accepted with the presumption that the limit of the stick friction force R is greater than the slip friction force S ($R > S$).

The motion of the mass on the platform acquires one of the three distinct modes: (0) sticking $\dot{x}_2 = V$, $F_0 = k_2(x_2 - x_1)$, (1) slipping with forestalling $\dot{x}_2 > V$, $F_1 = -S$, (2) slipping with a lag $\dot{x}_2 < V$, $F_2 = S$. The switching conditions between any two of these modes are consistent and defined by the equalities $\dot{x}_2 = V$ and $k_2|x_2 - x_1| = R$.

It is shown, that the system permits limit cycles necessarily including the modes (0) and (2) and perhaps (1). So any limit cycle has to include one or more switching (0)–(2) from mode (0) to mode (2). This switching is defined by the equalities $\dot{x}_2 = V$, $k_2(x_2 - x_1) = R$. For short we shall use the word “turn” to indicate any motion between two successive switchings (0)–(2).

For finding the limit cycles, we choose the initial conditions at the moment of switching (0)–(2), for which the equalities $\dot{x}_2 = V$, $k_2(x_2 - x_1) = R$ are fulfilled. Then only two independent initial conditions remain at this instant of time. We can write this conditions in the vectorial form $(x_1(0), \dot{x}_1(0))^T = (x_1^0, \dot{x}_1^0)^T = z^0$. If the value of vector $z^k = f^k(z^0)$ after k turns coincides with its initial value z^0 , then this initial value defines the limit cycle with k turns, and z^0 is a fixed point of the map

f^k . For limit cycles with one turn and more, some symmetry properties of the phase trajectories are demonstrated analytically.

A numerical algorithm for global searching for all limit cycles (fixed points of the map $f^k(z)$), and an algorithm for constructing domains of existence and stability (stability of a fixed point of the map $f^k(z)$) of particular types of limit cycles have been developed. A classification of one turn and two turns limit cycles types has been carried out.

This work has been financially supported by grants No.08-01-00600-a, 08-08-00553-a and 09-01-08302-z of the Russian Foundation for Basic Research (RFBR).

REFERENCES

1. *Feeny B., Guran A., Hinrichs N., Popp K.* "A historical review on dry friction and stick-slip phenomena," *Applied Mechanics Review*, **51**, 321–341 (1998).
2. *Rayleigh J. W. S.* *The Theory of Sound*, Vol. 1 and 2, Dover, New York (1945).
3. *Awrejcewicz J., Olejnik, P.* "Friction pair modeling by a 2-dof system: numerical and experimental investigations," *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, **15**, No. 6, 1931–1944 (2005).
4. *Khizgiyayev S. V.* "Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry "stick-slip" friction," *Journal of Applied mathematics and Mechanics*, **71**, No. 6, 905–913 (2007).
5. *Pascal M.* "Dynamics of Coupled Oscillators Excited by Dry Friction," *J. of Computational and Nonlinear Dynamics*, **3**, 1–6 (2008).
6. *Galvanetto U., Knudsen C.* "Event Maps in a Stick-Slip System," *Nonlinear Dynamics*, **13**, 99–115 (1997).

О сингулярной нелинейной самосопряженной спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

On singular nonlinear selfadjoint spectral problem for systems of ordinary differential equations

Абрамов А. А.¹, Ульянова В. И.¹, Юхно Л. Ф.²

¹ВЦ РАН, Москва, Россия; alalabr@ccas.ru, valya@ccas.ru

²ИИМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; yukhno@imamod.ru

Рассматривается нелинейная самосопряженная спектральная задача для общей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на неограниченном интервале. Предлагается метод приближенного сведения этой задачи к соответствующей задаче на конечном интервале. В предположении о монотонной зависимости исходных данных от спектрального параметра дается метод нахождения количества собственных значений задачи в заданном интервале изменения спектрального параметра без их непосредственного вычисления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00139).

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramov A.A., Konyukhova N.B. Transfer of admissible boundary conditions from a singular point for systems of linear ordinary differential equations // Soviet. J. Numer. Analys. Math. Modelling. 1986. V. 1. № 4. P. 245–265.
2. Абрамов А.А. О вычислении собственных значений нелинейной спектральной задачи для гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 1. С. 29–38.
3. Абрамов А.А., Ульянова В.И., Юхно Л.Ф. Об общей нелинейной самосопряженной спектральной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 1. С. 38–43.

Об одном вариационном методе построения сеток в двумерных областях

A variational grid generation method on two-dimensional domains

Азаренок Б. Н.

ВЦ РАН, Москва, Россия; azarenok@ccas.ru

В работе рассматривается задача построения структурированной разностной сетки в двумерной области Ω . Для этого используется квазиконформное отображение $\mathbf{F} : \mathcal{P} \rightarrow \Omega$, где $\mathcal{P}$ — квадратная или прямоугольная область с заданной квадратной сеткой. Осуществляющие отображение функции $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ находятся из решения задачи Дирихле для системы квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Граничные условия задают взаимно однозначное соответствие между границами областей. Для эллиптических дифференциальных уравнений существует теоретическое обоснование построения невырожденных сеток. Оно базируется на теореме Радó [1].

Теорема. Пусть Ω_1, Ω_2 — односвязные ограниченные области в $\mathbb{R}^2$ с Жордановой границей, Ω_2 выпуклая и задан гомеоморфизм $\mathbf{f} : \partial\Omega_1 \rightarrow \partial\Omega_2$. Тогда гармоническое продолжение отображения $\mathbf{F} : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ является гомеоморфизмом.

Поскольку в общем случае область Ω невыпуклая, то на практике рассматривают отображение $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : \Omega \rightarrow \mathcal{P}$, для которого условия теоремы Радó выполнены, и гомеоморфизм отображения обеспечивается. Для построения сетки в области Ω проводится замена переменных и решается задача Дирихле для обращенных уравнений Лапласа [2, 3], которые представляют собой систему квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. В этом случае находится обратное гармоническое отображение $\mathbf{F} : \mathcal{P} \rightarrow \Omega$. Этот подход обеспечивает получение невырожденных сеток для довольно широкого класса областей. В силу известных свойств уравнений Лапласа координатные линии криволинейной сетки получаются гладкими, а сама сетка — квазиравномерной. Несмотря на гомеоморфизм обратного гармонического отображения, численная реализация

дискретного отображения может порождать вырожденные сетки. Одна из причин вырождения сетки обусловлена ошибками аппроксимации, возникающими при аппроксимации дифференциальных уравнений в невыпуклых областях с сильно изогнутыми границами [4]. Для дополнительного контроля за расположением сеточных линий вводится локальное отображение, задающее управляющую метрику, и решается задача Дирихле для эллиптических дифференциальных уравнений [4]. Использование локального отображения позволяет получать не только невырожденную сетку с небольшим числом узлов в невыпуклых областях, но и ячейки сетки заданной формы. Это дает возможность строить сетки с ортогонализацией в окрестности границы $\partial\Omega$ и заданным сгущением сеточных линий к границе $\partial\Omega$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00173), проекта ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН “Разработка алгоритмов построения трехмерных оптимальных сеток” и Отделения математических наук РАН (программа № 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Radó T.* Aufgabe 41, Jahresber // Deutsche Math.-Verein. 1926. V. 35. P. 49.
2. *Winslow A. M.* “Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a nonuniform triangle mesh”, J. Comput. Phys., **1**, 149–172 (1966).
3. *Thompson J. F., Mastin C. W., Thames F.* “Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies,” J. Comp. Phys., **15**, 299–319, (1974).
4. *Азаренок Б. Н.* О построении структурированных сеток в двумерных невыпуклых областях с помощью отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 48. № 5. С. 1–13.

Симметрии фундаментальных решений и функция Римана гиперболического уравнения второго порядка

Symmetries of fundamental solutions and Riemann function of second order hyperbolic equation

Аксенов А. В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
aksenov@mech.math.msu.su

В работе [1] применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными Б. Риман предложил “метод интегрирования Римана”. Для применения метода необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением специальной характеристической задачи Коши. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] дан подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Н.Х. Ибрагимовым [3] на основе использования результатов Л.В. Овсянникова по групповой классификации однородных гиперболических уравнений второго порядка [4] было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения.

В настоящей работе, на основе использования результатов работы [5], показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

С использованием предложенного метода построена функция Римана для гиперболического уравнения, возникающего в одномерной газовой динамике. Дано решение задачи о взаимодействии двух неодновременно возникших центрированных волн разрежения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09–01–00610).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ, 1948.
2. *Copson E.T.* “On the Riemann–Green Function”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **3**, 324–348 (1957/58)

3. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание. Сер. "Математика и кибернетика". № 7. 1991.
4. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения С.А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.
5. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342. № 2. С. 151–153.

Численное решение задачи о гашении колебаний балки

Numerical solution of the problem of beam oscillations damping

Атамуратов А. Ж.¹, Михайлов И. Е.²

¹МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского, Москва, Россия;
goofffydog@mail.ru

²ВЦ РАН, Москва, Россия; mikh_igor@mail.ru

Рассматривается задача гашения колебаний балки точечным демпфером за минимальное время. Колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad a > 0 - \text{const.} \quad (1)$$

Известные начальные отклонение и скорость перемещения балки будем рассматривать как начальные условия

$$u(0, x) = h_0(x), \quad u_t(0, x) = h_1(x), \quad 0 < x < l. \quad (2)$$

На концах балки наложим условия шарнирного закрепления

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = u_{xx}(t, l) = 0. \quad (3)$$

Энергия колеблющейся балки описывается интегралом

$$E(t) = \int_0^l \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{a^2}{2} u_{xx}^2 \right) dx. \quad (4)$$

Задача гашения колебаний балки формулируется следующим образом: требуется найти управление $g(t, x)$ и минимальное время T такие, чтобы $E(T) = 0$. В соответствии с работой [1] представим управляющую функцию в виде

$$g(t, x) = w(t) \delta(x - x_0 - s(t)),$$

где $w(t)$ и $s(t)$ — две искомые управляющие функции, δ — дельта-функция Дирака, x_0 — место расположения демпфера, и он может перемещаться по небольшой части балки.

Задача (1)–(3) сводится к начально-краевой задаче для системы двух уравнений второго порядка, которые аппроксимируются центральными разностями. Получившаяся конечно-разностная схема решается численным методом редукции [2].

Для решения задачи гашения колебаний балки требуется найти управляющие функции $w(t)$, $s(t)$ такие, чтобы за время T интеграл энергии балки (4) обращался в ноль. Для этого аппроксимируем функции $w(t)$ и $s(t)$ кусочно-постоянными функциями:

$$w(t) = w_j, \quad s(t) = s_j, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \dots, N_T.$$

Тогда интеграл энергии (4) будет являться функцией переменных

$$E(T) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}).$$

Оптимальные значения $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}$, минимизирующие $E(T)$ с заданной точностью ε , находятся методом покоординатного спуска.

Приводятся и анализируются результаты расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асланов С. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 28–35.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

**Сингулярная задача Римана–Гильберта
для модели распада пересоединяющегося
токового слоя**

**A singular Riemann–Hilbert problem
for a model of reconnecting current layer rupture**

Безродных С. И.¹, Власов В. И.¹, Сомов Б. В.²

¹*ВЦ РАН, Москва, Россия; bezrodnykh@pochta.ru, vlasov@ccas.ru*

²*ГАИШ МГУ, Москва, Россия; somov@sai.msu.ru*

Источником энергии в солнечных вспышках служит токовый слой, возникающий в области магнитного пересоединения, причем вспышка является результатом распада этого слоя [1]. Предложенная в [2] модель такого распада сводится к задаче Римана–Гильберта в трехсвязной области $g = \mathbb{C} \setminus (Y^+ \cup Y^-)$, представляющей собой внешность двух Y -образных разрезов на открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Разрезы определяются по формулам $Y^+ = \Gamma_0 \cup \Gamma^- \cup \Gamma^+$, $Y^- = \{z : -\bar{z} \in Y^+\}$, где $\Gamma_0 = \{z : y = 0, x \in [a, R - a]\}$ — горизонтальный отрезок, изображающий токовый слой, $\Gamma^+ = \{z : z = R + rte^{i\pi\alpha}, t \in [0, 1]\}$ и $\Gamma^- = \{z : \bar{z} \in \Gamma^+\}$ — наклонные отрезки, изображающие ударные МГД-волны.

Заметив, что область g симметрична относительно осей x и y , обозначим через G ее четверть, образованную ее пересечением с первым квадрантом и представляющую собой односвязный пятиугольник с вершинами $z_0 = \infty$, $z_1 = 0$, $z_3 = R$ (слева от разреза Γ^+), $z_4 = R + re^{i\pi\alpha}$, $z_5 = R$ (справа от разреза Γ^+). Аналогичной симметрией обладает и в целом краевая задача в области g . Ее постановка в G формулируется следующим образом: требуется найти аналитическую в G и непрерывную в $\bar{G}$ за исключением точек z_0 и z_2 функцию $\mathcal{F}$, удовлетворяющую краевому условию

$$\operatorname{Re}[h(z)\mathcal{F}(z)] = c(z), \quad z \in \partial G,$$

в котором коэффициенты $h(z)$ и $c(z)$, $z \in \partial G$, кусочно-постоянны, и отвечающую условиям роста в точках z_0 и z_2 .

Используя [3], можно показать, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно в указанном классе и имеет следую-

щий вид:

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{P} \circ \Phi(z).$$

Здесь $\zeta = \Phi(z)$ — конформное отображение области G на верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^+$ переменного ζ , подчиненное нормировке $\Phi(z_0) = \infty$, $\Phi(z_1) = 0$, $\Phi(z_4) = 1$, а $\mathcal{P}(\zeta) = \mathcal{F} \circ \Phi^{-1}(\zeta)$ — решение соответствующей задачи Римана–Гильберта в $\mathbb{H}^+$, имеющее вид обобщенного интеграла Кристоффеля–Шварца

$$\mathcal{P}(\zeta) = -i \int_0^\zeta t^{-1/2} (t - \mu)^{-3/2} (t - \lambda)^{\alpha-1} (t - \tau)^{-1/2-\alpha} P_3(t) dt, \quad (1)$$

где $\mu = \Phi(z_2)$, $\lambda = \Phi(z_3)$, $\tau = \Phi(z_5)$, а $P_3(\zeta)$ — полином третьей степени с вещественными коэффициентами, зависимость которых от параметров задачи выражаются через функцию Аппеля по формулам из [4]. Отображение, обратное к Φ , дается интегралом Кристоффеля–Шварца

$$\Phi^{-1}(\zeta) = \mathcal{K} \int_0^\zeta t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (t - 1) (t - \tau)^{\alpha-1} dt. \quad (2)$$

Осуществлена высокоточная численная реализация задачи. Получены картины магнитного поля, соответствующие различным наборам параметров модели. Выявлен ряд физических закономерностей и исследован тип ударных волн, возникающих в рассматриваемой модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00837 и № 08-02-01033-а), Программы №3 ОМН РАН и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Somov B. V. Plasma Astrophysics. Part I, Fundamentals and Practice. Part II, Reconnection and Flares.* New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006
2. *Безродных С. И., Власов В. И., Сомов Б. В.* Обобщенные аналитические модели токового слоя Сыроватского // Письма в Астрономический журнал. 2010. Т. 36. № 11. С. 792–809.
3. *Безродных С. И.* Сингулярная задача Римана–Гильберта и ее приложение. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 2006.

4. Безродных С. И. Соотношение типа Якоби для обобщенной гипергеометрической функции // III Междунар. конф. “Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания”. Обнинск, 14–18 мая 2006 г. Тез. докл. С. 18–19.

Высокоэффективный аналитико-численный метод решения одного класса сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений

Highly effective analytic-numerical method for solving a class of singularly perturbed systems of nonlinear differential equations

Безродных С. И., Власов В. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; bezrodnykh@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенной системы M дифференциальных уравнений на отрезке $[-1, 1]$ относительно функции $\Psi(x)$ и вектор-функции $P(x) = \{P_1(x), \dots, P_{M-1}(x)\}$

$$[\varepsilon^2(x) \Psi'(x)]' + \mathcal{L}[\Psi(x), P(x)] = \text{sign } x, \quad (1)$$

$$[a_m(\Psi) P_m'(x) + \Psi'(x) b_m(\Psi) P_m(x)]' = \mathcal{R}_m(x, P), \quad (2)$$

где $m = \overline{1, M-1}$, с граничными условиями

$$\Psi(\pm 1) = V^\pm, \quad P_m(\pm 1) = P_m^\pm, \quad m = \overline{1, M-1}. \quad (3)$$

В уравнении (1) функция $\varepsilon(x)$ является ступенчатой, определяемой по формуле

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_-, & x \in [-1, 0), \\ \varepsilon_+, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

где $\varepsilon^\pm$ — малые положительные параметры; $\mathcal{L}(\Psi, P)$ — гладкая функция от Ψ и P_m , для которой выполняются условия

$$\mathcal{L}(\Psi(\pm 1), P(\pm 1)) = \pm 1.$$

В уравнениях (2) коэффициенты a_m, b_m являются гладкими функциями Ψ , причем a_m не обращаются в нуль, а правые части $\mathcal{R}_m(x, P)$ достаточно гладко зависят от аргументов x и P_m .

Предлагаемый метод решения задачи (1)–(3), являющийся обобщением результатов из [1–4], заключается в следующем. Обозначим через $R_m(x)$ правые части уравнений (2), понимаемые как функции x ,

$$R_m(x) = \mathcal{R}_m(x; P), \quad (4)$$

и заметим, что из уравнений (2) с учетом граничных условий (3) можно выразить P_m как функции Ψ и R_m , т.е. $P_m = \mathcal{P}_m[\Psi, R_m]$, где интегральные операторы $\mathcal{P}_m$ записываются в явном виде. Подставляя эти выражения в (1) и (4) и вводя обозначения

$$R = \{R_1, \dots, R_{M-1}\}, \quad \mathbf{P}[\Psi, R] = \{\mathcal{P}_1[\Psi, R_1], \dots, \mathcal{P}_{M-1}[\Psi, R_{M-1}]\},$$

$$\mathbf{R}[\Psi, R] = \{\mathcal{R}_1(x, \mathbf{P}[\Psi, R]), \dots, \mathcal{R}_{M-1}(x, \mathbf{P}[\Psi, R])\},$$

где $P = \mathbf{P}[\Psi, R]$, приходим к следующей системе уравнений относительно новых неизвестных Ψ и R :

$$[\varepsilon^2(x) \Psi'(x)]' + \mathcal{L}[\Psi(x), \mathbf{P}[\Psi, R]] = \text{sign } x, \quad (5)$$

$$R = \mathbf{R}[\Psi, R]; \quad (6)$$

здесь (5) является интегро-дифференциальным уравнением, а (6) — системой интегральных уравнений. Система (5), (6) решается при помощи сочетания метода Ньютона и метода продолжения по параметру, причем обращение производной Фреше для уравнения (5) осуществляется на основе приближения Грина–Лиувилля (метод ВКБ), а начальное приближение для метода Ньютона находится в явном виде. Метод обладает сверхэкспоненциальной скоростью сходимости, что подтвердила его численная реализация.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00837), Программы №3 ОМН РАН и Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. И., Безродных С. И. Метод решения сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 6. С. 731–734.

2. *Безродных С. И., Власов В. И.* Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 12. С. 2232–2263.
3. *Безродных С. И., Власов В. И.* Эффективное решение сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 36. С. 8–17.
4. *Безродных С. И., Власов В. И.* Эффективный метод решения сингулярно возмущенной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 15. С. 45–58.

Наша многолетняя совместная работа с Анатолием Алексеевичем Дородницыным

Our long-term teamwork with Anatoly Alekseevich Dorodnicyn

Белоцерковский О. М.

ВЦ РАН, ИАП РАН, Москва, Россия

В сообщении кратко рассказывается о весьма плодотворной работе группы молодых сотрудников ВЦ и ИАП с Анатолием Алексеевичем Дородницыным (Ю.Д. Шмыглевский, П.И. Чушкин, О.М. Белоцерковский, С.В. Иорданский и др.) по некоторым направлениям постановки и решения задач математического моделирования аэродинамических и близких им проблем. По существу, эта группа сформировалась в начале 50-х гг. в связи с открывшейся тогда возможностью проводить расчеты на БЭСМ-1. Сам Анатолий Алексеевич руководил тогда группой расчетчиков, машинное же обеспечение проекта обеспечивалось под руководством С.А. Лебедева. С обеими этими группами взаимодействовала отдельная в то время группа программистов под руководством Г.С. Хованского. Работы велись в весьма сложных условиях (счет преимущественно в ночное время) на протяжении нескольких лет (конец 50-х — начало 60-х гг.). Моделировались задачи теории

взрыва, стационарные задачи аэродинамики и космических исследований.

В докладе приводятся фактические данные, результаты исследований и описывается общая атмосфера внутри творческого коллектива. По существу, это была эпоха зарождения в ВЦ АН СССР вычислительных математических подходов к решению целого ряда физических проблем, позже приведших к бурному развитию нескольких научных направлений, работами над которыми плодотворно занимались вновь созданные лаборатории ВЦ. Автор делится своими воспоминаниями в память о тех, кого с нами уже нет.

**Оценка скорости глобальной сходимости
итерационного метода к сильным решениям
задачи Навье–Стокса**

**An estimate for the global convergence rate
of iterations to strong solutions of the
Navier–Stokes problem**

Боговский М. Е.

РУДН, Москва, Россия; mbogovskii@sci.pfu.edu.ru

В ограниченной или неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с компактной границей $\partial\Omega \in C^2$ рассматривается начально-краевая задача для нелинейной нестационарной системы уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu \Delta v + \nabla p = f, & \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = a, & v|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} a = 0, a|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

с постоянным коэффициентом кинематической вязкости $\nu > 0$. На высоту цилиндра $Q_T = \Omega \times (0, T)$, на число Рейнольдса, а также на величины каких-либо норм данных задачи a, f не накладывается никаких априорных ограничений типа “малости”.

Сильное решение задачи (1) определяется как упорядоченная пара $\{v, \nabla p\}$ с полем скоростей $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ из анизотропного пространства

Соболева $W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T)$ и с градиентом давления класса G_T , где G_T — подпространство потенциальных векторных полей $\nabla p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ в пространстве Лебега $L_2(Q_T)$. При этом подпространство H_T соленоидальных векторных полей $\{v \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T) : \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial\Omega} = 0\}$ рассматривается как гильбертово пространство с индуцированной нормой, а класс $H_T \times G_T$ сильных решений задачи (1) рассматривается как гильбертово пространство с обычной нормой декартова произведения.

Как известно, в случае достаточной малости числа T или величин соответствующих норм данных задачи итерационная последовательность сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\} \in H_T \times G_T$ линейных начально-краевых задач

$$\begin{cases} v_t^n + (v^{n-1}, \nabla)v^n - \nu \Delta v^n + \nabla p^n = f, & \operatorname{div} v^n = 0, \\ v^n|_{t=0} = a, & v^n|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} a = 0, a|_{\partial\Omega} = 0, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

сходится в $H_T \times G_T$ к сильному решению задачи (1) при любом выборе начального приближения $\{v^0, \nabla p^0\} \in H_T \times G_T$. Такая сходимость “в малом” легко устанавливается с помощью принципа сжимающих отображений. Ответ на вопрос о глобальной сходимости дает следующая

Теорема 1. *При заданных $T > 0$, $a \in W_2^1(\Omega)$ и $f \in L_2(Q_T)$ для сходимости в $H_T \times G_T$ при $n \rightarrow \infty$ последовательности сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\} \in H_T \times G_T$ итерационных задач (2) с любым начальным приближением $\{v^0, \nabla p^0\} \in H_T \times G_T$ необходимо и достаточно, чтобы существовало сильное решение $\{v, \nabla p\} \in H_T \times G_T$ задачи (1).*

Отметим, что необходимость в теореме 1 очевидна, а доказательство достаточности разбивается на два этапа. Сначала из предположения о существовании сильного решения задачи (1) выводится глобальная сходимость последовательности сильных решений итерационных задач (2) в норме класса слабых решений Хопфа. Затем с помощью подхода [1, 2] устанавливается глобальная сходимость той же последовательности, но уже в норме класса сильных решений $H_T \times G_T$. Оценку скорости глобальной сходимости в норме $H_T \times G_T$ дает следующая

Теорема 2. *Для сходящейся в $H_T \times G_T$ при $n \rightarrow \infty$ последовательности сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\}$ итерационных задач (2) спра-*

ведлива оценка скорости глобальной сходимости

$$\|v - v^n\|_{H_T} + \|\nabla p - \nabla p^n\|_{L_2(Q_T)} \leq C(\lambda) \cdot \lambda^{-n} \quad \forall \lambda \in (0, 1) \quad (3)$$

к сильному решению $\{v, \nabla p\}$ задачи (1) с некоторой положительной постоянной $C(\lambda)$, не зависящей от n .

Таким образом, если сильное решение $\{v, \nabla p\}$ задачи (1) существует, то при любом выборе начального приближения итерационная последовательность сильных решений $\{v^n, \nabla p^n\}$ линейных задач (2) сходится к $\{v, \nabla p\}$ в норме $H_T \times G_T$ со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой сколь угодно близок к нулю. Очевидно, простейшим из всех начальных приближений будет $v^0 = 0$ и $p^0 = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00661).

ЛИТЕРАТУРА

1. Боговский М. Е. О некоторых аспектах применения метода Ньютона к уравнениям Навье–Стокса // ДАН. 2009. Т. 426. № 3. С. 295–299.
2. Боговский М. Е. О скорости сходимости одного итерационного метода для линеаризованных уравнений Навье–Стокса // ДАН. 2010. Т. 432. № 6. С. 732–735.

О сингулярно возмущенных задачах в случае кратных корней вырожденного уравнения

On singularly perturbed problems in the case of multiple roots of the degenerate equation

Бутузов В. Ф.

МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия; butuzov@phys.msu.ru

Для сингулярно возмущенной краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon A(x) \frac{du}{dx} + f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, хорошо изученным является случай, когда вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет простой устойчивый корень $u = \varphi(x)$, т.е. $f_u(\varphi(x), x, 0) < 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ (см. [1]). В этом случае задача (1), (2) при достаточно малых ε имеет решение $u(x, \varepsilon)$ с асимптотическим представлением

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\bar{u}_i(x) + Q_i(\xi) + \tilde{Q}_i(\tilde{\xi}) \right) + o(\varepsilon^n), \quad (3)$$

где $\bar{u}_i(x)$ — регулярные члены асимптотики, а $Q_i(\xi)$ и $\tilde{Q}_i(\tilde{\xi})$ — пограничные функции, $\xi = x/\varepsilon$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon$ — погранслоинные переменные. В данном случае функция $A(x)$ не играет существенной роли, в частности асимптотика решения имеет вид (3) и тогда, когда $A(x) \equiv 0$.

Оказывается, что ситуация резко изменяется, если вырожденное уравнение имеет кратный корень.

Пусть функция $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = -h(u, x)(u - \varphi(x))^2 + \varepsilon f_1(u, x, \varepsilon)$$

и пусть $\bar{h}(x) := h(\varphi(x), x) > 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. В этом случае корень $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения является двукратным и, как оказывается, важную роль играют теперь коэффициент $A(x)$ и функция $f_1(u, x, 0)$. Изучены два случая.

1) Если $A(x) \equiv 0$ и $\bar{f}_1(x) := f_1(\varphi(x), x, 0) > 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$, то для достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), имеющее асимптотическое представление

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) + \varepsilon^{3/4} \sum_{i=0}^{4n-3} \varepsilon^{i/4} \left[Q_i(\xi) + \tilde{Q}_i(\tilde{\xi}) \right] + o(\varepsilon^n), \quad (4)$$

где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{3/4}$ и все члены асимптотики находятся последовательно в явном виде.

2) Если $A(x) > 0$, $g(x) := A(x)\varphi'(x) + \bar{f}_1(x) > 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$ и $\bar{f}_1(1) > 0$, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение

$u(x, \varepsilon)$ с асимптотическим представлением

$$u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon^{i/2} \bar{u}_i(x) + \varepsilon \sum_{i=0}^{2n-2} \varepsilon^{i/2} Q_i(\xi) + \varepsilon^{1/2} \sum_{i=0}^{2n-1} \varepsilon^{i/2} \tilde{Q}_i(\tilde{\xi}) + o(\varepsilon^n), \quad (5)$$

где $\xi = x/\varepsilon$, $\tilde{\xi} = (1-x)/\varepsilon^{1/2}$.

Выражения (4) и (5) показывают, что структура асимптотики погранслоного решения и, в частности, масштабы погранслоных переменных в случае двукратного корня вырожденного уравнения существенно отличаются от случая простого корня. Обоснования представлений (4) и (5) проводятся с помощью метода дифференциальных неравенств.

Задача (1), (2) изучена также в случае трехкратного корня вырожденного уравнения, здесь возникают свои масштабы погранслоных переменных. Кроме того рассмотрены параболические задачи в случае кратных корней вырожденного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

Аддитивные схемы (схемы расщепления) для решения нестационарных задач вязкой несжимаемой жидкости

Additive schemes (splitting schemes) for solving unsteady problems of incompressible viscous flows

Вабищевич П. Н.

*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия;
vabishchevich@gmail.com*

Теория аддитивных схем (схем расщепления) начала развиваться с середины прошлого столетия с целью реализации перехода на новый

временной слой посредством решения одномерных задач, построением локально-одномерных разностных схем. Более поздний период теории и практики аддитивных схем связывается с построением схем расщепления по физическим процессам для сопряженных задач, когда более простые задачи связываются с описанием отдельных свойств исследуемого объекта. В настоящее время интерес к аддитивным схемам порожден желанием построения безытерационных алгоритмов декомпозиции области.

Различные классы аддитивных схем построены для векторных задач, к которым относятся уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости при использовании естественных переменных *давление, скорость*. В этом случае отдельные компоненты вектора неизвестных связаны друг с другом. Использование тех или иных схем расщепления ориентировано на то, чтобы получить хорошие задачи для отдельных компонент решения на новом временном слое. В частности, получить хорошую задачу для расчета давления на новом временном слое. Для задач динамики вязкой несжимаемой жидкости в естественных переменных схемы расщепления по физическим процессам (выделения самостоятельной задачи для давления) используются в различных вариантах. Наиболее просто рассматривать соответствующий оператор переноса давлением на подпространстве соленоидальных функций.

В гидродинамике важный класс составляют задачи для неоднородной жидкости. Неоднородность обусловлена, например, непостоянством вязкости. Основные особенности рассматриваемых задач связаны с тем, что уравнения для отдельных компонент скорости сильно завязаны (через главные производные). В то время как в задачах с постоянной вязкостью такого зацепления уравнений нет и это дает возможность построения вычислительных алгоритмов с относительно независимым решением уравнений для отдельных компонент скорости. Специальные схемы расщепления позволяют сохранить такую особенность вычислительного алгоритма и в задачах динамики вязкой неоднородной жидкости.

Основная вычислительная работа в задачах гидродинамики даже при расщеплении по физическим процессам связана с расчетом давления: мы имеем дискретную эллиптическую задачу с граничными условиями Неймана. Предложена новая аддитивная схема при численном решении уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидко-

сти, которая основана на покоординатном расщеплении операторов градиента и дивергенции. Основное преимущество этой схемы расщепления связано с тем, что ее вычислительная реализация основана на ряде одномерных задач для расчета давления.

Отмеченные схемы покоординатного расщепления реализуют один из возможных подходов к упрощению задачи для давления, который мы можем связать с последовательным решением набора задач меньшей размерности — решением одномерных задач. Второй вариант ориентирован на решение последовательности задач в подобластях. В этом контексте мы можем говорить об аддитивных схемах декомпозиции области. Подобные аддитивные схемы строятся на основе регуляризованных аддитивных схем. Эти схемы расщепления относятся к классу схем полной аппроксимации, что значительно облегчает их исследование, а их построение базируется на единой методологической основе — принципе регуляризации операторно-разностных схем. Вычислительная реализация может быть как синхронной (аддитивные схемы покомпонентного расщепления), так и асинхронной (аддитивно-усредненные схемы), что позволяет адаптировать их под архитектуру используемых вычислительных систем.

Уравнения Навье–Стокса имеют типичную квадратичную нелинейность для конвективных слагаемых. Аддитивные схемы можно использовать при приближенном решении нелинейных задач для того, чтобы построить схемы второго порядка аппроксимации по времени, реализация которых связана с решением линейных задач.

Консервативные и монотонные схемы для задач фильтрации и переноса в пористых средах

Conservative and monotone schemes for problems of filtration and transport in porous media

Василевский Ю. В., Капырин И. В., Никитин К. Д.,
Данилов А. А.

ИБМ РАН, Москва, Россия; yuri.vassilevski@gmail.com

Методы пространственной дискретизации операторов диффузии и конвекции лежат в основе численного моделирования переноса смеси и многофазной фильтрации жидкостей в пористых средах. Применимость численной схемы к неоднородным средам с полными тензорами диффузии и к неструктурированным расчетным сеткам с многоугольными и многогранными ячейками является важным требованием в ряде приложений. В докладе рассматриваются численные схемы, удовлетворяющие этому требованию, а также обеспечивающие локальную консервативность, второй порядок аппроксимации, неотрицательность решения и малую диссипативность в задачах переноса.

Предлагаемые схемы базируются на методе конечных объемов со степенями свободы в центрах ячеек. Отличительной особенностью схем является новый нелинейный метод двухточечной дискретизации потока на грани ячейки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00159) и корпорации ExxonMobil.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Василевский Ю. В., Капырин И. В.* Две схемы расщепления для нестационарной задачи конвекции–диффузии на тетраэдральных сетках // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1–19.
2. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu.* “Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes,” J. Comp. Phys., **228**, 703–716 (2009).
3. *Danilov A., Vassilevski Yu.* “A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes,” Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, **24**, 207–227 (2009).

4. *Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu.* “A monotone finite volume method for advection–diffusion equations on unstructured polygonal meshes,” *J. Comp. Phys.*, **229**, 4017–4032 (2010).
5. *Nikitin K., Vassilevski Yu.* “A monotone nonlinear finite volume method for advection–diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D,” *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **25**, 335–358 (2010).

Особенности применения метода Галеркина к решению уравнений Навье–Стокса

Peculiarities of Galerkin method application to the solution of Navier–Stokes equations

Волков А. В.

ЦАГИ, Жуковский, Россия; andrey.wolkov@tsagi.ru

Доклад посвящен обсуждению особенностей применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями (DG-метод) к решению уравнений Эйлера и Навье–Стокса. Метод позволяет получать высокий порядок точности численной схемы на локальном шаблоне аппроксимации при использовании неструктурированных сеток с ячейками произвольной формы. Это дает возможность сократить компьютерные ресурсы при решении актуальных прикладных задач.

В докладе обсуждаются предложенный автором способ монотонизации численной схемы на скачках уплотнения и методы решения систем сеточных уравнений в рамках DG аппроксимации. Демонстрируется необходимость учета кривизны обтекаемой поверхности при использовании схемы высокого порядка точности.

Возможности метода демонстрируются на решении известных тестовых задач: вязкое и невязкое обтекание цилиндра, течение в сопле Лавала, течение Блазиуса и Пуазейля. Рассмотрено также пространственное турбулентное обтекание изолированного крыла и задачи о распространении цилиндрической и сферической акустических волн.

На основании сравнений DG-метода с широко используемым в на-

стоящее время методом конечного объема делается вывод о перспективности нового подхода.

Симметризация уравнений нелинейной теории упругости

Symmetrization of finite hyperelasticity equations

Гаранжа В. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; garan@ccas.ru

В 1977 г. Джон Болл показал [1], что достаточным условием для материальной устойчивости упругой среды (для справедливости условий Адамара–Лежандра) является *поливыпуклость*, т.е. возможность записи внутренней энергии как выпуклой функции миноров матрицы Якоби упругой деформации. В работе показано, что эти же условия достаточны для того, чтобы нестационарные уравнения теории термоупругости с конечными деформациями допускали каноническую термодинамически согласованную симметризованную запись С.К. Годунова [2], удовлетворяющую условиям гиперболичности по Фридрихсу. При этом естественно получается набор прямых и двойственных переменных для построения энтропийных решений в задачах ударных деформаций материалов. Напомним, что в [2] (см. также [3, 4]) был предложен способ выбора вектора переменных $q(y)$ и специальных потенциалов $\mathcal{L}(q)$, $\mathcal{L}^j(q)$, с использованием которых многие системы уравнений математической физики можно привести к специальному каноническому виду, который записан ниже в несколько более общем виде по сравнению с [2]. Здесь $y(t, x_1, x_2, x_3)$ обозначает вектор неизвестных системы законов сохранения, t — время, а x_i — лагранжеские или эйлеровы координаты материальной точки. Будем требовать, чтобы функция $\mathcal{L}(q)$ была строго выпуклой, обладала положительно определенной матрицей Гессе, а потенциалы $\mathcal{L}^j$ допускали бы следующее представление $\mathcal{L}^j(q) = \mathcal{L}_0^j(q) + v_j^k(q)\phi_k(q)$, где для $k = 1, \dots, K$ функции v_j^k составляют бездивергентное векторное поле v^k , для ко-

того справедливы дополнительный закон сохранения $\partial v_j^k / \partial x_j = 0$. Этот закон сохранения является следствием основных уравнений, если выполняется в начальный момент времени. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}_q^j$ следующую неполную производную $\mathcal{L}^j$ по q : $\tilde{\mathcal{L}}_q^j = \mathcal{L}_{0q}^j + v_j^k \phi_{kq}$. В качестве обобщенной канонической системы возьмем систему уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{L}_q}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_q^j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

которая дополняется энтропийным неравенством

$$\frac{\partial (q^T \mathcal{L}_q - \mathcal{L})}{\partial t} + \frac{\partial (q^T \tilde{\mathcal{L}}_q^j - \mathcal{L}^j)}{\partial x_j} \leq 0,$$

переходящим в равенство на гладких решениях. Как легко убедиться, система уравнений (1) является симметрической и гиперболической по Фридрихсу. В данной работе показано [5], что трехмерные уравнения нелинейной теории упругости с поливыпуклой в смысле Бола внутренней энергией допускают симметризованную запись (1) как в лагранжевых, так и в эйлеровых координатах, при этом в самом общем случае размерность вектора неизвестных y может достигать 23 (плотность, вектор потоков, матрица дисторсии, присоединенная матрица дисторсии, полная энергия). Потенциал $\mathcal{L}$ строится как преобразование Лежандра негэнтропии $-S(y)$, которая является строго выпуклой функцией y : $\mathcal{L}(q) = \sup_y (q^T y + S(y))$, а $q = y^*$ — это вектор двойственных переменных. Метод симметризации обобщается на случай уравнений анизотропной кристаллоупругости, развиваемый в последних работах С.К. Годунова и И.М. Пешкова.

Работа поддержана грантом НШ-4096.2010.1 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., гос. контракт № НК 408(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
2. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем // ДАН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 520–523.
3. Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга, 1998.

4. Годунов С. К., Пешков И. М. Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // ЖВМ и МФ. 2008. Т. 48. № 6. С. 1034–1055.
5. Гаранжа В. А. Поливыпуклые потенциалы, обратимые деформации и термодинамически согласованная запись уравнений нелинейной теории упругости // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 9. С. 1–29.

К проблеме ускорения жидкого тела On the problem of acceleration of a liquid body

Голубятников А. Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; golubiat@mail.ru

Хорошо известны работы академика А.А. Дородницына в областях прикладной математики, связанных с геофизикой, аэро- и гидродинамикой. В докладе речь пойдет о задаче ускорения относительно мягких тел большим перепадом давления. Такого рода проблемы, в частности, ускорение оболочек с образованием кумулятивных струй, исследовались, в основном в некоторых приближениях, такими учеными как Г.Ф. Тейлор, Г. Биркгоф, М.А. Лаврентьев, Е. Отт, Г.Г. Черный и др. В последнее время был достигнут прогресс в обеспечении устойчивости движения оболочки за счет учета остаточной (после действия ударной нагрузки) упругости материала [1]. Наряду с этим представляет интерес проведение оптимизации и исследование устойчивости оптимального решения такой задачи. Ограничимся моделью несжимаемой однородной линейно вязкой жидкости, хотя исследование оптимизации обобщается и на вязкоупругую модель Фойгта с выпуклой диссипацией.

Рассмотрим задачу оптимизации метания заданной массы M жидкости с плотностью ρ_0 некоторым распределением поверхностного давления p_Σ . Пусть заданы начальные продольный L и поперечный R габариты, так что $\pi R^2 L \rho_0 \geq M$, конечный поперечный габарит $R_1 < R$, который реализуется за время t_1 при заданном конечном импульсе I_1 . Требуется найти начальную форму и эволюцию распределения p_Σ при

минимальном вкладе энергии как за счет работы внешнего давления A , так и энергии K_0 возможного удара для создания начального поля скоростей $\mathbf{v}_0$.

Рассмотрим интегральное уравнение живых сил в конечный момент времени t_1

$$K_0 + A = K_1 + D \equiv \int_M (v_1^2/2) dm + \int_0^{t_1} \int_M 2\nu e_{ij} e^{ij} dm dt.$$

В диссипацию D входит интеграл по времени, который независимо может быть оценен снизу: $D \geq 12\nu M \ln^2 a_1/t_1$. Равенство реализуется на движениях с однородной деформацией. В цилиндрических координатах $r = a(t)\rho$, $z = \zeta/a^2(t) + b(t)$, где $a = a_1^{t/t_1}$, $a_1 = R_1/R$. Вращение опускаем. Течение потенциально, но требуется, во всяком случае, поперечный начальный удар.

Далее минимизируется кинетическая энергия по начальной форме тела. Ограничимся случаем равенства $L = M/(\pi\rho_0 R^2)$, или прямым круговым цилиндром. При этом конечные кинетическая энергия и импульс равны

$$K_1 = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{6a_1^6} \right) \frac{a_1^2 \ln^2 a_1}{t_1^2} + \frac{I_1^2}{2M}, \quad I_1 = M \left(\dot{b}_1 - \frac{L \ln a_1}{a_1^2 t_1} \right).$$

Ясно, что K_1 можно также минимизировать по параметру R , используя формулу для L . Тогда получим $R/L = 2/(\sqrt{3}a_1^3)$, т.е. действительно, тонкую оболочку (обычно $a_1 \sim 1/2$).

Найденное решение с однородной деформацией полностью удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса, из которых определяется распределение давления. Тензор напряжений диагонален, что позволяет удовлетворить краевым условиям и найти необходимое распределение давления p_Σ . При этом еще остается произвол в одну функцию от времени $p(t)$, который может быть использован для определения $b(t)$: $\rho_0 \ddot{b} = a_1^{2t/t_1} p(t)$.

Полностью решается и исследуется линейная задача об устойчивости ускорения обжимаемого цилиндра в рамках потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости, когда слабо возмущаются форма тела, начальное поле скорости и давление на границе. При

этом используются лагранжевы координаты невозмущенного движения. Тогда для возмущений потенциала абсолютного движения и давления имеем

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0, \quad \text{на } \Sigma \quad d\tilde{\varphi}/dt = -\tilde{p}/\rho_0.$$

Особенностью данной задачи является наличие при малых L/R в окрестности начала движения «малого знаменателя» $a^{-3}(t)L/R$, что приводит к продольному выпучиванию, которое постепенно исчезает. Это явление может быть устранено специальным заданием функции $\tilde{p}$ на границе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00026 и № 08-01-00401).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубятников А. Н., Зоненко С. И., Черный Г. Г. Новые модели оболочек, метаемых взрывом // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 5. С. 727–743.

О некоторых математических проблемах гомографической динамики

On some mathematical problems of homographic dynamics

Гребеников Е. А., Земцова Н. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; e-greben@yandex.ru, zemni@yandex.ru

Запуск искусственных спутников Земли способствовал появлению нового научного термина “космическая динамика”, который вытесняет из публикаций классический термин “механика неба”, предложенный Лапласом еще в начале 19-го века. В русской транскрипции мы привыкли к термину “небесная механика”.

Сегодня “космическая динамика” представляет собой большой раздел современной науки, в котором, в частности, исследуется динамика новых космических объектов с помощью разнообразных математических методов и электронно-вычислительных технологий и в резуль-

тате этого появилось много исследований, которые можно отнести к космической гомографической динамике.

В этих работах рассматриваются проблемы существования и свойства динамических моделей, которые в процессе изменения времени остаются “гомотетичными” (“гомографичными”) первоначальному геометрическому образу. Размеры конфигурации при этом могут расти или убывать пропорционально значению так называемого коэффициента гомотетии. Первые гомографические решения в ньютоновой проблеме трех тел были найдены еще Эйлером и Лагранжем. Это так называемые “коллинеарные решения” Эйлера и “треугольник” Лагранжа.

Добавим, что для исследования устойчивости по Ляпунову треугольника Лагранжа, в частности, была разработана во второй половине 20-го века “теория условно-периодических решений гамильтоновых систем А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера на многомерных торах” (сокращенно КАМ-теория).

Использование “компьютерных алгебр”, то есть систем программирования типа “Mathematica” и “Maple” позволило авторам показать, что многие модели ньютоновой проблемы n тел (для значений $n = 4, 5, \dots, 10$ и др.) имеют гомографические решения с различными динамическими и геометрическими свойствами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00283 и № 09-01-90425).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Себекей В.* Теория орбит. М.: Наука, 1982.
2. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
3. *Elmabsout B.* “Sur l’existence de certaines configurations d’équilibre r’elatif dans le probl’eme des n corps”, *Celestial Mech. and Dynamical Astron.*, **4**, No. 1, 131–151 (1988).
4. *Гребеников Е. А., Козак-Сковородкина Д., Якубяк М.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М.: РУДН, 2002.
5. *Гребеников Е. А., Земцова Н. И.* О существовании асимметричных решений функциональных уравнений Лагранжа-Винтнера // *Нелинейный анализ и гомографическая динамика*. М.: ПАИМС, 1999. С. 70–78.

6. *Zemtsova N. I.* “Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry”, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **3**, No. 1, 121–130 (2001).
7. *Ихсанов Е. В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики. М.: РУДН, 2004.
8. *Гадомский Л., Ковальчук И. Р., Чичурин А. В.* Построение математических моделей для задач космической динамики в системе компьютерной алгебры Mathematica. М.: МАКС Пресс, 2007.
9. *Гребеников Е. А., Прокопеня А. Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. М.: ВЦ РАН, 2005. С. 3–25.

Об устойчивости семейства несамосопряженных разностных схем

On the stability of a family of non self-adjoint difference schemes

Гулин А. В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; vmgul@cs.msu.su

Рассматривается семейство разностных схем

$$\begin{aligned} y_{t,i} - y_{\bar{x}x,i}^{(\sigma)} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad y_i^0 = u_0(x_i), \\ y_0^{n+1} - \alpha y_N^{n+1} &= 0, \quad (1 + \alpha\gamma)y_{t,N} + \frac{2}{h} \left(y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \gamma y_{x,0}^{(\sigma)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

аппроксимирующее уравнение теплопроводности с нелокальными граничными условиями. В результате разделения переменных в (1) возникает задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x}x,i} + \lambda \mu_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \mu_0 = \alpha \mu_N, \\ \frac{2}{h} (\gamma \mu_{x,0} - \mu_{\bar{x},N}) + (1 + \alpha\gamma) \lambda \mu_N &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Собственные значения имеют вид $\lambda = 4N^2 \sin^2(0.5\nu h)$, где ν является корнем уравнения $\cos \nu = \beta$ и $\beta = (\alpha + \gamma)/(1 + \alpha\gamma)$. В веществен-

ном случае, когда $|\beta| \leq 1$, все собственные значения неотрицательны. В комплексном случае ($|\beta| > 1$), как правило, имеются собственные значения с отрицательной действительной частью, следствием чего является неустойчивость задачи (1). Обозначим

$$\cosh_h \pi = \cosh \left(h^{-1} \ln \left(\frac{1 + \sin(\pi h)}{\cos(\pi h)} \right) \right) = \cosh \pi + O(h^2).$$

Элементарные рассуждения приводят к выводу о том, что задача (2) не имеет собственных значений в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда $-\cosh_h \pi \leq \beta \leq 1$. Остановимся подробнее на частном случае, когда $\alpha = 0$ и параметр $\beta = \gamma$ принадлежит области устойчивости. Тогда основной пространственный оператор разностной схемы (1) определяется правилом $y_0 = 0$ и

$$(Ay)_i = -y_{\bar{x},i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (Ay)_N = \frac{2}{h} (y_{\bar{x},N} - \gamma y_{x,0}). \quad (3)$$

Оператор A действует в пространстве H , состоящем из комплекснозначных функций $y = y(x)$, где $x = x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $y(0) = 0$. Введем в H скалярное произведение $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} hy_i \bar{v}_i + hy_N \bar{v}_N / 2$.

Спектр оператора (3) обладает следующими свойствами.

Если $-\cosh_h \pi < \gamma < 1$ и $\gamma \neq \pm 1$, то все собственные значения оператора (3) — различные числа, расположенные в правой полуплоскости. Как следствие получаем, что система собственных функций оператора (3) образует базис в пространстве сеточных функций, а условие $-\cosh_h \pi < \gamma < 1$ необходимо для устойчивости схемы (1) с $\alpha = 0$. Для формулировки теоремы об устойчивости потребуется ввести значение параметра $\gamma = \gamma_*$, определяемое следующим образом. Обозначим через $\lambda_0(\gamma)$ и $\lambda_{N-1}(\gamma)$ собственные значения оператора (3) соответственно с минимальной и максимальной действительными частями.

Лемма 1. *Существует единственная точка*

$$\gamma = \gamma_* \in (-\cosh_h \pi, -1), \text{ для которой } \frac{\operatorname{Re} \lambda_0(\gamma)}{h^2 |\lambda_0(\gamma)|^2} = \frac{\operatorname{Re} \lambda_{N-1}(\gamma)}{h^2 |\lambda_{N-1}(\gamma)|^2}.$$

Нахождение значения γ_* сводится к решению некоторого кубического уравнения. Можно показать, что $\gamma_* = -\cosh_h \pi + O(h^2)$. Образует матрицу $M = [\mu^{(0)} \mu^{(1)} \dots \mu^{(N-1)}]$, столбцами которой являются линейно независимые собственные векторы оператора A . Эта матрица

определяет линейный оператор $M : H \rightarrow H$. Сопряженный оператор обозначим через M^* .

Теорема 1. Пусть $\alpha = 0$ и $\gamma_* \leq \gamma < -1$. Если схема (1) устойчива в каком-либо пространстве H_D , то выполнено неравенство

$$(\sigma - 0.5) \varkappa + \frac{1}{2 \left(1 + \cosh \left(h \ln \left(|\gamma| + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) \right) \right)} \geq 0, \quad \varkappa = \frac{\tau}{h^2}. \quad (4)$$

Обратно, если выполнено (4), то схема (1) с $\alpha = 0$ и $\gamma_* \leq \gamma < -1$ устойчива в H_D , где $D = (hMM^*)^{-1}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00728).

Групповые свойства конечно-разностных уравнений

Lie group symmetries of finite-difference equations

Дородницын В. А.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия;
dorod2007@gmail.com

В докладе дается обзор цикла работ, посвященных применению групп преобразований к конечно-разностным уравнениям, разностным сеткам и сеточным функционалам.

Инвариантность дифференциальных уравнений относительно непрерывной группы преобразований является, безусловно, фундаментальным свойством этих моделей и отражает однородность и изотропность пространства-времени, справедливость принципа Галилея и других свойств симметрии физических моделей. Поэтому отражение свойства симметрии в конечно-разностной модели представляется важной задачей теории разностных схем. Кроме того, симметрия является важной характеристикой изначально дискретных уравнений.

Привлекательность теоретико-группового подхода к созданию и исследованию различных дискретных математических моделей (в том

числе и разностных схем) заключается в том, что групповой анализ обладает мощными инфинитезимальными критериями инвариантности исследуемых объектов. Это проявляется в том, что задача нахождения непрерывной группы преобразований сводится к решению *линейной* системы уравнений, вне зависимости от линейности или нелинейности исходной модели.

В цитируемых работах построены критерии инвариантности разностных моделей и разработаны эффективные алгоритмы построения инвариантных разностных уравнений и сеток. Рассмотрены многочисленные примеры построения конечно-разностных моделей (т.е. разностных уравнений и сеток), полностью сохраняющих симметрию исходных дифференциальных уравнений. Для обыкновенных разностных уравнений второго порядка проведена полная групповая классификация [1]. Заметим, что большинство построенных инвариантных разностных схем является весьма необычными схемами, далекими от традиционных (см., например, [2]). В частности, симметрия большинства эволюционных уравнений требует рассмотрения на подвижных сетках [3]. Для обыкновенных разностных уравнений второго порядка строятся примеры *точных* схем, имеющих “бесконечный порядок аппроксимации”. Множество решений точной схемы совпадает в узлах сетки с соответствующими решениями дифференциального уравнения. Такие схемы можно рассматривать как дискретное представление множества решений соответствующего ОДУ. Таким образом, возникает своеобразный *математический дуализм*: один и тот же процесс можно описывать либо непрерывным ОДУ, либо точной дискретной моделью.

Известно, что в большинстве случаев законы сохранения являются основой для построения математических моделей. Связь законов сохранения с симметрией соответствующей вариационной задачи получила известное конструктивное оформление в виде теоремы Нетер. В цитируемых работах рассмотрены инвариантные вариационные задачи для разностных функционалов и строится разностный аналог конструкции Э. Нетер [4–6].

В последние годы были получены результаты для разностных гамильтоновых уравнений. Получены операторные тождества, дающие прямую связь между инвариантностью гамильтонианов и первыми интегралами как для канонических гамильтоновых уравнений, так и для их разностных моделей [7]. С помощью новых операторных тож-

деств строится разностный аналог теоремы Нетер в рамках гамильтонова формализма, устанавливающий необходимые и достаточные условия консервативности канонических разностных уравнений [7–9].

В докладе цитируются работы, выполненные при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09–01–00610).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P.*, Lie group classification of second-order ordinary difference equations, J. Math. Phys., v.41, No 1, 480-504, 2000.
2. *Budd C., Dorodnitsyn V.*, Symmetry-adapted moving mesh schemes for the nonlinear Schrodinger equation, J. Phys. A: Math.Gen., v.34, N48, 10387-10400, 2001.
3. *Dorodnitsyn V., Kozlov R.*, A heat transfer with a source: the complete set of invariant difference schemes, J. of Nonlinear Math. Physics, v. 10, N 1, 16-50, 2003.
4. *Dorodnitsyn V.*, Noether-type theorems for difference equations, Applied Numerical Mathematics, 39, 307-321, 2001;
5. *Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P.* Symmetries, Lagrangian formalism and integration of second order ODEs, J. Nonlinear Math. Phys, v.10, N2, 41-56, 2003.
6. *Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P.*, Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations, J. Math. Phys., 45, (2004), No. 1, 336-359.
7. *Dorodnitsyn V., Kozlov R.*, Invariance and first integrals of continuous and discrete Hamiltonian equations, Journal of Engineering Mathematics, 2009, ISSN 002-0833.
8. *Dorodnitsyn V., Kozlov R.*, Lagrangian and Hamiltonian formalism for discrete equations: symmetries and first integrals, SMS Lecture Notes, Cambridge University Press, 2010, in press.
9. *Dorodnitsyn V.*, Applications of Lie Groups to Difference Equations, Chapman and Hall/CRC, 2010, in press.

Краевые задачи для систем уравнений главного типа с постоянными коэффициентами на плоскости

Boundary value problems for systems of equations of principal type with constant coefficients on the plane

Жура Н. А.

Физический ин-т им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия;
nzhura@sci.lebedev.ru

Систему уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными и только старшими членами относим к главному (составному) типу [1], если ее характеристический полином имеет как вещественные, так и комплексные корни с отличной от нуля мнимой частью.

В докладе рассмотрены краевые задачи для систем уравнений первого порядка в конечных областях специального вида.

Описан этот класс специальных областей, называемых допустимыми и даны постановки краевых задач в таких областях. Дано представление регулярных решений рассматриваемых систем уравнений в терминах решений канонических систем уравнений первого порядка эллиптического и гиперболического типов. Это представление используется затем для приведения изучаемых краевых задач к системам одномерных сингулярных интегро-функциональных уравнений. Найдены условия фредгольмовой разрешимости этой последней системы уравнений в весовых гильбертовских классах функций [2], и получена формула индекса исходной краевой задачи для решений из соответствующих классов функций.

Ранее некоторые краевые задачи для одного уравнения высокого порядка изучались в [3]. Рассматриваемый в докладе подход частично излагался в [4, 5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00837).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hormander L.*, Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin (1963).
2. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы. М.: Высшая школа, 1991.
3. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для уравнений с постоянными коэффициентами на плоскости // Мат. сборник. 1962. Т. 59(101).
4. *Zhura N. A.*, “Boundary value problems for a systems of first order equations of a principal type in the plane,” in: Partial Differential and Integral Equations, Kluwer Academic Publishers, 1999.
5. *Zhura N. A.*, “To the theory of boundary value problems for the system of equations of principal type on the plane,” in: Differential Equations and Related Topics. Int. Conference Dedicated to the Centenary Anniversary of I. G. Petrovskii, Moscow, 2001.

Об упругих волнах в клине On elastic waves in a wedge

Заворохин Г. Л., Назаров А. И.

Санкт-Петербургский Государственный Университет, Россия;
germanzavorokhin@rambler.ru, al.il.nazarov@gmail.com

Существование волн, распространяющихся вдоль ребра изотропного упругого клина, было установлено многими авторами на “физическом” уровне строгости с помощью компьютерных вычислений. Строгое доказательство существования таких волн для клина с апертурой менее $\pi/2$ было получено И. Камоцким [1].

Развивая метод, использованный в [1], мы доказываем существование антисимметричных волн в некотором интервале апертур, больших $\pi/2$. Для некоторых значений коэффициента Пуассона доказано существование симметричных волн.

Работа второго автора частично поддержана грантом НШ-4210.2010.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камочный И. В.* О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина // Алгебра и Анализ. 2008. Т. 20. № 1. С. 86–92.

О граничном управлении колебательными процессами

Boundary control of oscillatory processes

Ильин В. А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; om@cs.msu.su

В терминах обобщенного решения волнового уравнения, допускающего существование конечной энергии, изучаются задачи об отыскании явного аналитического вида граничных управлений, производимых на двух концах стержня или на одном конце (при условии, что второй конец закреплен или свободен) смещением или упругой граничной силой и переводящих процесс колебаний этого стержня из произвольно заданного начального состояния в произвольно заданное финальное состояние.

В случае, когда стержень является однородным, указанные задачи были ранее решены в цикле работ автора настоящего доклада и Е.И. Моисеева (см. [1], работы этого цикла были удостоены в 2009-м году главной премии МАИК-Наука, а результаты этих работ были включены в число важнейших достижений РАН за 2008 год).

Настоящий доклад посвящен проблеме решения указанных задач граничного управления в следующих трех случаях:

- 1) в случае, когда граничное управление ведется на одном конце стержня, а на втором конце задано модельное нелокальное граничное условие;
- 2) в случае, когда колеблющийся стержень состоит из двух разнородных участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы;
- 3) В случае, когда колеблющийся стержень состоит из двух участ-

ков, имеющих разные плотности и упругости, но их величины обеспечивают равенство времен прохождения волны по каждому из этих участков.

Для всех изучаемых задач отыскивается явный аналитический вид искоемых граничных управлений (см. [2–5]), а для случаев 1 и 2, кроме того, проведена оптимизация множества граничных управлений для процесса, протекающего в течение произвольно достаточно большого промежутка времени T , основанная на минимизации соответствующего интеграла граничной энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А. Избранные труды. М.: МаксПресс, 2008. Том 2. С. 430–661.
2. Ильин В. А., Луфференко П. В. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы // Доклады РАН. 2009. Т. 429, № 4. С. 455–458.
3. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления смещением или упругой силой на одном конце струны при наличии модельного нелокального граничного условия // Труды математического института имени В.А. Стеклова. 2010. Том 268. С. 124–136.
4. Ильин В. А. Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Труды математического института имени В.А. Стеклова. 2010. Том 269. С. 133–142.
5. Ильин В. А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Доклады РАН. 2010. Т. 435. № 6 (в печати).

**Об эффективной реализации предобусловленных
итерационных методов решения систем
линейных алгебраических уравнений
на высокопроизводительных
вычислительных системах**

**On efficient implementation of preconditioned
iterative linear solvers on high-performance
computer systems**

Капорин И. Е.

ВЦ РАН, Москва, Россия; igorkaporin@mail.ru

Для задачи численного решения больших симметричных положительно определенных систем линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$Ax = b, \quad A = A^T > 0 \quad (1)$$

рассматривается предобусловленный метод сопряженных градиентов. Задачи подобного типа возникают, например, при численном расчете конечноэлементных моделей в теории упругости, при реализации современных итерационных методов линейного программирования, а также во многих других важных случаях.

Построение предобуславливающей матрицы $H \approx A^{-1}$ может осуществляться на основе результатов работы [1], где предлагаются структуры приближенных обратных матриц, оптимизация которых может выполняться за счет минимизации К-числа обусловленности

$$\mathbf{K}(HA) = (n^{-1}\text{trace}(HA))^n / \det(HA).$$

В частности, представлены результаты, получаемые для таких предобуславливаний, как (блочный) метод Якоби, метод неполного обратного треугольного разложения, полиномиального метода, метода приближенного треугольного разложения 2-го порядка [2] а также их комбинаций, допускающих эффективную реализацию на параллельных компьютерах с большим числом процессоров.

Обсуждается также проблема ускорения вычислений на скалярных процессорах с иерархической памятью, где оказывается жела-

тельным использовать специальные (блочные) версии стандартных вычислительных процедур линейной алгебры.

Приводятся результаты расчетов некоторых тестовых задач из коллекции разреженных матриц университета Флориды [3].

Работа выполнена при поддержке Целевой программы Р-14 Президиума РАН и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ-4096.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaporin I.* “New convergence results and preconditioning strategies for the conjugate gradient method,” Numer. Linear Algebra Appls. **1** No. 2: 179–210 (1994).
2. *Kaporin I.* “High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ -decomposition,” J. Numer. Lin. Alg. Appl., **5**, No. 5, 483–509 (1998).
3. *Davis T. A.* “University of Florida sparse matrix collection, 2008”
<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices>.

Специальные функции в научном исследовании академика А. А. Дородницына

Special functions in the studies of academician A. A. Dorodnicyn

Керимов М. К.

ВЦ РАН, Москва, Россия; compmath@mail.ru

Специальные функции играли большую роль в творчестве А.А. Дородницына. Он широко использовал известные специальные функции (например, функции Бесселя, функции Эйри, их нули и др.). Особую роль эти функции играют в его математических работах, посвященных решению асимптотическими методами особых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В этих фундаментальных работах А.А. Дородницын ввел новые специальные функции, которые теперь называются функциями Дородницына, Эйри–Дородницына.

В докладе анализируются некоторые научные работы А.А. Дородницына, исследованы встречающиеся в них специальные функции, включая функции Дородницына, указаны связи этих функций с известными функциями, приведены применения.

О схемах расщепления для уравнений Навье–Стокса

Splitting schemes for Navier–Stokes equations

Кобельков Г. М.

МГУ, ИВМ, Москва, Россия; kobelkov@dodo.inm.ras.ru

При численном решении уравнений Навье–Стокса методом расщепления по физическим процессам на первом этапе необходимо решить на временном шаге систему нелинейных параболических уравнений, которая получается из уравнений Навье–Стокса удалением уравнения неразрывности и членов, содержащих функцию давления. После этого получившееся решение проектируется на подпространство соленоидальных вектор-функций. Для этой системы параболических уравнений изучается вопрос о разрешимости задачи и свойствах ее решения. А именно, для задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + u_k \mathbf{u}_{x_k} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

доказана теорема существования “в целом” при любом коэффициенте вязкости $\nu > 0$ и рассмотрены вопросы численного решения этой системы.

Построение перекрытий блоков для параллельного решения симметричных линейных систем

Overlap construction for symmetric linear systems parallel solution

Коньшин И. Н.

ВЦ РАН, Москва, Россия; konshin@ccas.ru

Решение эллиптических уравнений является важным этапом в решении многих задач математической физики, например, решения уравнения для давления в методе расщепления по физическим факторам для несжимаемой жидкости. В работе рассматривается решение больших симметричных положительно определенных систем линейных уравнений с использованием аддитивных предобусловливающих [1] и разложения второго порядка [2] для перекрывающихся блоков. Такие предобусловливания основаны на разбиении заданной матрицы коэффициентов на перекрывающиеся блоки, которые распределяются по процессорам.

Балансировка вычислительной нагрузки может контролироваться как постфильтрацией уже построенного предобусловливателя [3], так и за счет предварительного выбора разбиения и перекрытия блоков. Выбор перекрытия блоков оказывается достаточно важен. Использование слишком малого перекрытия между блоками может значительно ухудшить качество предобусловливания и привести к росту числа итераций метода сопряженных градиентов. И наоборот, когда размер перекрытия слишком велик, время одной итерации может существенно возрасти.

Структура перекрытия блоков может оказать значительное влияние на сходимость параллельного метода, а также на балансировку загрузки процессоров. Это становится особенно заметным при использовании большого числа процессоров. Для обеспечения разумной параллельной эффективности можно использовать различные стратегии построения перекрытия. Они могут быть основаны как на структурных свойствах матрицы коэффициентов (принимая во внимание количество слоев перекрытия, общее количество узлов перекрытия и др.), так и на значениях соответствующих коэффициентов матрицы.

Приводятся результаты численных экспериментов для дву- и трехмерных модельных задач с анизотропными коэффициентами, а также для некоторых задач из коллекции разреженных матриц университета Флориды.

Работа выполнена при поддержке Целевой программы Р-14 Президиума РАН и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант НШ-4096.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaporin I.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ -decomposition // J. Numer. Lin. Alg. Appl., 1998, V. 5, No. 5, 483–509.
2. *Kaporin I. E., Konshin I. N.* A parallel block overlap preconditioning with inexact matrix inversion for linear elasticity problems // J. Numer. Lin. Alg. Appl., 2002, V. 9, No. 2, 141–162.
3. *Капорин И. Е., Коньшин И. Н.* Постфильтрация множителей IC2-разложения для балансировки параллельного предобуславливания // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 2009. Т. 49. № 6. С. 940–957.

О нелинейной краевой задаче Гинзбурга–Ландау для сверхпроводящей пластины в магнитном поле

On nonlinear Ginzburg–Landau boundary value problem for a superconducting plate in a magnetic field

Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; nadja@ccas.ru, kuroch@ccas.ru

Дается краткое представление о результатах [1,2] по исследованию и решению нелинейной краевой задачи (КрЗ) Гинзбурга–Ландау [3,4]. Задача описывает стационарные состояния сверхпроводящей пластины в магнитном поле и в безразмерных переменных имеет вид

$$a'' - \psi^2 a = 0, \quad \psi'' + \kappa^2(\psi - \psi^3) - a^2 \psi = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (1)$$

$$a(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad a'(D) = h, \quad \psi'(D) = 0. \quad (2)$$

Здесь все величины вещественны, a — потенциал магнитного поля, ψ — так называемый параметр порядка, h , $\varkappa$ и D — положительные параметры: $2D$ — ширина пластины, h — напряженность магнитного поля, величина $\varkappa$ характеризует материал сверхпроводника. Величина ψ^2 определяет концентрацию “сверхпроводящих электронов” в металле: $0 \leq \psi^2 \leq 1$ ($\psi \equiv 0$ отвечает нормальной фазе (n), а $\psi \neq 0$ — сверхпроводящей фазе (s) состояния пластины).

Следующие утверждения достаточно очевидны:

1) для любого решения $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ КрЗ (1), (2) выполняется ограничение $0 \leq \psi^2(x, h) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D]$;

2) нелинейная КрЗ (1), (2) разрешима — $\forall h$ она имеет одно (и только одно) n -решение $a(x, h) = hx$, $\psi(x, h) \equiv 0$; при $h = 0$ она, кроме того, имеет два s -решения $a(x, h) \equiv 0$, $\psi(x, h) \equiv \pm 1$.

Ищутся основные решения КрЗ (1), (2), т.е. удовлетворяющие требованию $0 \leq \psi(x, h) \leq 1 \quad \forall x \in [0, D]$. При $h > 0$, как показано численно, КрЗ (1), (2) имеет от одного до трех основных s -решений.

Состояния пластины в магнитном поле и ее переходы $s \rightarrow n$ ($n \rightarrow s$) при усилении (ослаблении) поля описываются с помощью диаграмм $\psi_0(h) = \psi(0, h)$, $\psi_D(h) = \psi(D, h)$ и $4\pi M(h) = a(D, h)/D - h$, где $\psi_0(h)$ и $\psi_D(h)$ — значения параметра порядка в центре пластины и на ее краю соответственно, величина $M(h)$ характеризует намагниченность пластины.

Следующие результаты [1, 2] для этой известной нелинейной КрЗ являются новыми:

1) исходя из предварительного теоретического анализа КрЗ (1), (2), предложен простой численный метод ее решения, позволяющий находить все основные решения в широком диапазоне изменения параметров задачи, в том числе динамически неустойчивые и неизолированные решения (такие типы решений не были найдены ранее с помощью альтернативных методов [4]); в результате получены более полные и точные непрерывные бифуркационные диаграммы состояний пластины, описывающие ее переходы $s \rightarrow n$ ($n \rightarrow s$) при усилении (ослаблении) магнитного поля, что, в частности, позволило более детально изучить явление магнитного гистерезиса и эволюцию диаграмм с изменением параметров $\varkappa$ и/или D ;

2) впервые поставлены и изучены спектральные задачи для исследования динамической неустойчивости решений в рамках линейной теории возмущений и для априорного нахождения порогового зна-

чения магнитного поля; в частности, указаны причины, по которым итерационные методы [4] (типа релаксации) не позволяют находить решения, отвечающие начальным данным, лежащим внутри гистерезисных петель, такие решения являются динамически неустойчивыми.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00139).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дышко А. Л., Жарков Г. Ф., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В. Аналитико-численные исследования нелинейной краевой задачи для сверхпроводящей пластины в магнитном поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 9. С. 1651–1676.
2. Konjukhova N. B., Kurochkin, S. V., “On nonlinear Ginzburg–Landau boundary value problem for a superconducting plate in a magnetic field,” Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems, **17**, 125–136 (2007).
3. Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д. К теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. № 12. С. 1064–1082.
4. Zharkov G. F., “First and second order phase transitions and magnetic hysteresis in a superconducting plate,” J. Low Temp. Phys., **130**, No. 1/2, 45–67 (2003).

К проблеме малых движений гидросистемы “жидкость–газ”

To the problem of small motions of “fluid–gas” hydrosystem

Копачевский Н. Д.

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь, Украина; kopachevsky@list.ru*

1. В докладе рассматривается задача о малых движениях и нормальных колебаниях частично диссипативной гидросистемы, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости и идеального баротропно-

го газа, заполняющих в обычных земных условиях некоторый сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Жидкость занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную твердой стенкой сосуда $S_1 \subset \partial\Omega_1$ и горизонтальной границей $\Gamma \subset \partial\Omega_1$ раздела системы “жидкость–газ”. Соответственно газ занимает область $\Omega_2 \subset \Omega$ и ограничен твердой стенкой $S_2 \subset \partial\Omega_2$ и границей Γ . Газ считается баротропным, причем скорость звука в газе постоянна.

В постановке начально-краевой задачи о малых движениях изучаемой гидросистемы фигурируют: линеаризованные уравнения Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, граничное условие прилипания на S_1 , кинематическое и динамические условия на Γ ; линеаризованные уравнения Эйлера для баротропного газа, уравнение неразрывности для газа с учетом свойства баротропности, условие непротекания на S_2 ; кроме того, использованы также начальные условия для поля скоростей в жидкости, поля скоростей и поля давлений в газе, а также для отклонения подвижной границы раздела между жидкостью и газом.

2. Изучение этой задачи проводится методами функционального анализа, в частности, используется теория линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, теория линейных абстрактных дифференциальных уравнений, теория полугрупп операторов и другие.

После выбора подходящих гильбертовых пространств, связанных с кинетической и потенциальной энергиями системы и квадратичной формой диссипации энергии в вязкой жидкости, а также с использованием операторов некоторых вспомогательных краевых задач в областях Ω_1 и Ω_2 , проблема сводится к задаче Коши вида

$$\mathcal{A} \frac{du}{dt} + \mathcal{B}u = 0, \quad u(0) = u^0, \quad (1)$$

где $u = u(t)$ — искомая функция переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящем из набора (вектор-столбца) поля скорости в вязкой жидкости, отклонения границы раздела, составляющей потенциального поля скорости в газе и поля давлений в газе. Далее, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ представляют собой операторные матрицы, обладающие следующими свойствами: оператор $\mathcal{A}$ (полной энергии системы) ограничен и положительно определен, а оператор $\mathcal{B}$ неограничен и допускает замыкание до максимального аккретивного оператора, действующего в $\mathcal{H}$.

Эти свойства позволяют доказать теорему о сильной разрешимости задачи Коши (1) на произвольном промежутке времени $[0, T]$, а на этой основе — и теорему о корректной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

3. Далее в докладе изучаются так называемые нормальные колебания гидросистемы, т.е. решения уравнения (1), зависящие от t по закону

$$u(t) = \exp(-\lambda t)v, \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

При этом используются методы спектральной теории оператор-функций, восходящие к работам М.В. Келдыша и последующим исследованиям многих отечественных и зарубежных математиков (М.Г. Крейн, Г. Лангер, С.Г. Крейн, В.И. Мацаев, А.С. Маркус, Г.В. Радзиевский и др.)

Установлено, что спектральная задача (1)–(2) имеет точку $\lambda = 0$ в качестве бесконечнократного собственного значения (стационарные движения в газе). Остальной спектр задачи дискретен с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Предельной точке $\lambda = 0$ отвечают поверхностные апериодически затухающие волны на границе раздела “жидкость–газ”. Предельной точке $\lambda = \infty$ отвечают три ветви собственных значений, локализованных на положительной полуоси (диссипативные быстро затухающие волны в вязкой жидкости), а также в окрестности двух мнимых полуосей (акустические волны в газе). Получены асимптотики всех ветвей собственных значений. Доказаны теоремы о полноте и базисности системы корневых (собственных и присоединенных) элементов задачи.

Данное исследование проведено совместно с Б.М. Вронским.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.

Математическое моделирование процесса асимптотической стабилизации в системе четырех вихрей

Mathematical modelling the asymptotic stabilization process in the four vortex system

Корнев А. А.

МГУ им М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
kornev@dodo.inm.ras.ru

Рассмотрена задача асимптотической стабилизации неустойчивого течения электропроводящей жидкости в прямоугольной кювете малой глубины. Согласно экспериментальным данным исследуемый процесс с допустимой степенью точности описывается системой двумерных уравнений Навье–Стокса с дополнительным линейным слагаемым, моделирующим придонное трение, и постоянной правой частью. Для рассмотренных параметров система имеет неустойчивое стационарное решение четырехвихревой структуры, в окрестности которого наблюдается квазипериодический режим. В работе формулируются и обосновываются численные алгоритмы решения задачи нелокальной асимптотической стабилизации по начальным данным и правой части. Исходная задача сводится к аппроксимации глобального устойчивого многообразия для исследуемой траектории и некоторому проектированию на него заданных начальных условий. Соответствующие алгоритмы формулируются в терминах полудинамических систем, что позволяет их применять для различного рода уравнений.

Приводятся результаты расчетов стабилизации с локальной областью управления для начальных данных из окрестности квазипериодической траектории.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00625-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобельков Г. М., Корнев А. А., Ольшанский М. А., Чижонков Е. В. Некоторые актуальные проблемы математического моделирования // Современные проблемы математики и механики Т. III. М.: Изд.-во Моск. Университета, 2009. С. 135–170.

О релаксации за конечное время одного нелокального уравнения

On relaxation at finite time for some nonlocal equation

Корпусов М. О., Свешников А. Г.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
korpusev@gmail.com, sveshnikov@phys.msu.ru

Рассматривается первая начально-краевая задача с однородным условием Дирихле для нелинейного нелокального уравнения псевдопараболического типа с нелокальным слагаемым типа Кирхгоффа. При этом, если следовать терминологии, наследуемой из исследований по классическому волновому уравнению типа Кирхгоффа, мы рассматриваем вырожденный случай. И, кроме того, мы рассматриваем сингулярный случай. Для рассматриваемой задачи нами доказана однозначная разрешимость в сильном и в слабом обобщенном смысле. Причем в случае $q \in (-1/2, 0)$ доказан эффект релаксации за конечное время и получены оптимальные оценки снизу и сверху на скорость и некоторые оценки сверху и снизу на время релаксации. В случае $q > 0$ нами изучено асимптотическое поведение решения задачи при больших временах.

Сформулируем теперь задачу, которую будем в дальнейшем исследовать [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta u - u) + \left[\int_{\Omega} dx |\nabla u|^2 \right]^q \Delta u = 0, \quad q > -1/2,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, Ω — поверхностно односвязная ограниченная область, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^\infty$. Данная задача является математической моделью, описывающей квазистационарные процессы в полупроводниках в случае нелокальной связи проводимости σ среды и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 08-01-00376-а, а также президентской программы поддержки молодых докторов наук МД-99.2009.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Устойчивость и монотонность разностных схем для уравнений газовой динамики в инвариантах Римана

Stability and monotonicity of difference schemes for equations of gas dynamics in Riemann invariants

Матус П. П.^{1,2}, Поляков Д. Б.³

¹*Институт математики, НАН Беларуси, Минск,
Республика Беларусь;*

²*The John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland;
matus@im.bas-net.by*

³*Белорусский государственный университет, Минск,
Республика Беларусь; mitia87@gmail.com*

Уравнения газовой динамики и гидродинамики являются основой для математического описания физических процессов механики жидкости и газа. В силу нелинейности этих уравнений вне зависимости от гладкости входных данных в течение конечного времени могут возникать такие физические эффекты, как ударные волны, контактные разрывы, пограничные слои, и др. В работах [1–2] исследована устойчивость разностных схем, аппроксимирующих начально-краевые задачи для изэнтропического газа в инвариантах Римана в переменных Эйлера.

В настоящем докладе приводятся результаты исследования разностных схем, аппроксимирующих смешанную задачу для уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа. Для построения схем используются модифицированные инварианты Римана, предложенные в [3]. Доказательство устойчивости и монотонности проведено в пред-

положениях только на входные данные, при которых в [4] доказана непрерывная разрешимость дифференциальной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marcinkiewicz G., Matus P., Chuiko M.* Stability of difference schemes in terms of Riemann invariants for a polytropic gas // *Comput. Math. Math. Phys.*, **50** (2010), No. 6, pp. 1024–1037.
2. *Matus P., Kolodynska A.* Nonlinear stability of the difference schemes for equations of isentropic gas dynamics // *Comput. Meth. Appl. Math.*, **8** (2008), No. 2, pp. 155–170.
3. *Nishida T., Smoller J.* Mixed problems for nonlinear conservation laws. // *Journal of Differential Equations*, **23** (1977), No. 2, pp. 244–269.
4. *Myshkis A. D., Filimonov A. M.* On the Global Continuous Solvability of the Mixed Problem for One-Dimensional Hyperbolic Systems of Quasilinear Equations // *Differ. Equ.*, **44** (2008), No. 3, pp. 413–427.

Оптимальное граничное управление колебаниями струны с нелокальным граничным условием четности первого рода

Optimal boundary control of string oscillations with even nonlocal condition of the first kind

Моисеев Е. И.¹, Холомеева А. А.²

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, ВЦ РАН, Москва, Россия;
eimoiseev@ccas.ru

²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
kholomeyeva@gmail.com

В данной работе мы продолжаем изучение различных задач оптимального граничного управления колебаниями упругой струны, которые описываются одномерным волновым уравнением

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ в } Q_T = [0 < x < l] \times [0 < t < T] \quad (1)$$

в случае нелокальных граничных условий. В настоящей работе ис-

следует поведение струны при наличии нелокального граничного условия, которое, следуя введенной в одной из наших статей терминологии, мы будем называть нелокальным условием четности первого рода:

$$u(l, t) = u(\overset{\circ}{x}, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

На левом конце струны осуществляется управление смещением

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

посредством которого струна переводится из произвольно заданного начального состояния

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

в произвольно заданное финальное состояние

$$u(x, T) = \widehat{\varphi}(x), \quad u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (5)$$

В работе задача исследуется как в смысле классического регулярного решения соответствующей смешанной начально-краевой задачи, так и в смысле ее обобщенного решения. Одним из основных результатов являются необходимые и достаточные условия управляемости струны, которым должны удовлетворять начальные и финальные функции. При выполнении этих условий была проведена оптимизация, то есть среди всех допустимых управлений было выбрано то, которое минимизирует интеграл граничной энергии. Также отдельный интерес представляет возникшая попутно задача управления смещением на одном конце струны при наличии заданного режима на другом конце.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи Математических Наук. 2005. Т. 60. № 6. С. 89–114.
2. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$ // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1558–1570.

3. Ильин В. А. Граничное управление смещением на одном конце струны при наличии нелокального граничного условия одного из четырех типов и его оптимизация // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1487–1498.
4. Ильин В. А. Теоремы о единственности обобщенных решений четырех смешанных задач для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // ДАН. 2008. Т. 420. № 2. С. 309–313.
5. Моисеев Е. И., Холмеева А. А. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11 (в печати).

Анализ устойчивости нестационарных систем Stability analysis of non-stationary systems

Нечепуренко Ю. М.

ИБМ РАН, Москва, Россия; yumnech@yandex.ru

Первая часть доклада посвящена малоизученному сценарию потери устойчивости существенно докритическими ламинарными течениями вязкой несжимаемой жидкости, по которому в потоке возникает малое возмущение определенного типа, обладающее способностью значительно расти за счет взаимодействия с исходным течением, и переводить исходное течение в квазистационарное состояние, неустойчивое к малым возмущениям другого типа, которые и разрушают исходное течение, вызывая ламинарно-турбулентный переход. Кратко обсуждается современное состояние этого направления от физического эксперимента и прямого численного моделирования до разработки и численного анализа сравнительно простых объяснительных моделей.

Во второй части доклада анонсируется технология SADAS (stability analysis of differential-algebraic systems), разработанная автором доклада совместно с А.В. Бойко (ИТПМ СО РАН, г. Новосибирск) для численного анализа потери гидродинамической устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода. Полное описание этой технологии в настоящее время отсутствует, но некоторые ее составляющие описа-

ны в работах [1–2]. На примере течений Пуазейля в плоском и оребренных каналах демонстрируется, как с помощью технологии SADAS можно исследовать возможность описанного выше сценария потери устойчивости для конкретных течений.

Особый интерес к описанному выше сценарию привлекает возможность катастрофических последствий от сравнительно малых воздействий на исходную, достаточно устойчивую на первый взгляд систему. Он возможен не только в гидродинамических, но и в других физических, биологических и технических системах. Для его изучения недостаточно классической ляпуновской теории устойчивости, ориентированной на анализ устойчивости к одному возмущению и не позволяющей анализировать опасность двух разнесенных во времени возмущений. Спектральный анализ простейших нестационарных моделей ядерного реактора, выполненный автором доклада несколько лет назад совместно с В.И. Лебедевым (РНЦ КИ ИЯР), показал, что механизм для развития такого сценария имеется и в уравнениях переноса нейтронов, учитывающих запаздывающие нейтроны. Заключение часть доклада посвящена краткому описанию результатов этого анализа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00513 и № 08-01-00393) и программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” (проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М.* Технология численного анализа влияния оребрения на временную устойчивость плоских течений // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 6. С. 1109–1125.
2. *Boiko A. B., Nечepurenko Yu. M., Sadkan M.* Fast computation of optimal disturbances with a given accuracy for duct flows // ЖВМ и МФ. 2010. Т. 50. № 11. С. 2017–2027.

Решение уравнений Навье–Стокса в переменных скорость–вихрь–спиральная плотность

Solving the Navier–Stokes equations in velocity–vorticity–helical density variables

Ольшанский М. А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
Maxim.Olshanskii@mtu-net.ru

Предлагается формулировка трехмерных уравнений Навье–Стокса несжимаемой вязкой жидкости в независимых переменных: скорость, вихрь и спиральная плотность. Мы показываем, что спиральной плотности может быть придан математический смысл множителя Лагранжа, соответствующего ограничению $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$, где $\mathbf{w}$ — вектор-функция вихря. Одним из практических приложений данной формулировки является простой алгоритм расщепления для численного интегрирования системы, который разбивает шаг по времени на вспомогательные задачи в переменных вихрь–спиральная плотность, скорость–давление Бернулли. Мы обсуждаем связь между данной формулировкой и некоторыми хорошо известными моделями турбулентности, а также баланс спиральности метода Галеркина для уравнений Навье–Стокса. Доклад частично следует результатам, опубликованным в [1–3].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00115) и программой ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”, проект “Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Olshanskii M. A., Rebholz L. G.*, “Velocity–Vorticity–Helicity formulation and a solver for the Navier–Stokes equations,” *Journal of Computational Physics*, **229**, 4291–4303 (2010).
2. *Olshanskii M. A., Rebholz L. G.*, “A note on helicity balance of the Galerkin method for the 3D Navier–Stokes equations,” *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **199**, 1032–1035 (2010).

3. Lee H. K., Olshanskii M. A., Rebholz L. G., “On error analysis for the 3D Navier–Stokes equations in Velocity–Vorticity–Helicity form,” preprint available on www.mathcs.emory.edu/~molshan, (2010).

**Об итерационном методе с расщеплением
граничных условий и условиях согласования
для нестационарной задачи Стокса**

**On an iterative method with boundary condition
splitting and compatibility conditions
for the nonstationary Stokes problem**

Пальцев Б. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; paltsev@ccas.ru

Доклад посвящен изложению результатов, полученных по разработке и обоснованию нового итерационного метода решения первой начально-краевой задачи для нестационарной системы Стокса

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta_x \mathbf{u} + \nabla_x p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u} = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad \int_\Gamma (\mathbf{g}, \mathbf{n}) ds_x = 0, \quad \int_\Omega p dx = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}, \quad x \in \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}|_\Gamma = \mathbf{g}|_{t=0} \quad (3)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, где Γ — граница Ω , $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали на Γ . Они представляют существенный вклад в дальнейшее развитие направления, начатого А.А. Дородницыным еще с середины 1960-х гг. и оказавшегося весьма плодотворным в деле создания принципиально новых эффективных численных методов решения задач гидродинамики.

Этот итерационный процесс приводит на каждой итерации к последовательным, существенно более простым (чем исходная) задачам — задаче Неймана с параметром t для приближения к давлению

и векторной параболической начально-краевой задаче, решения которой автоматически соленоидальны, для приближения к скорости:

$$\Delta_x p_N = \operatorname{div}_x \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad \partial p_N / \partial \mathbf{n}|_\Gamma = \varphi_N - (\mathbf{f}, \mathbf{n})|_\Gamma, \quad (4)$$

$$\int_\Omega p_N dx = 0, \quad t > 0,$$

$$\partial_t \mathbf{u}_N - \nu \Delta_x \mathbf{u}_N = \mathbf{f} - \nabla_x p_N, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^1 \times \Gamma, \quad (5)$$

$$(\mathbf{u}_N)_\tau|_\Gamma = \mathbf{g}_\tau|_\Gamma, \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u}|_\Gamma = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{u}_N|_{t=0} = \mathbf{a}, \quad x \in \Omega,$$

$$\varphi_{N+1} = \varphi_N + \varkappa (\partial_t - 2\nu \Delta'_x)(\mathbf{u}_N - \mathbf{g}, \mathbf{n})|_\Gamma, \quad t > 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{g}_\tau = \mathbf{g} - (\mathbf{g}, \mathbf{n})|_\Gamma$, φ_N , $\int_\Gamma \varphi_N ds_x = 0$ при $t > 0$, — полученное на N -й итерации приближение к неизвестной на $\mathbb{R}_+^1 \times \Gamma$ функции (обобщенной функции в случае минимальной гладкости решения задачи (1)–(3)) $\varphi = \partial p / \partial \mathbf{n}|_\Gamma - (\mathbf{f}, \mathbf{n})|_\Gamma$, Δ'_x — оператор Лапласа-Бельтрами на Γ , $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, $\varkappa$ — релаксационный параметр.

Полное обоснование метода получено в случае, когда область — слой в $\mathbb{R}^n$, а задача (1)–(3) периодическая в ортогональных направлениях вдоль слоя (при этом Ω — ячейка периодичности, Γ — ее существенная граница), см. [1, 2]. Установлено, что в анизотропных пространствах Соболева типа $W_{t,x}^{(s+1), 2(s+1)}$ (для $\mathbf{u}_N$ и $\mathbf{u}$), $W_{t,x}^{s, 2s}$ (для p_N и p), адаптированных к такому случаю периодичности и с весовым множителем $e^{-\gamma t}$, где $\gamma > 0$ — достаточно большое, при оптимальном значении $\varkappa \cong 1.14285$ метод уменьшает ошибку за 1 итерацию, грубо говоря, в 7 раз. При этом должны выполняться условия гладкости на данные задачи (1)–(3), условия согласования этих данных при $t = 0$, а также условия на начальное приближение φ_0 , необходимые и достаточные для существования решения задачи (1)–(3) и сходимости к нему приближений $\mathbf{u}_N, p_N$ при $N \rightarrow \infty$ в указанных анизотропных соболевских пространствах. Получено конструктивное описание таких условий согласования при $t = 0$. При $s \geq 1$ наряду с простейшим локальным условием согласования (последним условием в (3), отвечающим $s = 0$) остальные s условий являются нелокальными. А именно: данные задачи (1)–(3) позволяют элементарными операциями определить следы $\partial(\partial_t^{m-1} p) / \partial \mathbf{n}|_{t=0, \Gamma}$, $m = 1, \dots, s$. Решая соответствующие задачи Неймана с такими данными, можно найти

следы $\partial_t^{m-1}p|_{t=0}$, $m = 1, \dots, s$. И после того как последние функции найдены, со следами этих функций на Γ остальные s условий согласования имеют уже локальный характер.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00661).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пальцев Б.В.* Об одном итерационном методе с расщеплением граничных условий решения первой начально-краевой задачи для системы Стокса // Докл. РАН. 2010. Т. 432. № 5. С. 597–603.
2. *Пальцев Б.В.* Об условиях сходимости метода с расщеплением граничных условий в пространствах Соболева высокой гладкости и условиях согласования для нестационарной задачи Стокса // Докл. РАН. 2010. Т. 435. № 4 (в печати).

Локальная гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением

Local smoothness of generalized solutions for elliptic differential-difference equations with degeneration

Попов В. А., Скубачевский А. Л.

РУДН, Москва, Россия; volodimir.a@gmail.com, skub@lector.ru

Рассматривается эллиптическое дифференциально-разностное уравнение с вырождением

$$A_R u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij} u = f(x) \quad (x \in Q) \quad (1)$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q), \quad (2)$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q ,

R_{ij} — разностные операторы,

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}u(x+h), \quad (3)$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{Z}$ — конечное множество векторов, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$.

Предполагается, что эрмитовы части матричных символов оператора A_R имеют только неотрицательные собственные значения и хотя бы одно из них равно нулю. Пусть, кроме того, $\text{Ker } R_{ii} = \text{Ker } R_{11} \subset \text{Ker } R_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$). В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений с вырождением, вырождение в задаче (1), (2) носит нелокальный характер. В [2, 3] показано, что некоторые классы нелокальных эллиптических задач, возникающих в теории плазмы [1], сводятся к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением.

Введем оператор A_R по формуле (1) с областью определения $\mathcal{D}(A_R) = C_0^\infty(Q)$. Для оператора A_R получены априорные оценки, показывающие, что A_R является секториальным оператором в $L_2(Q)$, см. [2–4]. Это позволяет построить фридрихсово расширение $\mathcal{A}_R$ оператора A_R .

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1), (2) с $f \in L_2(Q)$ называется функция $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ такая, что $\mathcal{A}_R u = f$.

Оказывается, что существуют правые части уравнения (1) $f \in C^\infty(\overline{Q})$ такие, что обобщенное решение $u(x)$ не принадлежит даже пространству Соболева $W_{2,loc}^1(Q)$, [2, 3]. Однако в определенном смысле можно говорить о сохранении гладкости обобщенных решений. А именно: доказано, что для любой функции $f \in L_2(Q)$ обобщенное решение $u \in \mathcal{D}(A_R)$ обладает следующим свойством: $P_{11}u \in W_{2,loc}^2(Q_r)$ ($r = 1, 2, \dots$). Здесь Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup_{h \in \mathcal{M}} (\partial Q + h)$, $\mathcal{M}$ — аддитивная группа, порожденная множеством $\mathcal{M}$, P_{11} — оператор ортогонального проектирования в $L_2(Q)$ на образ оператора R_{11} . Точную формулировку условий, налагаемых на операторы R_{ij} можно найти в [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-01-00395 и № 09-01-00586), аналитической ведомственной программы „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект № 2.1.1/5328) и в рамках федеральной целевой программы „Научные и педагогические кадры инновационной России 2009-2013 гг.“

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
2. Skubachevskii A. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin, Birkhäuser, 1997.
3. Скубачевский А. Л. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением // Труды ММО. 1997. Т. 59. С. 240–285.
4. Попов В. А., Скубачевский А. Л. Секториальные дифференциально-разностные операторы с вырождением // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 4. С. 450–453.

Метод адаптивной искусственной вязкости A method of adaptive artificial viscosity

Попов И. В., Фрязинов И. В.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; popov@imamod.ru

Доклад посвящен разработанному нами новому методу решения задач газовой динамики с адаптивным к решению введением искусственной вязкости в разностную схему. Этот метод может быть кратко описан следующим образом.

Метод АИВ состоит из трех этапов.

На первом этапе по явной разностной схеме без искусственной вязкости, но с поправками Лакса–Вендроффа (которые обеспечивают второй порядок по времени и пространству на равномерных ортогональных сетках) находится “предикторное” решение.

На втором этапе оно анализируется с помощью проверки соответствующих неравенств и определяются области, занятые контактным разрывом (КР), волной разряжения (ВР), ударной волной (УВ) и осцилляциями (Осц.) сеточной природы.

На третьем этапе к “предикторному” решению добавляются диссипативные слагаемые с искусственной вязкостью, равной нулю на КР и ВР, малой на УВ и большой в области Осц. Такое введение вязко-

сти не приводит к дополнительному размыванию КР, искажению ВР, малому размыванию УВ и сглаживанию осцилляций.

Вязкости находятся из условия принципа максимума для схем с “замороженными” коэффициентами и обеспечивают монотонность (квазимоноотонность) решения.

Метод весьма прост, как при выводе уравнений, так и при реализации.

В докладе будут приведены примеры расчета задач газовой динамики как в случае одного измерения, так и в многомерных случаях. Также будет проведено сравнение с расчетами других авторов, выполненных с помощью других современных методов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00448-а и № 09-01-12022-офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Сеточный метод решения уравнений газовой динамики с введением искусственной вязкости // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Седьмого Всероссийского семинара (Казань, 21–24 сентября 2007 г.). Казань: Казанский государственный университет, 2007. С. 223–230.
2. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 8. С. 48–60.
3. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Метод адаптивной искусственной вязкости решения многомерных уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных в декартовых координатах // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 1. С. 32–45.
4. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Расчеты двумерных тестовых задач методом адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 5. С. 57–66.

Вычисление вариационных сплайнов в негильбертовых пространствах

Calculation of variational splines in non-Hilbert spaces

Рамазанов М. Д.

ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия; RamazanovMD@yandex.ru

По тройке объектов (B, f, ω) , где B — банахово пространство функций $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, f — конкретная функция из B , $f \in B$, ω — некоторое множество в $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R}^n$, определяется вариационный сплайн

$$f^{min} \equiv \arg \min_{g|_{\omega}=f|_{\omega}} \|g\|_B.$$

В случае гильбертовых пространств $B = H$ задача построения вариационных сплайнов является линейной и имеются многочисленные различные определения таких вариационных сплайнов, учитывающие разные условия их применений (см. [1, 2] и указанную там библиографию).

Негильбертова теория вариационных сплайнов наталкивается на существенную трудность нелинейности задачи.

Рассматриваются рефлексивные банаховы пространства со строго выпуклым единичным шаром с гладкой сферой, обладающей касательной гиперплоскостью в каждой своей точке.

Установлено, что возможен переход к двойственной задаче в сопряженных пространствах. Этот переход осуществляется соответствующими преобразованиями Лежандра. Возникающие двойственные задачи *всегда линейные*, поэтому могут быть исследованы в рамках линейных теорий.

Пусть $B(\omega)$ — фактор-пространство, состоящее из классов эквивалентностей $f_{\omega} = \{g \mid g \in B, g|_{\omega} = f|_{\omega}\}$, снабженных нормами $\|f_{\omega}\| = \inf \|g\|$ ($g|_{\omega} = f|_{\omega}$). Оператор, отображающий $f \in B$ на его класс эквивалентности, — элемент пространства $B(\omega)$, обозначим Π_{ω} . Это линейный ограниченный оператор и $\|\Pi_{\omega}\| = 1$. Сопряженный оператор $\Pi_{\omega}^* : (B(\omega))^* \rightarrow B^*$ также является линейным, ограниченным и $\|\Pi_{\omega}^*\| = 1$.

При наложенных ограничениях для любого элемента $f \in B$ в классе эквивалентности $\Pi_\omega f \in B(\omega)$ существует элемент с минимальной нормой. Этот элемент задается оператором $S : f^{min} = S(f)$, где

$$S(f) = \|\Pi_\omega f\|_{B(\omega)} \cdot D\|\Pi_\omega^* D\|\Pi_\omega f\|_{B(\omega)}\|_{B^*}$$

(см. [3]). Здесь $D\|\cdot\|$ обозначает производную Гато отображения $g \rightarrow \|g\|$.

Следствие. Нелинейная проблема построения вариационных сплайнов в довольно общих банаховых пространствах всегда сводится к линейной проблеме действия оператора Π_ω^* , сопряженного к оператору ограничения Π_ω . Нелинейность создают крайние отображения в цепочке

$$B(\omega) \rightarrow [B(\omega)]^* \rightarrow B^* \rightarrow B,$$

являющиеся, по существу, ограничениями на единичные сферы нелинейных замен переменных в функциональных пространствах — преобразований Лежандра.

Таким образом, вычисление конкретных вариационных сплайнов упирается в выработку алгоритмов, достаточно точно аппроксимирующих преобразование Лежандра $(f, \varphi(f)) \rightarrow (f^*, \varphi^*(f^*))$ с $\varphi(f) = \|f\|^2/2$ на единичных сферах $\|f\| = 1$ банаховых пространств $B(\omega)$ и B^* .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00349-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Роженко А.И.* Вариационные сплайны. Ч. 1: Основы теории. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.
2. *Роженко А.И.* Вариационные сплайны. Ч. 2: Алгоритмы построения. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.
3. *Рамазанов М.Д.* Теоремы вложения и многомерные сплайны. // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 413. № 2. С. 174—177.

Приближенное интегрирование кубатурными формулами

Approximate integration by cubature formulas

Рахматуллин Д. Я.

ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия; rahmdy@gmail.com

Теория кубатурных формул и их одномерных аналогов — квадратурных формул — является хорошо развитой областью математического анализа и вычислительной математики. Данным научным направлением занималось множество математиков — известны работы И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Гаусса, Ш. Эрмита, русских и советских математиков П. Л. Чебышева, С. Н. Бернштейна, С. Л. Соболева, С. М. Никольского и других [1, 2]. Теория квадратурных и кубатурных формул продолжает интенсивно развиваться и на сегодняшний день — по данной тематике публикуется множество работ и регулярно проводятся научные конференции.

Несмотря на множество работ по данной теме, на сегодняшний день существуют актуальные задачи, связанные как непосредственно с теорией формул С. Л. Соболева, так и с ее приложениями в компьютерных вычислениях.

В частности, актуальной является проблема приближенного вычисления интегралов большой кратности, для решения которой в данный момент используются, в основном, методы интегрирования типа Монте-Карло, имеющие, однако, слабые стороны, а именно невысокую скорость сходимости и негарантированные, вероятностные оценки погрешности результата.

Мы решаем проблему вычисления интегралов путем приближения интеграла решетчатыми асимптотически оптимальными кубатурными формулами с ограниченным пограничным слоем. Придуманы алгоритмы [3, 4] и разработаны программы для многопроцессорных вычислительных систем [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00349-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л., Васкевич В.Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН. 1996.
2. *Рамазанов М.Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Изд. ДизайнПолиграфСервис. Уфа. ИМВЦ УНЦ РАН. 2009. 178 с.
3. *Рамазанов М.Д., Рахматуллин Д.Я., Валеева Л.С., Банникова Е.Л.* Решение интегральных уравнений на многопроцессорных вычислительных системах // Журнал Сибирского федерального университета. Сер. матем. Красноярск. СФУ. Т. 2. № 1. 2009. С. 69–87.
4. *Рахматуллин Д.Я.* Вычисление интегралов по многомерным областям на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № 3. С. 118–125.
5. *Ramazanov M.D., Rakhmatullin D.Y., Bannikova E.L.* The cubature formulas of S.L. Sobolev: evolution of the theory and applications // Eurasian Mathematical Journal. 2010. Vol. 1. № 1. P. 123–136.

О распространении возмущений, возбуждаемых в жидкостях движущимися источниками

On propagation of perturbations excited in fluid by moving sources

Свешников А. Г., Перова Л. В.

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
sveshnikov@phys.msu.ru, lada_perova@mail.ru

Большой цикл работ Анатолия Алексеевича Дородницына посвящен строгой математической постановке и развитию эффективных методов исследования математических моделей для различных задач динамики неоднородных жидкостей. К рассмотренным им в этих направлениях многочисленным задачам тесно примыкают и задачи динамики стратифицированных и вращающихся жидкостей, изучению которых посвящен круг работ, регулярно публиковавшихся нами с соавторами в ЖВМ и МФ. Приведем результаты цикла работ, в которых рассматривается распространение малых возмущений в нескольких

моделях несжимаемой идеальной жидкости, экспоненциально стратифицированной по плотности и/или равномерно вращающейся с постоянной угловой скоростью $\alpha/2$ вокруг некоторой оси. Модели жидкостей, заполняющих полупространства, объединяет наличие или свободной поверхности, или поверхности раздела между слоями жидкости. Направление стратификации и ось вращения ортогональны этой поверхности Γ . Источником возмущений является плоская периодическая волна, бегущая по границе жидкости. Таким образом, изучаются модели распространения внутренних и поверхностных волн в Мировом океане.

Введем жестко связанную с жидкостью систему декартовых координат (x_1, x_2, x_3) так, что поверхность Γ в стационарном состоянии располагается в плоскости x_3 , волна движется по границе жидкости в положительном направлении оси Ox_1 . Будем изучать малые двумерные движения жидкости, которые описываются системой уравнений гидродинамики в линейном приближении.

Сопоставим векторной системе уравнений начально-краевую задачу относительно функции тока для двумерного уравнения гравитационно-гироскопических волн в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi_{x_1 x_1} + \psi_{x_3 x_3}) + w_0^2 \psi_{x_1 x_1} + \alpha^2 \psi_{x_3 x_3} = 0,$$

где w_0^2 — квадрат частоты Вейселя–Брента. Необходимо найти классическое решение задачи в соответствующей области, 2π -периодическое по переменной x_1 , регулярное на бесконечности, удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $t = 0$ и граничным условиям, которые, например, для стратифицированной вращающейся жидкости со свободной поверхностью имеют вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi_{x_3} + \alpha^2 \psi_{x_3} - g\psi_{x_1 x_1})|_{\Gamma} = f(x_1 - ct)\eta(t) + C(t),$$

где $\eta(t) \in C_0^{(2)}[0, +\infty)$, $\eta(0) = \eta'(0) = 0$, $\exists T : \eta(t) \equiv 1, t > T$; $f(z) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_1)$, имеет период 2π ; $C(t)$ — функция, подлежащая определению. Для всех моделей жидкости методом Фурье построены решения в явном виде и доказаны теоремы существования и единственности. Для анализа волновой картины, складывающейся в жидкости при больших временах, получена асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$.

Характерным для всех жидкостей оказалось наличие двух видов волн — поверхностных и внутренних. В серии поверхностных волн, локализованных вблизи границы жидкости, обнаружен возникающий при определенном сочетании параметров жидкости и источника возмущений важный резонансный эффект. Особенностью строения гармоник внутренних волн явилось их разделение на два типа: бесконечное число колебаний, затухающих по мере удаления от поверхности жидкости, по которой движется источник, и конечное число волн, распространяющихся вглубь жидкости без затухания. Спектр частот вторых гармоник определяется угловой скоростью вращения жидкости и/или параметром стратификации среды. Характерным свойством внутренних волн оказалась ортогональность вектора групповой скорости волны ее волновому вектору. При исследовании двухслойной стратифицированной жидкости выявлены интересные спектральные отличия волновой картины, складывающейся при $t \rightarrow \infty$ в ее верхней и нижней компонентах. Установлены качественные отличия волновых процессов в моделях полубесконечных жидкостей с источником, движущимся по свободной поверхности или границе раздела слоев жидкости, от их аналогов в моделях с плоской волной, бегущей по твердому дну.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перова Л. В. О колебаниях стратифицированной вращающейся жидкости при возбуждении ее свободной поверхности движущимися источниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 5. С. 903–922.
2. Перова Л. В. О распространении возмущений в двухслойной вращающейся жидкости при возбуждении границы между слоями движущимися источниками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1232–1254.

**Исследование устойчивости и динамики в системах
с последствием, описываемых интегро-
дифференциальными уравнениями
типа Вольтерра**

**The investigation of stability and dynamics in
systems with aftereffect described by
integrodifferential equations
of the Volterra type**

Сергеев В. С.

ВЦ РАН, Москва, Россия; vsergeev@ccas.ru

Интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра в настоящее время находят важные применения в задачах о движении тела в воздушном потоке при нестационарном обтекании [1]; их использование позволяет достаточно хорошо учесть влияние на движущееся тело возникающего за ним вихревого следа. Этими уравнениями описываются также, в частности, реологические процессы, протекающие при деформации тел, и вязко-упругие свойства материалов.

Рассматриваются интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^t K(t-s)x(s)ds + F(x, y, t), \quad x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad (1)$$

где $(n \times n)$ -матрица $A(t) \in C$ и имеет ограниченные элементы при $t \in R^+$, $(n \times n)$ -матрица $K(t) \in C$, нелинейные члены заданы функцией $F(x, y, t)$ класса C^1 по x, y , непрерывной ограниченной по t . В (1) y — функционал в интегральной форме, представленный в общем случае рядом Фреше. Устойчивость исследуется по отношению к возмущению начальных данных при $t = 0$.

Анализируется устойчивость по первому приближению первым методом Ляпунова, устойчивость при постоянно действующих возмущениях в смысле Малкина для уравнения (1) с добавленным возмущением $\mu\Phi(x, y, t)$ ($\mu \ll 1$), допускающим мажоранту Ляпунова. Исследуется вопрос о существовании для уравнения (1) предельно пе-

риодических решений, если матрица A постоянна и зависимость от t в функции $F(x, y, t)$ является периодической (предельно периодической).

Рассмотрена устойчивость по Ляпунову в критических случаях одного нулевого и пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, когда в (1) коэффициенты степенного ряда аналитической по x, y функции F постоянны или экспоненциально стремятся к постоянным. Показывается, что заключение об устойчивости зависит от знака величины g_k , названной постоянной Ляпунова и определяемой по членам до k -го порядка правой части включительно. В обзорах [2, 3] отражены соответствующие утверждения об устойчивости.

Ряд полученных результатов распространен на некоторые системы с распределенными параметрами. Исследована устойчивость положения равновесия вязко-упругой пластины, подверженной деформации кручения и влиянию набегающего воздушного потока. Нестационарность обтекания учитывается согласно теории, развитой в [1], введением в моменты аэродинамических сил, действующих на пластину, интегральных членов. В окрестности положения равновесия строится общее решение интегродифференциального уравнения типа Вольтерра в частных производных в форме ряда Фурье, связанного с продольной координатой пластины, и степенного ряда по введенным малым параметрам. В случае, когда скорость потока испытывает малые возмущения (возможно, разрывные) анализируется устойчивость равновесия пластины в недеформированном состоянии. Исследована также устойчивость при постоянно действующих возмущениях равновесия деформированной пластины по отношению к нелинейным возмущающим силам и возмущениям ее формы в моменты времени, предшествующие заданному начальному моменту [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971.
2. Сергеев В.С. Об устойчивости в критических случаях для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра. // Математический журнал. Алматы. 2003. Т.3. № 3(9). С. 91–105.
3. Sergeev V.S. Stability of solutions of Volterra integrodifferential equations. Mathematical and Computer Modelling. Special Issue "Lyapunov's Methods in Stability and Control, II", **45**, No. 11-12, 1376–1394 (2007).

4. *Сергеев В.С.* О кручении вязкоупругой пластины в нестационарном потоке // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 3. С. 483–495.

**О численных реализациях нового итерационного
метода с расщеплением граничных условий
решения нестационарной задачи Стокса**

**Numerical implementations of a new iterative method
with boundary condition splitting
for the nonstationary Stokes problem**

Соловьев М. Б.

ВЦ РАН, Москва, Россия; solmb@mail.ru

В [1] предложен и обоснован на дифференциальном уровне в случае задачи в слое в $\mathbb{R}^n$ при условии периодичности задачи по направлениям вдоль слоя новый быстроходящийся итерационный метод с расщеплением граничных условий решения нестационарной задачи Стокса

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta_x \mathbf{u} + \nabla_x p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u} = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}|_{(0,T) \times \Gamma} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (3)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, Γ — граница Ω , $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ . Этот метод приводит на каждой итерации к последовательному решению двух существенно более простых (по сравнению с исходной) отщепленных задач — зависящей от времени t как от параметра задачи Неймана для уравнения Пуассона для приближений к давлению и затем специальной векторной параболической начально-краевой задачи для приближений к скорости, решения которой автоматически удовлетворяют условию несжимаемости. Завершается итерация простой формулой пересчета, в которую входит параболический оператор на пространственно-временной части границы.

В докладе излагаются результаты, полученные по разработке и исследованию численных реализаций этого итерационного метода для случаев: а) задачи в полосе в $\mathbb{R}^2$ при условии периодичности задачи вдоль полосы; б) осесимметричной задачи в зазоре между коаксиальными цилиндрами при условии периодичности задачи вдоль цилиндров [2, 3]. В основе построенных численных реализаций лежат конечно-разностные дискретизации по времени и билинейные конечно-элементные (КЭ) аппроксимации по пространственным переменным отщепленных задач для приближений к скорости и давлению.

Проведенными численными исследованиями было установлено, что использование непосредственных численных аппроксимаций формулы пересчета на границе приводит к значительному падению (по сравнению с дифференциальным случаем) скоростей сходимости итераций на высоких гармониках. Благодаря специальному модифицированию аппроксимаций формулы пересчета, основанному на результатах из [4], это весьма нежелательное явление удалось полностью устранить, что позволило достичь скоростей сходимости, отвечающих исходному итерационному методу на дифференциальном уровне, а именно уменьшения ошибки приблизительно в 7 раз за одну итерацию.

Построенные численные методы обеспечивают второй порядок точности численных решений в норме максимума модуля по шагам пространственно-временной сетки, причем как для скорости, так и для давления. При этом и компоненты скорости и давление аппроксимируются билинейными КЭ одинакового типа, и не требуется удовлетворять каким-либо специальным условиям согласованности таких КЭ-аппроксимаций (типа известного трудно проверяемого условия Ладыженской-Бреucci-Бабушки).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00661).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пальцев Б.В.* Об одном итерационном методе с расщеплением граничных условий решения 1-й начально-краевой задачи для системы Стокса // Докл. РАН. 2010. Т. 432. № 5. С. 597–603.

2. *Соловьев М.Б.* О численных реализациях нового итерационного метода с расщеплением граничных условий решения нестационарной задачи Стокса в полосе при условии периодичности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 10. С. 1771–1792.
3. *Соловьев М.Б.* Численные реализации итерационного метода с расщеплением граничных условий решения нестационарной задачи Стокса в зазоре между коаксиальными цилиндрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 11. С. 1998–2016.
4. *Лозинский А.С.* Об ускорении конечно-элементных реализаций итерационных процессов с расщеплением граничных условий для системы типа Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 9. С. 1339–1363.

О стационарных движениях простейшей сервосистемы в условиях невесомости

On stationary motions of the simplest servosystem in the conditions of weightlessness

Сумбатов А. С.

ВЦ РАН, Москва, Россия; sumbatow@ccas.ru

Рассматривается задача о плоском движении в условиях невесомости трех тел: два тела массы m_1 и m_3 (точки A и B) связаны нерастяжимым невесомым тросом длины G , по которому может перемещаться без трения масса m_2 (точка C). Такую конфигурацию может представлять, например, связка двух космических аппаратов при дальних космических перелетах, когда по связующему тросу перемещается третье тело (shuttle). Размерами тел по сравнению с расстояниями между ними пренебрегаем, поэтому тела рассматриваются как материальные точки (частицы).

Натяжение нити могут обеспечить, например, слаботочные реактивные двигатели, установленные на телах системы: в точках A и B реактивные тяги постоянно сонаправлены векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, а в точке C – биссектрисе тупого угла ACB . Предполагается (это принципиальное требование), что силы тяги в точках A и B по модулю

равны, а в точке C сила тяги такова, что все три силы образуют нулевую систему векторов. В системе, таким образом, реализуется геометрическая связь $l_1 + l_2 = G$ ($l_1 = AC$, $l_2 = CB$), которая является сервосвязью [1].

Число степеней свободы равно пяти. Можно указать столько же линейно независимых возможных перемещений системы, на которых указанные реактивные силы тяги не производят виртуальной работы, поэтому согласно общей теории систем с сервосвязями движение механической системы определяется без дополнительной информации о реакциях сервосвязей, то есть в данном случае без знания величины модуля реактивной тяги, развиваемой двигателями.

Для применения теоремы Рауса–Ляпунова понижаем порядок системы при помощи линейных по скоростям ее трех первых интегралов. Сделать это можно при помощи цепочки канонических преобразований [2], посредством которых понижается порядок системы дифференциальных уравнений в плоской задаче трех тел. Затем исключаем лишнюю координату с помощью уравнения связи $l_1 + l_2 = G$.

В результате весьма громоздких преобразований находим функцию Лагранжа $L = L_2 + L_1 + L_0$ редуцированной системы с двумя степенями свободы. Ее интеграл Якоби $L_2 - L_0 = \text{const}$ имеет вид

$$\frac{1}{2MW} (A\dot{u}^2 + 2C\dot{u}\dot{v} + B\dot{v}^2) + \frac{k^2 M}{2W} = \text{const},$$

где $W = m_2 m_3 R^2 + m_1 \{m_2 (G - R)^2 + m_3 [(G - R - u)^2 + v^2]\}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$, $R = (u^2 + v^2)^{1/2}$, функции A, B и C зависят от координат (u, v) , k — постоянная интеграла площадей.

Функция W имеет две критические точки, которым соответствуют стационарные движения системы. В обоих движениях массы располагаются на одной прямой.

В одном движении центральный момент инерции системы трех точек имеет минимум. Степень неустойчивости этого движения равна двум, и вследствие наличия гироскопических сил возможна гироскопическая стабилизация движения.

Во втором движении масса m_2 расположена в общем центре масс системы. На указанном движении

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = -4m_2 m_3^2 (m_1 + m_3).$$

Следовательно, оно неустойчиво.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beghin H.* “Étude théorique des compass gyrostatiques Anschütz et Sperry.” Thèse. Faculté des Sciences de Paris. Paris, 1922. 132 p. = Берен А. “Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями.” М.: Наука. 1967.
2. *Whittaker E.T.* “Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.” Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 430 p. = Уиттекер Е.Т. “Аналитическая динамика.” М. - Л.: ОНТИ. 1937. 500 с.

Переходные процессы от равновесия к предельному циклу в системах 2-го и 3-го порядков

Transitional process from unstable equilibrium to stable cycle in systems of two and three orders

Тер-Крикоров А. М.

МФТИ, Долгопрудный, Россия; ter-krikorov@mail.ru

Рассматриваются системы второго и третьего порядков в окрестности нулевого положения равновесия. Предполагается, что матрица линеаризованной системы имеет комплексное собственное значение $\lambda = \varepsilon + i\beta$, причем $0 < \varepsilon \ll |\beta|$. Для системы третьего порядка дополнительно предполагается, что вещественное собственное значение $\delta < 0$, $|\delta| \gg \varepsilon$. Как показывает классическая теория бифуркаций Андронова–Хопфа, существование периодических решений зависит от значений некоторых ляпуновских коэффициентов. Переходной процесс от равновесия к предельному циклу можно исследовать, приводя систему к нормальной форме в окрестности положения равновесия:

$$\frac{dx}{dt} = N_n(x, \varepsilon) + \phi_n(x, \varepsilon), \quad \phi_n(x) = O(x^{n+1}). \quad (1)$$

Если положить $\phi_n(x, \varepsilon) = 0$, то приближенное описание переходного процесса от равновесия к предельному циклу дает приближенное решение $X_n(t, \varepsilon)$ редуцированного уравнения, которое с точностью до членов порядка ε^{n+1} может быть получено в виде многочлена степени n по степеням параметра ε . Дается описание классов функций, к которым принадлежат коэффициенты многочлена. Для системы второго порядка ограниченное решение существует на интервале $(-\infty, +\infty)$. Для системы третьего порядка ограниченное решение существует на промежутке $[T_0(\varepsilon), +\infty)$. Для системы второго порядка доказывается, что для любого начального значения x_0 можно так подобрать функцию $t_0(\varepsilon)$, что функция $X_n(t - t_0(\varepsilon), \varepsilon)$ будет (с точностью до членов порядка ε^{n+1} в смысле определенной нормы) описывать решение задачи Коши для уравнения (1), стремящееся к предельному циклу при $t \rightarrow +\infty$. Для системы третьего порядка подобное утверждение справедливо для начальных значений $|x_0| \geq a_0(\varepsilon) > 0$.

Мультиоператорная методика построения аппроксимаций и схем высокого порядка

Multioperators technique for constructing high-order approximations and schemes

Толстых А. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; tol@ccas.ru

Приводятся основные результаты, связанные с принципиально новым методом построения некоторых формул численного анализа произвольно высоких порядков и его применением в схемах для механики жидкости и газа. Идея этого метода, предложенная в [1], явилась результатом последовательных связанных друг с другом исследований, отправной точкой которых был метод интегральных соотношений А.А. Дородницына. Попытка предложить новые варианты этого метода привела к простейшим так называемым компактным аппроксимациям третьего порядка конвективных членов в конвективно-диффузионных задачах [2]. Дальнейшее развитие этого направления

привело к однопараметрическим семействам операторов третьего и пятого порядков, аппроксимирующих первые производные на сетке $\omega_h = \{x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Схематично их можно представить как семейства сеточных операторов $L_h(s)$, имеющих вид

$$L_h(s) = A_h(s)^{-1} B_h(s), \quad (1)$$

где шаблоны операторов содержат не более трех узлов сетки, а оператор $B_h(s)$ сам может содержать структуру типа (1), см. [3, 4]. Например, простейшая суперпозиция такого типа в случае аппроксимации 3-го порядка первых производных имеет вид $B_h(s) = (\Delta_0 - s\Delta_2)/2h$, $A_h(s) = I + \Delta_2/6 - s\Delta_0/4$, где Δ_0, Δ_2 — трехточечные центральные первые и вторые разности на сетке ω_h . Анализ этих семейств позволил сформулировать общую идею мультиоператорного метода. Она состоит в следующем. Зафиксируем M значений $s_1, s_2, \dots, s_M$ и образуем линейные комбинации $L_M(s_1, s_2, \dots, s_M) = \sum_{i=1}^M \gamma_i L_h(s_i)$, где $\sum_{i=1}^M \gamma_i = 1$. Условие обращения в ноль $M - 1$ членов разложения в ряд Тейлора для действия такой линейной комбинации на достаточно гладкую функцию приводит к системе линейных уравнений относительно γ_i . В случае разрешимости этой системы при любых M оператор $L_M(s_1, s_2, \dots, s_M)$, названный мультиоператором [4], имеет порядок аппроксимации $m + M - 1$, где m — порядок аппроксимации оператора (1). В этом случае операторы $L_h(s_i)$ можно рассматривать как базисные. Оказывается, что за небольшим исключением системы для γ_i имеют матрицу типа Вандермонда, что обеспечивает их разрешимость. Более того, различные суперпозиции типа [1] потенциально могут генерировать базисные операторы не только в случае первых производных, но и в случае других операторов L (например, операторов вторых производных, интерполяции, экстраполяции и т.д.). Вычисление действий мультиоператоров можно осуществить в результате параллельных вычислений действий базисных операторов, например, при использовании многоядерных процессоров.

Приводятся результаты тестирования мультиоператорных схем с аппроксимациями от 9-го до 18-го порядков пространственной производной на линейных и нелинейных одномерных уравнениях переноса, подтверждающие заявленные порядки. Представлены оценки точности мультиоператорной схемы 6-го порядка для простейших краевых задач для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения. Приводится ряд примеров применения мультиоператорных схем для урав-

нений Навье–Стокса для сжимаемого газа при решении задач прямого численного моделирования процессов неустойчивости и генерации акустических полей, требующих особо высокой точности и разрешающей способности численных методов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00354а) и проекта 3 ОМН РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстых А. И. О методе численного решения уравнений Навье–Стокса сжимаемого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 1.
2. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1991.
3. Tolstykh A. I. High accuracy compact schemes for fluid dynamics applications, World Scientific, Singapore (1994).
4. Толстых А. И.. О мультиоператорных схемах произвольного порядка, основанных на нецентрированных компактных аппроксимациях // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 3.

Эффективные вычисления в многомерных пространствах

Efficient computations in multidimensional spaces

Тытышников Е. Е.

ИБМ РАН, Москва, Россия; tee@inm.ras.ru

Решение вычислительных задач в d -мерном пространстве становится трудным или невозможным даже при не очень больших значениях d . Например, если $d = 83$, а в расчетной области берется по 10 точек на одной оси, то общее число точек 10^{83} сопоставимо с числом атомов в видимой части Вселенной. Многомерные массивы с таким объемом данных в вычислительных задачах могут существовать лишь виртуально, реализуясь физически в виде каких-то специаль-

ных представлений или аппроксимаций с приемлемо малым числом параметров. Это означает, конечно, что в многомерных задачах необходимо искать структуры или особые свойства, приводящие к мало-параметрическим представлениям. При этом можно утверждать, что наиболее общими и полезными оказываются представления на основе разделения переменных.

Хорошо известны следующие формы разделения переменных в d -мерном массиве: *каноническое тензорное разложение* и *тензорное разложение Такера*. Эти разложения интересны, когда число слагаемых в них не очень большое (см. [1]). Но даже в таких случаях для канонического разложения нет гарантированно быстрых и надежных методов вычисления, а в разложение Такера все же входит d -мерное ядро Такера. В задачах численного анализа при больших d эти разложения имеют весьма ограниченное применение. Более подходящие разложения получаются на основе *тензорных сетей*, применяемых для описания состояний квантовых систем. В работах [2–6] предложены новые алгоритмы, связанные с простейшей из тензорных сетей, которая, благодаря этим алгоритмам, теперь становится одним из главных инструментов для развития тензорных методов вычислительной математики. Соответствующее тензорное разложение — это *ТТ-разложение (тензорный поезд)* вида

$$a(i_1, \dots, i_d) = \sum_{\alpha_1=0}^{r_0} \dots \sum_{\alpha_d=1}^{r_d} g_1(\alpha_0, i_1, \alpha_1) \dots g_d(\alpha_{d-1}, i_d, \alpha_d).$$

Основные тензорные алгоритмы, полученные в ИВМ РАН, — это метод ТТ-округления и метод крестовой ТТ-аппроксимации, дающий тензорное обобщение методов скелетного разложения матриц по малой части их элементов [7–9]. Они открывают ряд новых направлений исследований в вычислительной математике, связанных с многомерной интерполяцией, вычислением интегралов, оптимизацией, обработкой сигналов. При этом новые методы появляются не только для многомерных задач: обычные (например, матричные) задачи легко превращаются в многомерные путем введения фиктивных осей (см. [1, 4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 08-01-00115, 09-01-91332, 09-01-12058) и госконтракта П940.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тыртышников Е. Е.* Тензорные аппроксимации матриц, порожденных асимптотически гладкими функциями // Матем. сборник. 2003. Т. 194. № 6. С. 147–160.
2. *Оседец И. В., Тыртышников Е. Е.* Рекурсивное разложение многомерных тензоров // ДАН. 2009. Т. 427. № 1. С. 14–16.
3. *Оседец И. В.* О новом тензорном разложении // ДАН. 2009. Т. 427. № 2. С. 168–169.
4. *Оседец И. В.* О приближении матриц логарифмическим числом параметров // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 23–24.
5. *Oseledets I., Tyrtyshnikov E.* “Breaking the curse of dimensionality, or how to use SVD in many dimensions”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **31**, No. 5, 3744–3759 (2009).
6. *Oseledets I., Tyrtyshnikov E.* “TT-cross approximation for multidimensional arrays”, *Linear Algebra Appl.*, **432**, 70–88 (2010).
7. *Goreinov S. A., Tyrtyshnikov E. E., Zamarashkin N. L.*, A theory of pseudo-skeleton approximations, *Linear Algebra Appl.*, **261**, 1–21 (1997).
8. *Goreinov S. A., Tyrtyshnikov E. E.*, The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices, *Contemporary Mathematics*, **208**, 47–51 (2001).
9. *Tyrtyshnikov E.*, Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method, *Computing*, **64**, No. 4, 367–380 (2000).

О высокоточных монотонных схемах для уравнений гиперболического типа

On high-precision monotone schemes for hyperbolic equations

Холодов А. С.^{1,2}, Холодов Я. А.²

¹ИАП РАН, Москва, Россия; xolod@cres.mipt.ru

²МФТИ, Долгопрудный, Россия;

На основе анализа разностных схем в пространствах неопределенных коэффициентов [1] и сеточных функций [2] для уравнений гиперболического типа рассматриваются разностные схемы, обладающие

свойствами монотонности по Фридрихсу [3], С.К. Годунову [4], Хартену (TVD-схемы) [5] и Ван Лиру [6].

Ранее сформулированные для явных двухслойных разностных схем и широко распространенные при численном решении уравнений гиперболического типа критерии монотонности С.К. Годунова, TVD (А. Хартена), характеристический (Ван Лира) обобщены на случай многослойных, в том числе неявных сеточных шаблонов [7].

На основе анализа разностных схем в пространстве сеточных функций и характеристического критерия монотонности предлагается универсальный алгоритм построения нелинейных, монотонных при произвольном виде искомого решения схем высокого порядка аппроксимации. Предложен ряд новых монотонных разностных схем 4-3 порядка аппроксимации на трехслойном компактном сеточном шаблоне и на нераспирающихся (трехточечных) сеточных шаблонах для продолженной системы, что позволяет обеспечить монотонность разностных схем как для искомой функции, так и для ее производных.

Приводятся результаты тестирования предложенных разностных схем и решения ряда прикладных задач, рассматриваются некоторые вопросы обобщения предлагаемых монотонных схем на случай многомерных гиперболических систем уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холодов А. С.* О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 24. № 9. С. 1346–1358.
2. *Kholodov Ya. A.*, A monotone high-order accuracy schemes for hyperbolic CFD problems. APS 53rd Meeting of the Division of Fluid Dynamics, Washington, 2000.
3. *Fridrichs K. O.* “Symmetric hyperbolic linear differential equations,” IBID, № 2, 345–392.
4. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. № 89. Вып. 3. С. 271–306.
5. *Harten A.* “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws,” J. Comput. Phys., **49**, № 3, 357–393 (1987).
6. *Van Leer B.* “Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme,” J. Comput. Physics, **14**, 361–370 (1974).

7. Холодов А. С., Холодов Я. А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.

Расщепление и сингулярные решения уравнений сверхтекучей гидродинамики для конденсата Бозе–Эйнштейна

Splitting and singular solutions of the two-fluid hydrodynamic equations for Bose–Einstein condensate

Цурков В. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; tsurkov@ccas.ru

Предметом рассмотрения является система двухкомпонентной гидродинамики (см., например [1, 2])

$$\begin{aligned}\partial\rho/\partial t + \partial(\rho_s v_s + \rho_n v_n)/\partial x &= 0, \quad \rho = \rho_s + \rho_n, \\ \partial(\rho_s v_s + \rho_n v_n)/\partial t + \partial(\rho_s v_s^2 + \rho_n v_n^2)/\partial x + \partial p/\partial x &= 0, \\ \partial v_s/\partial t + \partial(v_s^2/2 + \mu)/\partial x &= 0, \\ \partial S/\partial t + \partial(S v_n)/\partial x &= 0,\end{aligned}$$

где t — время, x — пространственная координата, ρ — плотность, S — энтропия на единицу объема, ρ_s и v_s являются сверхтекучей \normaldensity и скоростью соответственно, μ — химический потенциал, p — давление.

Уравнение состояния вырожденного идеального Бозе-газа (см., например, [3]) подставляется в выписанную систему. Легко убедиться, что ρ_n пропорционально S . Уравнение состояния имеет вид $p = BS^{5/3}$ ($B = \text{const}$). Мы получаем окончательно две распавшиеся пары уравнений относительно переменных v_n , S и v_s , $R = (\rho - AS)$, где A — постоянная

$$\partial v_n/\partial t + v_n \partial v_n/\partial x + (\partial p/\partial S)(S)^{-1} \partial S/\partial x = 0,$$

$$\partial S/\partial t + S\partial v_n/\partial x + v_n\partial S/\partial x = 0$$

и

$$\partial v_s/\partial t + v_s\partial v_s/\partial x = 0,$$

$$\partial R/\partial t + R\partial v_s/\partial x + v_x\partial R/\partial x = 0.$$

Такое же расщепление имеет место в случае трех пространственных переменных, если выполнено условие $\text{rot}(v_s) = 0$. Вторая пара уравнений имеет неограниченное (сингулярное) решение относительно R для задачи с начальными значениями, даже когда они достаточно малы. Мы изучаем также зависимость μ от $|v_s - v_n|$ согласно методу [1] и рассматриваем поведение численного решения, когда S стремится к нулю. В этом случае основная система уравнений уже не расщепляется. Сингулярное решение в виде остроконечных максимумов плотности имеет место по аналогии с [4–6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00826).

ЛИТЕРАТУРА

1. Халатников И. М. Введение в теорию сверхтекучести. М.: Наука, 1965.
2. Zaremba E., Nikuni T., Griffin A. “Hydrodynamics of Bose–Einstein condensate”, J.Low. Temp. Phys. **116**, 277 (1999).
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. Изд. 4-е. М.: Наука, 1995.
4. Tsurkov V. I. Автомодельное решение уравнений гидродинамики // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11. № 4. С. 488.
5. Tsurkov V. I. Majorant Catastrophe of Eulerian Gas Dynamics Equations for Bosons. USA: Felicity Press, 1998.
6. Tsurkov V. I. “Absolute zero as the point of instability of hydrodynamics equations for Bose–Einstein condensate”, J. Low. Temp. Phys. **138**, 717 (2005).

Метод асимптотических конструкций улучшенного порядка точности для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции–диффузии

Asymptotic constructs method of improved order accuracy for a singularly perturbed parabolic reaction–diffusion equation

Шишкин Г. И., Шишкина Л. П.

*Институт Математики и Механики УрО РАН, Екатеринбург,
Россия; shishkin@imm.uran.ru*

Краевые задачи для дифференциальных уравнений, старшие производные которых содержат малый параметр (возмущающий параметр $\varepsilon \in (0, 1]$), возникают при моделировании достаточно сложных процессов. В задаче об обтекании тел потоком вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса Re появляются *параболические пограничные слои*, описываемые уравнениями параболического типа с возмущающим параметром $\varepsilon^* = Re^{-1}$ [3]. В этих задачах важна аппроксимация как решений, так и их производных (производная первого порядка по нормали к обтекаемой поверхности определяет сопротивление обтекаемому потоку, производная второго порядка — отрыв потока от обтекаемой поверхности). Научные интересы А.А. Дородницына охватывали разработку численных методов механики сплошной среды и, в том числе, методов для задач обтекания тел потоком вязкой жидкости; см., например, [1].

При построении численных методов для сингулярно возмущенных задач с параболическими слоями необходимо учитывать их специфические особенности [4]. Некоторые из них проследим на примере начально-краевой задачи для параболического уравнения реакции–диффузии

$$\left\{ \varepsilon^2 a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c(x, t) - p(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (1)$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S,$$

для которой строится улучшенная ε -равномерно сходящаяся схема; здесь $\bar{G} = G \cup S$, $G = (0, d) \times (0, T]$, параметр ε принимает произ-

вольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности боковой границы S^L появляется параболический пограничный слой.

Использование эффективных численных методов, разработанных для регулярных задач [2], не обеспечивает ε -равномерную сходимость в равномерной норме. Существующие специальные схемы на сетках, сгущающихся в погранслое, как правило, имеют низкую скорость ε -равномерной сходимости; так, для задачи (1) порядок скорости сходимости по x не выше второго, а по t — первый. Известные методы повышения точности специальных схем малоэффективны. Например, техника Ричардсона в случае задачи (1) не позволяет строить схемы с порядком ε -равномерной скорости сходимости по x выше третьего [2].

Таким образом, разработка новых подходов на основе *равномерных сеток* — перспективное направление в построении эффективных ε -равномерно сходящихся численных методов для сингулярно возмущенных задач, в частности, для задач с параболическими слоями.

В настоящем докладе для начально-краевой задачи (1) предлагается новый подход к построению ε -равномерно сходящихся схем повышенного порядка точности. С использованием *техники асимптотических конструкций* строится *схема метода декомпозиции сеточного решения*, в которой сеточные регулярная и сингулярная компоненты решения являются решениями сеточных подзадач, рассматриваемых на *равномерных сетках*. Применение техники Ричардсона к этой схеме приводит к *схеме повышенного порядка точности*, сходящейся ε -равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}\{N^{-4} \ln^4 N + N_0^{-2}\}$, где $N + 1$ и $N_0 + 1$ — число узлов в пространственной и временной сетках соответственно. При фиксированных значениях параметра ε эта схема сходится со скоростью $\mathcal{O}\{N^{-4} + N_0^{-2}\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00726).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А., Меллер Н. А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 2. С. 393–402.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
3. Schlichting H. Boundary Layer Theory, 7th ed. New York: McGraw-Hill, 1979.

4. *Shishkin G. I. Shishkina L. P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. (Ser. Monographs & Surveys in Pure & Applied Math). Chapman and Hall/CRC, 2009.

Численное решение уравнений Навье–Стокса для задачи обтекания тел вязкой жидкостью

The numerical solution of the Navier–Stokes equations for viscous fluid flow around bodies

Шкадов В. Я.¹, Алексюк А. И.², Шкадова В. П.³

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

shkadov@mech.math.msu.su

²МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия; alexsandrey@mail.com

³НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

shkadov@mech.math.msu.su

Задачи обтекания тел вязкой жидкостью известны своими трудностями при решении, связанными с нелинейностью уравнений, наличием малого параметра при старших производных и многообразием явлений в потоке в зависимости от начальных и граничных условий [1].

Предложено много подходов к численному решению краевых задач для уравнений Навье–Стокса, которые, однако, не приводят к решению в общей постановке при произвольных числах Рейнольдса. Как правило, приходится использовать свойства конкретно рассматриваемого течения при построении алгоритма решения. В одной из первых работ по этой проблеме был применен метод, связанный с использованием малого параметра [2].

Метод численного решения уравнений Навье–Стокса, используемый в данной работе, предназначен для расчета двумерных вязких течений жидкости, возникающих при обтекании тел при произвольных числах Рейнольдса.

Метод основан на представлении искомых функций в виде суммы симметричной и несимметричной составляющих течения [3, 4]. Система уравнений Навье–Стокса, записанная для функций тока и завих-

ренности, представляется в виде двух связанных подсистем:

$$\begin{cases} \Delta\psi^h = D\omega^h, \\ D\omega_t^h = \frac{2}{\text{Re}}\Delta\omega^h + J(\psi^h, \omega^h) + J(\psi^c, \omega^c). \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta\psi^c = D\omega^c, \\ D\omega_t^c = \frac{2}{\text{Re}}\Delta\omega^c + J(\psi^h, \omega^c) + J(\psi^c, \omega^h). \end{cases} \quad (2)$$

Решение системы (1), (2) с соответствующими краевыми условиями проводится методом конечных разностей на неравномерных сетках.

Одно из важных преимуществ такого подхода заключается в возможности ставить условия на бесконечности отдельно для симметричной и несимметричной составляющих функций, имеющих различное асимптотическое поведение.

Еще одним преимуществом подхода является возможность рассматривать течение как автоколебательную систему, в которой основной поток (несимметричная составляющая функции тока) и поле возмущений (симметричная составляющая функции тока) находятся в состоянии нелинейного взаимодействия.

На основе такого представления для задачи обтекания неподвижного цилиндра показано, что существование и основные свойства автоколебательных режимов определяются развитием их гидродинамической неустойчивости. Установлено, что вихреобразование в ближнем следе связано с динамикой зоны отрыва в основном течении.

Рассмотренный метод позволил получить численные решения задач обтекания профиля крыла, цилиндра, совершающего вынужденные колебания вдоль или поперек направления набегающего потока, вращательные или вращательно-колебательные движения вокруг своей оси, цилиндра вблизи экрана.

Интервал рассматриваемых чисел Рейнольдса $0 < \text{Re} \leq 500$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00595).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

2. *Dorodnicyn A. A.* "On the method for solution of a problem of viscous flow about a body," in: 7th Symp. Advanced Problems and Methods in Fluid Dynamics. Warszawa: IPPT PAN, 1965. pp. 13–14.
3. *Шкадова В. П.* Вращающийся цилиндр в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Известия АН СССР, МЖГ. 1982. № 1. С. 16–21.
4. *Зеленов И. В., Шкадов В. Я.* Обтекание профиля крыла потоком вязкой жидкости // Известия АН СССР, МЖГ. 1986. № 4. С. 29–36.

Математическое моделирование в естественных науках

Mathematical modelling in natural sciences

Asymptotic modelling of gas flows in micro-channels

Gatignol R.

Université Pierre et Marie Curie and CNRS, Paris, France;
`renee.gatignol@upmc.fr`

The micrometric apparatus are actually rapidly expanding. They are present in various fields of technology such as the micro-particles filters developed to reduce environmental pollution or the micro-cooling systems in electronic circuits. For the description of gas flows in micro-channels in these systems, the Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) methods are very well adapted but are expensive in computation time [1,2]. Consequently, it is interesting to seek an asymptotic model for describing the basic physical phenomena and to conduct a parametric study.

Our purpose is to model the flow of gas in micro-channels at low Mach numbers (M) and with low to moderate Knudsen numbers (Kn). A two-dimensional flow is considered. Navier–Stokes equations are written with dimensionless quantities. It appears a small parameter ε constructed from the longitudinal and transversal characteristic length scales, M , Kn (where Kn is built with the transversal length scale) and the Prandtl number (supposed of order unity). In order to investigate the significative degeneracies [3], we set: $Kn = \varepsilon^\alpha$ and $M = \varepsilon^\beta$. The analysis of the magnitudes of the terms in the balance laws reveals the degeneracy: $\alpha = 0$

and $\beta = 0$. So we put: $M = \varepsilon M_0$ and $Kn = Kn_0$ where M_0 and Kn_0 are both of order unity.

We are interested in the solutions at the order unity (in ε^0). The walls are at rest with a longitudinal thermal gradient. The set jump boundary conditions of Maxwell for the velocity and the temperature are adopted. The dynamic and thermal effects are coupled. We can determine the temperature, the pressure and the gas velocity. The gas temperature is equal to the wall temperature $T_w(x)$, where x is the longitudinal variable. The pressure is given by a ordinary differential equation depending on x and $T_w(x)$: It is nonlinear in x and this, even in the absence of slip. The profile of the longitudinal velocity is parabolic and evolves along the micro-channel: Both longitudinal gradients of pressure and temperature are in competition, the first giving a flow from high pressure to low, and the second a flow from low temperature to high. In the particular case where T_w is a constant the so-obtained solution is in agreement with those of literature [4]. Several aspects of the solutions are discussed.

This theoretical first order solution is compared with the results of the DSMC simulations by using the DS2V code of Bird [5]. The gas flows from the input area to the output area through the micro-channel. In these areas, different conditions concerning the gas pressure and temperature are considered. More, different temperature gradients along the walls are also considered. The comparisons are made in the cases where the gas is Nitrogen, Kn and M . Many results are obtained: the pressure profiles along different lines parallel to the micro-channel axis, the variation of the longitudinal velocity, *etc.* The two results, DSMC simulations and theoretical solutions, are very closed. In the considered cases, the fluctuations defined as the difference between the two results do not exceed 0.5% for the pressure and 5% for the velocity. These fluctuations are in agreement with the noise level for the DSMC simulations.

In conclusion, we can say that the theoretical results are in very good agreement with the DSMC simulations when the entrance pressure and temperature are not too far from the exit pressure and temperature. It is possible to progress in the understanding of the flows in micro-channel by using other macroscopic balances equations such as Burnett equations [6], or thirty moments equations of Grad [6], and by using slip boundary conditions of order two on the walls [4].

REFERENCES

1. Aktas O., Aluru N. R., Ravaoli U., “Application of a parallel DSMC technique to predict flow characteristics in microfluidic filters,” *Journal of Microelectro-mechanical Systems*, **45**, 538–549 (2001).
2. Ivanov M. S., Gimelshein S. F., “Computational hypersonic rarefied flows,” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 469–505 (1998).
3. Van Dyke M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, New York (1964).
4. Karniadakis G., Beskok A., *Microflows — Fundamentals and Simulation*, Springer, New York (2006).
5. Bird G. A., *DSMC of Graem Bird*, version 40505, <http://gab.com.au>
6. Kogan M. N., *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum Press, New York (1969).

An approach for constructing a multibody dynamics library on Modelica language

Kosenko I. I., Aleksandrov E. B.

*Russian State University of Tourism and Service, Moscow region,
Russia; kosenko@ccas.ru*

A class library structure for multibody system (MBS) [1] dynamics simulation is described. The library is implemented on the object-oriented language Modelica. The holonomic constraints [1] and non-holonomic constraints are implemented in a unified description. Examples include the rolling disc [1] and the rolling three-axial ellipsoid [2].

Spatial dynamics of rigid body in the MBS is described by Newton–Euler ordinary differential equations (ODEs). Such analytical representation in the MBS is optimal and ensures high quality simulation. An application of the quaternions maintains high accuracy for rotational motion description.

Along with the bilateral constraints models, the unilateral constraints are implemented in the library [4], which is designed in proper architecture of hybrid automata. For rigid bodies contact the automata has three states: (1) Roll, (2) Slide, and (3) Fly. Transitions between states Roll

and Slide depend on the friction model. Transitions between the states Slide and Fly are implemented as dynamical procedures of the “landing on” and “taking off” constraints [4]. The Roll–Fly transitions, can not be practically realized for, at least, physical friction coefficient values.

For elastic contact, the bodies supposed to be rigid but able to penetrate each other. The majority of models are originated from the Hertz contact problem. In this case the base model for the mechanical contact is implemented as a class template being in turn an inheritor of the base constraint class encapsulating the equations of Newton’s third law for forces and torques. The template includes four class parameters: (1) the contact surfaces geometry analytical model; (2) the normal elastic contact force computational model; (3) the normal viscous contact force computational model; (4) the tangent forces wrench computational model. The latter wrench consists of the total friction force and the drilling friction torque.

Standard Modelica library [5] for the MBS dynamics is built mostly on the explicit definition of the (generalized) coordinates describing the MBS mechanical system configuration. Such an approach corresponds to the Lagrange viewpoint on dynamics and provides, as expected, a high speed for the models to be developed. This library is most effective for the MBS having the tree structure. Less attention has been paid to implementation of the non-holonomic constraints and especially to implementation of unilateral constraints and mechanics of elastic contact.

In addition to examples [1, 2, 4], we implemented and verified several MBS models for the elastic contact of the Hertz model and its volumetric modification [6] for the normal contact force, and the approximate Contensou model for the friction and the drilling friction torque [7]. For the verification process the Tippe-Top and ball bearing dynamical models have been implemented.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 08-01-00600, 08-01-00718, 08-08-00553).

REFERENCES

1. *Kosenko I. I.*, “Physically Oriented Approach to Construct Multibody System Dynamics Models Using Modelica Language,” in: Proc. of Multibody 2007, Multibody Dynamics 2007. An ECCOMAS Thematic Conf., Politecnico di Milano, Milano, 2007.

2. *Kosenko I. I., Stavrovskaya M. S.*, “How One Can Simulate Dynamics of Rolling Bodies Via Dymola: Approach to Model Multibody System Dynamics Using Modelica”, in: Proc. of the 3rd International Modelica Conf., Linköping University, Linköping, 2003, pp 299–309.
3. *Kosenko I. I.*, “Integration of the Equations of a Rotational Motion of a Rigid Body in Quaternion Algebra,” J. of Applied Mathematics and Mechanics, **62**, No. 2, 193–200 (1998).
4. *Kosenko I. I.*, “Implementation of Unilateral Multibody Dynamics on Modelica,” in: Proc. of the 4th International Modelica Conf., Hamburg University of Technology, Hamburg–Harburg, 2005, pp 13–23.
5. <http://www.modelica.org/libraries/Modelica>
6. *Kosenko I. I., Aleksandrov E. B.*, “Volumetric modification of the Hertz contact problem and its application to the multibody dynamics simulation,” J. of Mechanical Science and Technology, **23**, No. 4, 931–937 (2009).
7. *Kosenko I. I., Aleksandrov E. B.*, “Implementation of the Contensou–Erismann tangent forces model in the Hertz contact problem,” Multibody System Dynamics, **24**, No. 3, 281–301 (2010).

Оптимальное управление тепловыми процессами Optimal control of thermal processes

Албу А. Ф., Зубов В. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; alla.albu@mail.ru, zubov@ccas.ru

Задачи оптимального управления тепловыми процессами все больше привлекают внимание исследователей. Это объясняется как интересом и теоретической сложностью таких задач, так и их практической востребованностью. Разработано много подходов к решению задач оптимального управления тепловыми процессами. Среди них важную роль играют численные методы, в частности градиентные методы. Для применения градиентных методов необходимо уметь вычислять значение градиента целевой функции. Самым естественным способом вычисления градиента целевой функции представляется определение компонент градиента с помощью метода конечных разностей. Однако, как показали многочисленные исследования, в слож-

ных задачах оптимального управления вычисление градиента с помощью метода конечных разностей связано с огромными трудностями и затратами машинного времени. В ВЦ РАН предложен эффективный способ вычисления компонент градиента целевой функции в подобных задачах. Он основан на применении методологии быстрого автоматического дифференцирования [1] и позволяет вычислить точное значение градиента целевой функции для выбранного дискретного варианта задачи оптимального управления.

Настоящая работа демонстрирует применение предложенного подхода к решению двух интересных и практически важных задач оптимального управления сложными динамическими системами.

В первой задаче требуется расплавить заданную часть металлического образца и затем кристаллизовать его, затратив при этом минимальное количество подводимого тепла. Сформулированная задача исследуется в рамках одномерной (с радиальной симметрией) нестационарной постановки. Источник подводимого тепла располагается вдоль оси симметрии. В качестве управления выбирается распределение по времени количества выделяемого источником тепла (мощность источника). На управляющую функцию могут быть наложены ограничения типа неравенства, призванные моделировать требования, предъявляемые к процессу плавления [2].

Вторая задача посвящена процессу кристаллизации металла в литейном деле. Этот процесс описывается нестационарной трехмерной двухфазной начально-краевой задачей типа Стефана. Установка, в которой осуществляется изготовление металлического образца, состоит из плавильной печи и охладителя, внутри которых перемещается литейная форма с металлом. Охладитель представляет собой большую емкость, заполненную жидким алюминием при температуре, немного превышающей температуру плавления алюминия. В этой установке происходит процесс остывания первоначально расплавленного металла. С одной стороны, объект медленно погружается в жидкий алюминий, имеющий низкую температуру, благодаря чему происходит кристаллизация металла. С другой стороны, объект получает тепло от стенок плавильной печи, что не позволяет процессу кристаллизации протекать достаточно быстро. Задача оптимального управления состоит в выборе такого режима остывания и кристаллизации расплавленного металла в плавильной печи, при котором фронт кристаллизации имеет заданную технологами форму (или близкую к ней) и

движется достаточно медленно (со скоростью, близкой к предписанной) [3–5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00502-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Evtushenko Y. G.*, “Computation of Exact Gradients in Distributed Dynamic Systems,” *Optimizat. Methods and Software*, **3**, No. 9, 45–75 (1998).
2. *Албу А. Ф., Инякин В. А., Зубов В. И.* Оптимальное управление процессом плавления и кристаллизации вещества // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44. № 8. С. 1364–1379.
3. *Албу А. Ф., Зубов В. И.* Математическое моделирование и исследование процесса кристаллизации металла в литейном деле // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 5. С. 882–902.
4. *Албу А. Ф., Зубов В. И.* Об оптимальном управлении процессом кристаллизации металла в литейном деле // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48. № 5. С. 851–862.
5. *Албу А. Ф., Зубов В. И.* Вычисление градиента функционала в одной задаче оптимального управления, связанной с кристаллизацией металла // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49. № 1. С. 51–75.

Применение математического моделирования при проведении оценок воздействия на окружающую среду

Application of mathematical modeling at environment impact assessment

Архипов Б. В.¹, Солбаков В. В.², Шапочкин Д. А.³,
Котеров В. Н.⁴

ВЦ РАН, Москва, Россия;

¹ arhip@ccas.ru, ² solbakov@ccas.ru, ³ shap@progtech.ru,

⁴ koterov@ccas.ru

Обострение проблем охраны окружающей среды поставило мировое сообщество перед необходимостью при принятии решений о реа-

лизации различных видов деятельности учитывать негативные экологические последствия, предусматривать меры по их смягчению или предотвращению, закреплять эти требования в правовых актах, разрабатывать методологию решения данного класса задач.

Инструментом научного анализа и прогноза экологических последствий хозяйственной и иной деятельности стал набор нормативных документов, объединенных названием Оценка воздействия на окружающую среду (ОВОС). Проведение ОВОС является многоплановой задачей и выполняется с учетом законодательно-нормативной базы, знания технологических процессов и реакции природной среды на возможное воздействие. Результатами оценки воздействия на окружающую среду, в частности, являются: информация о характере и масштабах воздействия на окружающую среду намечаемой деятельности, альтернативах ее реализации, оценке экологических и связанных с ними социально-экономических и иных последствий этого воздействия и их значимости, возможности минимизации воздействий.

При решении всех перечисленных задач важную роль играет математическое моделирование, которое необходимо при оценке величины воздействия на окружающую среду для удовлетворения природоохранных нормативных требований. Математическое моделирование позволяет решать следующие задачи: определение масштабов антропогенного влияния на окружающую среду, определение фоновых характеристик окружающей среды, опасных для функционирования сооружений, определение взаимного влияния объектов на окружающую среду и обратного влияния изменившейся среды на объекты.

Для решения этих задач были разработаны модели гидрометеорологических процессов, модели распространения загрязнений. К последним относятся модели, связанные с распространением различных субстанций в водной среде. Сюда включены модели распространения сбросов с морских буровых платформ, распространение взвешенных веществ и заиления дна при дноуглубительных работах, модели распространения нефтяных пятен при аварийных разливах нефти, а также модели, описывающие распространение тепловых воздействий, относящиеся к проектированию системы охлаждения береговых АЭС. На основе созданных моделей были разработаны программные продукты «Эко-шельф», программный продукт «Эко-риск» и программный продукт «Эко-сток». Эти программные продукты были сертифицированы как по линии Госстандарта России, так и по линии МПР РФ.

Модель «Эко-шельф» предназначена для прогноза распространения сбросов отработанного бурового раствора и шлама (раздробленной породы) с морских буровых платформ. Она может быть использована для отраслевых исследований в области охраны окружающей среды. В модели сделана попытка максимальным образом учесть описанный в литературе как российский, так и мировой опыт практического моделирования гидродинамических и физико-химических процессов, влияющих на распространения загрязнения указанного типа в воде.

Проблемы, связанные с загрязнением окружающей среды в результате нефтяных разливов в море, привели к необходимости разработки математических моделей, описывающих процесс переноса и трансформации нефтяных разливов (программный продукт «Эко-риск»). Эти модели необходимы для определения прогноза перемещения нефтяного пятна, правильной реакции на аварийные разливы, оценки воздействия на окружающую среду, планирования чрезвычайных ситуаций и обучения персонала.

Трансформация и перенос нефтяного разлива в воде подчиняется набору сложных взаимосвязанных физико-химических процессов, которые зависят от свойств нефти, гидродинамических свойств и условий окружающей среды. Нефтяное пятно на водной поверхности подвержено, с одной стороны, переносу под действием течений и ветра (oil transport), а с другой стороны — множеству процессов трансформации (oil fate). Трансформация нефти выражается в растекании в результате действия гравитационных, инерционных, вязких сил и сил поверхностного натяжения. Также трансформация нефти происходит в результате совокупности процессов, обозначаемых термином выветривание (weathering) и приводящих к изменению физико-химических свойств нефти. Эти процессы включают: постепенное испарение наиболее летучих фракций, эмульсификацию — образование эмульсии воды в нефти, в результате чего она приобретает коричневый оттенок, возникает «шоколадный мусс», диспергирование (вовлечение) — проникновение капель нефти в воду в результате обрушения ветровых волн, растворение нефти в воде и т.п. Кроме того, происходит сорбирование нефти твердыми частицами и осаждение на дно, взаимодействие с береговой линией и/или со льдом, фотохимические реакции и биodeградация. Последние процессы могут изменять свойства и уменьшать количество нефти за длительный период времени.

Расчет переноса (траектории) нефтяного пятна определяет его положение в пространстве. Трансформационная часть моделей нефтяного разлива определяет переход нефти между различными отделами окружающей среды (морская поверхность, атмосфера, водная толща, береговая область, лед, дно моря, биота) и изменение ее характеристик (плотности, содержания воды, вязкости, поверхностного натяжения). Модель применялась к ряду проектов в Балтийском, Баренцевом, Охотском и Каспийском морях России.

**Численное моделирование
пространственно-нестационарных задач
аэродинамики на вычислительных комплексах
параллельной архитектуры**

**The numerical simulation of three-dimensional
unsteady aerodynamic problems on parallel
architecture computer systems**

Бабаков А. В.

ИАП РАН, Москва, Россия; babakov@icad.org.ru

Изучаются дозвуковые, трансзвуковые и сверхзвуковые пространственно-нестационарные течения около различных объектов аэрокосмической техники. Осуществляется визуализация пространственной структуры нестационарного вихревого ближнего следа и исследуется его влияние на основные аэродинамические характеристики. Математическое моделирование проводится на основе параллельных алгоритмов нестационарного варианта консервативного метода потоков [1,2], реализованных на многопроцессорных вычислительных комплексах массивно параллельной и кластерной архитектуры.

При исследовании нестационарных течений около тел сложной формы, подобных аппарату многоразового использования и самолетной конфигурации, используются вычислительные сетки многоблочной структуры [3], позволяющие адекватно отображать геометрические особенности объектов. Использование многоблочных структур-

ных сеток дает возможность более детально исследовать обтекание специфических участков поверхности объекта.

Разработанный комплекс программ используется также для моделирования до-, транс- и сверхзвуковых пространственных течений сжимаемого газа около различных форм спускаемых аэрокосмических аппаратов, предназначенных для исследования планет солнечной системы.

Для рассматриваемых задач вследствие нестационарного отрыва формируется сложная структура ближнего следа с такими характерными признаками, как крупномасштабные вихревые образования, определяющие нестационарность аэродинамических характеристик объекта.

В рамках вычислительного эксперимента осуществляется моделирование неустойчивостей пространственных струйных течений сжимаемого газа, включая и взаимодействие системы сверхзвуковых струй с дозвуковым набегающим потоком. Проводится визуализация вихревой структуры и изучаются пульсационные характеристики потока, проводится сравнение с экспериментальными данными.

Рассматриваемые результаты получены на вычислительных мощностях Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Северинов Л. И. Консервативный метод потоков и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 2. С. 385–397.
2. Бабаков А. В. О возможности численного моделирования нестационарных вихревых структур в ближнем следе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. С. 267–277.
3. Babakov A. V., Novikov P. A., Shatokhin E. A. “Numerical Simulation of the Unsteady Large-scale Vortex Structures in a Near Wake of the Aerospace Vehicles,” in: Investigations of Hydrodynamical Instability and Turbulence in Fundamental and Technological Problems by Means of Mathematical Modeling with Supercomputers, Nagoya University Press, Nagoya, 2007.

Проблема адекватности математических моделей экологических систем

The problem of the adequate models of ecological systems

Белотелов Н. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; belotel@mail.ru

В докладе обсуждается адекватность наших модельных представлений об экологических системах с учетом возможностей измерения переменных, входящих в модели.

В экологии можно выделить два подхода к описанию экосистем. Первый — массэнергетический, связан с представлением о круговороте биогенных элементов, который организуют живые системы, взаимодействующие с абиотическим окружением, используя энергию Солнца. На основании этого взгляда на функционирование экологических систем появились такие базовые понятия, как трофические цепи, продуктивность и другие, описание которых в рамках математических моделей и в настоящее время является основой для описания и прогноза поведения экологических объектов. Пионером развития математических моделей такого типа является В.А. Костицын. Примером такого типа моделей может служить модель круговорота углерода на суше, которая в различных модификациях используется в качестве подблока в глобальных моделях для оценки изменения климата.

Второй подход — популяционный, основными переменными, используемыми при таком описании, являются концентрации или численности популяций. В основе популяционного подхода лежит свойство живых систем образовывать популяции, т.е. объекты, состоящие из особей, обитающих на определенном ареале, производящие другие особи и живущие конечное время. Такое описание живых систем лежит в основе широкого класса математических моделей, родоначальниками которого являются В. Вольтерра и А. Лотка. Это так называемые вольтерровские модели. Основным естественнонаучным результатом этого подхода, на наш взгляд, является иллюстрация того факта, что сложные динамические режимы численности популяции

(колебания и вспышки численности) могут объясняться межвидовыми или внутривидовыми взаимодействиями.

Современные подходы к моделированию экологических объектов исходят из предположения, что все рассматриваемые фазовые переменные и параметры могут быть в принципе измерены. В этом модельеры следуют традиции классической физики, по словам В.А. Фока, “предполагая, что всегда можно “подсмотреть” явление, не вмешиваясь в него и не влияя на него:

Пренебрежение этим обстоятельством представляет собой абстракцию, которую можно назвать абсолютизацией физического процесса. Если ее принять, то становится возможным рассмотрение физических процессов как происходящих самих по себе, вне зависимости от того, существует ли принципиальная возможность их наблюдения”.

На примере трех задач: моделирование динамики растительности при изменении климата; моделирование связи между численностью вида и метаболизмом особи; моделирование подвижности популяции, — обсуждаются некоторые нерешенные проблемы математического описания экологических объектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-0700-398).

Модель движения воздуха в нижней части тайфуна

A model of air motion in a lower part of typhoon

Власов В. И.¹, Скороходов С. Л.¹, Фужита Яшима Х.²

¹*ВЦ РАН, Москва, Россия; vlasov@ccas.ru, skor@ccas.ru*

²*Университет г. Турина, Турин, Италия;
hisao.fujitayashima@unito.it*

Рассмотрена модель стационарного осесимметричного движения воздуха в нижнем слое тайфуна, основанная на осреднении по вертикали уравнений динамики атмосферы в этом слое и задании функ-

ции β , описывающей вертикальный поток воздуха на его верхней границе.

Модель учитывает объемную и динамическую вязкость воздуха соответственно с коэффициентами λ и μ , его сжимаемость по закону адиабаты с показателем γ , силу трения о поверхность Земли с коэффициентом α и силу Кориолиса с параметром $l_0 = 2\omega \sin \varphi_0$, где ω — угловая скорость вращения Земли, φ_0 — географическая широта центра тайфуна. Модель сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно двух осредненных компонент горизонтальной скорости воздуха, радиальной $U(r)$ и тангенциальной $\Phi(r)$, а также осредненной плотности воздуха $\varrho(r)$, где r — радиальная координата, отсчитываемая от центра тайфуна. Интервалом интегрирования указанной системы является $r \in (0, \infty)$.

Исходную задачу удастся свести к последовательному решению двух задач: краевой задачи для тангенциальной компоненты скорости $\Phi(r)$,

$$\Phi'' + (r^{-1} + b\mu^{-1})\Phi' - (r^{-2} - r^{-1}b\mu^{-1} + \alpha\mu^{-1})\Phi = -l_0 b\mu^{-1}, \quad (1)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(r) = 0 \quad (2)$$

и задачи Коши для плотности $\varrho(r)$:

$$\begin{aligned} & (\mu + \lambda)b\varrho'' - 2(\mu + \lambda)b\varrho^{-1}\varrho'^2 + \\ & + [2(\mu + \lambda)b' + (\mu + \lambda)r^{-1}b + b^2 - \gamma P_\infty \varrho_\infty^{-\gamma} \varrho^{\gamma+1}]\varrho' + \\ & + (l_0\Phi + r^{-1}\Phi^2)\varrho^3 + [(\mu + \lambda)(r^{-2}b - r^{-1}b' - b'') - bb' + \alpha b]\varrho = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = \varrho_\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varrho'(r) = 0; \quad (4)$$

здесь функция $b(r)$ определяется через $\beta(r)$ по формуле $b(r) := r^{-1} \int_0^r s\beta(s) ds$, а P_∞ и ϱ_∞ — давление и плотность воздуха на бесконечности. Дополнительно отметим, что функция $\beta(r)$ должна также удовлетворять условию баланса массы в рассматриваемом слое:

$$\int_0^\infty s\beta(s) ds = 0.$$

После нахождения $\Phi(r)$ и $\varrho(r)$ из решения задач (1), (2) и (3), (4) радиальная компонента скорости U и давление p находятся по формулам $U = -b/\varrho$ и $p = P_\infty (\varrho/\varrho_\infty)^\gamma$.

Было получено высокоточное численное решение рассматриваемой системы уравнений. Проведенные обширные вычислительные эксперименты позволили выявить характерное явление наличия двух максимумов в распределении модуля скорости $|\vec{v}(r)|$. Первый из них, ближайший к центру тайфуна, является довольно резко выраженным максимумом тангенциальной компоненты скорости; второй определяется максимумом радиальной компоненты и является менее выраженным. Это явление подтверждается данными наблюдений и хорошо объясняет значительный размер зоны больших скоростей ветра, т.е. зоны сильных разрушений, вызываемых тайфуном.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00837) и ОМН РАН (Программа № 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. И., Скороходов С. Л., Фужита Яшима Х. О некоторых атмосферных вихревых структурах // International Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems". 2010. Vol. 20. P. 99–108.
2. Власов В. И., Скороходов С. Л., Фужита Яшима Х. Численное моделирование движения воздуха в приземном слое тайфуна // Научные ведомости БелГУ. Серия "Математика. Физика". 2009. Т. 70. № 15. С. 59–70.

Алгоритм Чебышева–Маркова–Крейна в задачах управления процессами, описываемыми уравнениями Смолуховского

Chebyshev–Markov–Krein algorithm in control problems of the processes described by the Smoluhovsky equations

Гаева З. С.¹, Шананин А. А.²

¹Балкарский научный центр РАН, Нальчик, Россия; gzs@mail.ru

²МФТИ, Долгопрудный, Россия; alexshan@yandex.ru

В данной работе предложен подход к численному решению математической задачи управления микроструктурой градового облака, эволюция которого описывается системой интегро-дифференциальных уравнений Смолуховского для функций распределения капель и кристаллов по массе или размеру. Управление осуществляется с целью предотвращения образования крупных градин в облаке, которые могут достигнуть поверхности Земли и нанести ущерб. Поэтому минимизируется функционал, определяющий количество градин в облаке, больших определенного, критического размера. Известно, что даже расчет интегральных характеристик функции распределения частиц в облаке, для определения которых решается система кинетических уравнений является сложной задачей, не говоря о задаче управления. Поэтому актуальным вопросом является разработка эффективных методов решения этих уравнений, обладающих необходимой точностью. Для решения задачи управления предлагается воспользоваться методом Галеркина, что позволяет задачу управления сложной системой интегро-дифференциальных уравнений свести к задаче управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, за счет удачного выбора в качестве базиса полной ортонормированной системы функций Дмитриева, можно значительно сократить объем вычислений. При использовании метода Галеркина возникает проблема контроля точности вычислений, связанная с тем, что интегральные характеристики, описывающие эволюцию облака, не могут быть вычислены точно по конечному числу коэффициентов Галеркина. Для решения этой проблемы по коэффициентам (мо-

ментам) Галеркина на основе теории проблемы моментов Чебышева–Маркова–Крейна был разработан алгоритм (см. [1]) вычисления точных верхней и нижней границ, в которых может лежать интегральная характеристика функции распределения. С помощью замены переменных задача сводится к степенной проблеме Чебышева–Маркова–Крейна с неопределенным нулевым моментом. Для решения этой задачи разработан быстрый алгоритм, применимый при выполнении дополнительных условий, и универсальный медленный алгоритм. В докладе обсуждаются условия применимости быстрого алгоритма. Таким образом, по коэффициентам Галеркина удастся построить точную верхнюю оценку исходного функционала, определяющего количество градин, больших определенного размера. Далее этот функционал заменяется точной верхней границей. Таким образом, сложная задача управления микроструктурой градового облака, описываемого системой интегро-дифференциальных уравнений Смолуховского, заменяется оценочной задачей управления процессом, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Специфика оценочной задачи в том, что новый функционал и, следовательно, его производные не задаются явными формулами. В то же время, как известно, в условия трансверсальности в задаче управления входят производные функционала. Для вычисления производных точных оценок удалось модифицировать алгоритм построения точных верхней и нижней оценок Чебышева–Маркова–Крейна (см. [2]) без существенного увеличения вычислительной сложности алгоритма. Алгоритмы вычисления точных оценок и их производных с использованием принципа максимума Понтрягина позволили адаптировать метод последовательных приближений для решения задачи управления микрофизическими процессами в облаке (см. [3]). Специфика этой задачи оптимального управления обсуждается в докладе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаева З. С., Шананин А. А. Проблема Маркова–Чебышева и исследование галеркинских приближений в одной задаче агрегации // Матем. модел. 1995. Т. 7. № 9. С. 35–54.
2. Гаева З. С., Шананин А. А. Численный метод решения задачи управления микроструктурой градового облака // Матем. модел. 2004. Т. 16. № 12. С. 69–84.

3. Гаева З. С., Шананин А. А. Численный метод решения задачи управления микроструктурой градового облака // ЖВМ и МФ. 2007. Т. 47. № 9. С. 1616–1635.

Математическое моделирование течений несжимаемой жидкости

Mathematical modelling of the incompressible fluid flows

Гущин В. А.

ИАП РАН, Москва, Россия; gushchin@icad.org.ru

Многие явления, наблюдаемые в атмосфере и океане, а также проблемы гидромеханики, гидрофизики в силу умеренных скоростей перемещения среды можно изучать в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости.

Задачи, представляющие практический интерес, как правило, характеризуются многомерностью, нестационарностью, нелинейностью, наличием свободных границ и пограничных слоев и описываются уравнениями Навье–Стокса. Нелинейность этих уравнений и наличие малого параметра при старших производных создают серьезные трудности как при их аналитическом исследовании, так и при численном решении этих уравнений. Большинство существующих методов решения уравнений Навье–Стокса не позволяют получать достоверные результаты при изучении свойств течений вязкой жидкости у тел сложной формы.

Существование при обтекании тел таких явлений, как резкое изменение сопротивления, появление непредсказуемой по знаку боковой силы, связанных с отрывом потока и его турбулизацией, привлекают внимание как практиков, так и теоретиков. Изучение этих явлений даже на телах простой формы представляет существенный интерес.

Исследование волновых движений жидкости — одна из наиболее сложных проблем современной гидродинамики. В режимах, представляющих практический интерес, характер волновых процессов опреде-

ляется существенно нелинейными эффектами. В связи с этим возрастает роль математического моделирования соответствующих физических явлений.

Математическое моделирование таких сложных течений, какими являются отрывные течения, особенно при больших числах Рейнольдса, течения со свободной поверхностью, течения стратифицированной по плотности жидкости, предъявляет целый ряд требований к методам решения уравнений, описывающих эти течения. К таким требованиям относятся: высокий порядок аппроксимации конечно-разностных схем — второй и выше, минимальная схемная диссипация и дисперсия, работоспособность в широком диапазоне исследуемых параметров (чисел Рейнольдса и т.д.) и монотонность. Последнее свойство особенно важно при моделировании течений с областями больших градиентов гидродинамических параметров и при расчетах течений со свободной поверхностью, а также течений стратифицированной жидкости.

Для прямого численного моделирования пространственных течений несжимаемой вязкой жидкости используется метод расщепления по физическим факторам SMIF-МЕРАНЖ [1–2] с явной гибридной конечно-разностной схемой (второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальная схемная вязкость и дисперсия, монотонность). Демонстрируется использование метода SMIF-МЕРАНЖ для моделирования внешних и внутренних пространственных течений несжимаемой вязкой жидкости. Изучаются механизмы формирования вихревых петель в следе за сферой для различных режимов течений жидкости [3, 4]. Рассматриваются переходные режимы течения за «бесконечным» круговым цилиндром [4]. Демонстрируются примеры моделирования воздушных потоков в «чистой комнате» [5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00662, 08-01-91306, 08-07-00159, 09-01-92102 и 10-01-92654) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 и ОМН РАН № 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15. № 1. С. 197–207.

2. *Гущин В. А.* Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16. № 2. С. 529–534.
3. *Гущин В. А., Матюшин П. В.* Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < Re < 380$ // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 135–151.
4. *Gushchin V. A., Kostomarov A. V., Matyushin P. V.* 3D Visualization of the Separated Fluid Flows // J. of Visualization. 2004. V. 7. № 2. P. 143–150.
5. *Гущин В. А.* Применение математического моделирования для проектирования чистых комнат и их элементов // Автоматизация проектирования. 1998. № 1(7). С. 10–14. № 2(8). С. 3–8.

Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабо сжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах

Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems

Давыдов А. А., Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; chetver@imamod.ru

В настоящее время исследователям стали доступны вычислительные системы с производительностью более 100 TFlops. Это открывает новые большие возможности в математическом моделировании, позволяя моделировать сложные процессы как можно ближе к их реальному протеканию. Имеются, однако, существенные проблемы, связанные с реальным использованием возможностей таких систем. Эти трудности связаны как со спецификой вычислительных алгоритмов для высокопроизводительных вычислительных систем, так и с проблемами вспомогательного программного инструментария [1]. На решение этих проблем направлены усилия специалистов ведущих индустриальных стран.

В настоящее время усиливается тенденция к использованию вычислительных систем, базирующихся на существенно многоядерных

процессорах нетрадиционной архитектуры. Это открывает возможности к заметному снижению стоимости системы на единицу производительности. Однако трудности эффективного использования таких систем значительно возрастают даже по сравнению с непростыми проблемами использования уже существующих высокопроизводительных компьютеров. Многоядерные многопроцессорные вычислительные системы требуют разработки специального математического обеспечения, учитывающего гибридную структуру памяти: распределенную между процессорами и общую для ядер одного процессора. Не менее важным для таких систем являются особо жесткие требования к вычислительным алгоритмам, которые должны быть как можно проще и прозрачнее с логической точки зрения и вместе с тем достаточно эффективными.

В этом смысле очень привлекательными оказываются явные схемы, которые легко адаптируются к различной архитектуре ЭВМ и позволяют эффективно использовать вычислительные системы, содержащие $10^3 - 10^4$ ядер. Однако явные схемы накладывают жесткое ограничение на шаг по времени, связанное с требованием устойчивости, особенно при решении уравнений и систем параболического типа. В связи с этим перспективным направлением является разработка явных схем с как можно более мягким условием устойчивости. Таким свойством обладают кинетические схемы (КС) для решения задач газовой динамики.

Кинетические или больцмановские схемы [2, 3] в настоящее время широко применяются в вычислительной газовой динамике и являются эффективным подходом к моделированию задач механики сплошной среды на многопроцессорных вычислительных системах. Успешный опыт использования кинетических схем для решения широкого спектра задач гидро- и газовой динамики показывает, что они описывают вязкие теплопроводные течения так же хорошо, как и система уравнений Навье–Стокса в области применимости последней.

Кроме того, в работе будет описан оригинальный вычислительный кластер, который позволяет расширить возможности графических плат для решения задач, описываемых уравнениями математической физики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00600).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chetverushkin B. N.*, “High-Performance Computing: Fundamental Problems in Industrial Applications,” in: *Parallel, Distributed and Grid Computing for Engineering*, Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire, Scotland, 2009, pp. 369–388.
2. *Четверушкин Б. Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.
3. *Елизарова Т. Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.

О математической теории общей циркуляции атмосферы

On mathematical theory of global atmospheric circulation

Дымников В. П.

ИБМ РАН, Москва, Россия; dymnikov@inm.ras.ru

А.А. Дородницын посвятил проблемам динамической метеорологии около десяти работ, главным образом, проблемам теории пограничного слоя в атмосфере. В докладе анализируется одна работа Дородницына (соавторы — Извеков и Швец), посвященная математической теории общей циркуляции атмосферы. Под этой теорией авторы понимают вычисление характеристик атмосферной циркуляции на основе использования фундаментальных уравнений геофизической гидродинамики. Анализ этой работы интересен не только потому, что в те годы, когда она была сделана, российская школа динамической метеорологии была лидирующей в мире, но и потому, что в ней сформулирован метод вычисления характеристик циркуляции, используемый до настоящего времени как в диагностических расчетах, так и при конструировании климатических моделей. В основе предложенного метода лежит решение обратной задачи нахождения динамических характеристик атмосферы с помощью заданного (измеренного) поля температуры. Метод применяется к построенной авторами модели

зонально-осредненной циркуляции атмосферы Северного полушария. В докладе излагается современное понимание механизмов формирования зонально-осредненной циркуляции атмосферы и математические модели ее воспроизведения. Вторая часть доклада посвящена кратко-му изложению актуальных задач современной математической теории общей циркуляции атмосферы и климата.

Вычислительные основы моделирования электронного транспорта в микро- и наноструктурах

Numerical basis for computer simulation of electron transport in micro- and nanostructures

Карамзин Ю. Н.¹, Поляков С. В.¹, Федирко В. А.²

¹*ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;
polyakov@imamod.ru*

²*МГТУ “Станкин”, Москва, Россия; vfed@mail.ru*

Одним из перспективных направлений нанoeлектроники является разработка вакуумных автоэмиссионных приборов с размерами активных элементов порядка 10 нм и менее. Такие приборы применяются для создания систем отображения информации, источников СВЧ-излучения, приборов электронного зондирования поверхностей, реализации сверхкомпактных источников тока, квантовых транзисторов и элементов памяти компьютеров [1,2]. При разработке подобных приборов необходимо всестороннее изучение свойств соответствующих наноматериалов и их взаимодействия с окружающей средой в рамках общей конструкции. Эта задача равно распределяется как на экспериментальные, так и на теоретические исследования, в том числе с помощью методов математического моделирования. Математические модели, описывающие процессы в новых электронных приборах, включают целый набор физических описаний, имеющих различную природу и использующих различный математический аппарат (опи-

сания механики сплошной среды, квантовые и статистические модели, гибридные подходы). Одним из подходов к решению таких сложных проблем является применение методов расщепления по физическим процессам и согласования исходных данных и результатов на всех уровнях размерной иерархии.

Представляемая работа посвящена созданию основ математического моделирования эмиссионных электронных процессов на поверхности наноструктур, находящихся в вакууме. В качестве примера рассматривается задача полевой электронной эмиссии с поверхности кремниевых автокатодов, имеющих нанометровые размеры острия. Математическая модель состоит из трех частей: квазигидродинамическая модель, описывающая электронные процессы внутри катода, квазиэлектростатическая модель, описывающая изменения электрического поля во всей структуре, квантово-механическая модель, описывающая туннелирование электронов через потенциальный барьер на поверхности острия. Для решения задачи разработан сеточный подход [3–6], использующий нерегулярные треугольные и тетраэдральные сетки и конечно-объемные аппроксимации уравнений квазигидродинамики и уравнения Пуассона [4]. Для задачи туннелирования разработан новый численный алгоритм, сочетающий метод передаточных матриц и схему Адамса [6]. Для реализации построенных конечно-объемных схем используются методы сопряженных и бисопряженных градиентов. Параллельная реализация численных алгоритмов базируется на методе Шварца и ориентирована на вычислители с гибридной архитектурой и выполнена в виде комплекса параллельных программ [5], который позволяет рассчитывать распределения электрического поля, плотности зарядов и разогрев в различных подобластях прибора, а также его рабочие характеристики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 08-07-00458, 09-01-00448-а, 09-01-12022-офи-м).

ЛИТЕРАТУРА

1. Татаренко Н. И., Кравченко В. Ф. Автоэмиссионные наноструктуры и приборы на их основе. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. Дьячков П. Н. Углеродные нанотрубки: строение, свойства, применение. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

3. Федирко В. А., Поляков С. В. Моделирование на МВС устройств вакуумной микроэлектроники // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем // Сб. научных трудов МГТУ “Станкин” и ИММ РАН. Вып. 6. М.: Янус-К, 2004. С. 138–147.
4. Поляков С. В. Экспоненциальные схемы для решения эволюционных уравнений на нерегулярных сетках // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия “Физико-математические науки”. 2007. Т. 149. Кн. 4. С. 121–131.
5. Поляков С. В., Федирко В. А. Программный комплекс для моделирования катодного микроузла с полупроводниковым автоэммиттером // Прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 48–55.
6. Федирко В. А., Поляков С. В., Зенюк Д. А. Матричный метод для моделирования туннельного переноса // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 5. С. 3–14.

Математические модели в исследовании барьерного разряда в воздухе

Mathematical modelling of a surface barrier discharge in air

Кривцов В. М.¹, Соловьев В. Р.²

¹ВЦ РАН, Москва, Россия; krivtsov@ccas.ru

²МФТИ, Долгопрудный, Россия; vicso1@mail.ru

Барьерный разряд — это разряд между электродами, из которых, по крайней мере один покрыт диэлектриком, препятствующим прохождению тока проводимости из зоны разряда к электроду. Этот тип разряда имеет две формы своего развития — объемную и поверхностную. В объемном барьерном разряде слой газа, в котором развивается разряд, находится между покрытыми диэлектриком электродами, а в поверхностном, когда два электрода разной ширины разделены диэлектриком — прилегает непосредственно к поверхности диэлектрика.

Отметим, что объемный барьерный разряд достаточно хорошо изу-

чен в связи с его применением в озонаторах и для очистки газов от вредных примесей. Интенсивное исследование поверхностного барьерного разряда (ПБР) началось лишь несколько лет назад в связи с перспективой его использования для управления ламинарно-турбулентным переходом и положением зон отрыва воздушных течений вблизи твердых поверхностей путем изменения параметров пограничного слоя. Набор экспериментальных данных может служить качественным критерием при отборе предлагаемых моделей развития ПБР с точки зрения адекватности описания рассматриваемого явления. А именно: модель должна описывать как диффузную, так и стримерную фазы развития разряда в зависимости от знака потенциала высоковольтного электрода, а характерная длина стримера в ПБР атмосферного воздуха должна быть порядка нескольких миллиметров. Таким образом, основные затруднения при моделировании данного типа разряда связаны с разнообразием его режимов, отсутствием надежной физической модели развития ПБР и ее численной реализации.

В результате проведенных исследований [1–5] удалось выявить основные физические явления, определяющие развитие ПБР. Сложность численного моделирования рассматриваемого явления связана с наличием пограничных слоев у электрода и диэлектрика, а также подвижных узких зон ионизации. В докладе представлены разработанные численные методы для его компьютерного моделирования.

Тестирование полученных результатов проводится путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными. Настоящий этап исследований связан с оптимизацией параметров приложенного напряжения для наиболее эффективного воздействия на газ в предлагаемой схеме возбуждения разряда.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-08-01056-а) и целевой программы ОМН-3 РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соловьев В. Р., Кончаков А. М., Кривцов В. М., Александров Н. Л. Численное моделирование поверхностного барьерного разряда в воздухе // Физика плазмы. 2008. Т. 34. № 7. С. 648–662.
2. Кривцов В. М., Кончаков А. М., Соловьев В. Р. Математические модели поверхностного барьерного разряда. М.: ВЦ РАН, 2007.
3. Krivtsov V. M., Soloviev V. R., “Surface barrier discharge modelling for aerodynamic applications,” J. Phys. D: Appl. Phys, **3**, No. 42, 125208 (2009).

4. *Krivtsov V. M., Soloviev V. R.*, “Features of a Surface Barrier Discharge Modeling,” AIAA Paper, **3**, No. 0842, (2009).
5. *Соловьев В. Р., Кончаков А. М., Кривцов В. М., Леонов С. Б., Яранцев Д. А.* Аэродинамические эффекты поверхностного барьерного разряда в воздухе и особенности его моделирования // Препринт ОИВТ РАН № 2-491. М.: 2006.

**Обратные задачи и задачи вариационной
ассимиляции данных для сложных математических
моделей геофизической гидродинамики**

**Inverse and variational data assimilation problems
for complicated mathematical models
of the geophysical hydrodynamics**

**Марчук Г. И., Агошков В. И., Залесный В. Б.,
Пармузин Е. И., Шутяев В. П.**

ИБМ РАН, Москва, Россия; agoshkov@inm.ras.ru

В современных научных и прикладных исследованиях большое внимание уделяется анализу и решению обратных задач и задач управления для сложных нелинейных математических моделей [1, 4], в которых помимо функций, описывающих состояние системы, «дополнительными» неизвестными могут быть функции начальных состояний, граничных условий и источников. Процедура замыкания таких обратных задач или задач управления может быть осуществлена на основе вариационной ассимиляции данных измерений состояния рассматриваемых систем или некоторых характеристик моделируемых процессов (спутниковые измерения температуры поверхности и уровня океана, глубоководные измерения температуры, солености воды и др.). В результате замыкания рассматриваемые задачи сводятся к задачам вариационной ассимиляции данных измерений и комплексным задачам оптимального управления [2, 3]. Учитывая сложность рассматриваемых нелинейных моделей, эти задачи представляют собой предмет для междисциплинарных исследований. Они описываются нелиней-

ными системами уравнений в частных производных, их исследование требует привлечения результатов ряда разделов математики и информатики: теории сопряженных уравнений и оптимального управления, общей теории обратных задач, теории уравнений в банаховых пространствах, нелинейного анализа, современной теории итерационных алгоритмов и численных методов. Численное решение таких задач невозможно без привлечения мощной вычислительной техники.

В настоящей работе формулируются задачи, относящиеся к классу таких проблем — обратные задачи геофизической гидродинамики (для математических моделей динамики океанов и морей) и задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений, к которым сводятся рассматриваемые обратные задачи [2–4]. Предлагаются методы решения исследуемых задач, среди которых особое место отводится методам расщепления и итерационным процедурам [4]. Формулируются теоремы о разрешимости изучаемых задач, о сходимости итерационных процессов, рассматриваются вопросы практической реализации задач и приводятся результаты численного решения некоторых из них.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00806), Программы ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А. А.* Избранные научные труды. М.: Вычислительный центр РАН, 1997.
2. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
3. *Агошков В. И., Ипатова М., Залесный В. Б., Пармузин Е. И., Шутяев В. П.* Задача вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46. № 6. С. 1–37.
4. *Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б.* Математические модели геофизической гидродинамики и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987.

Математическое моделирование динамики Мирового океана

Mathematical modelling of World ocean dynamics

Марчук Г. И.¹, Залесный В. Б.², Агошков В. И.³,
Гусев А. В.⁴, Дианский Н. А.⁵

ИВМ РАН, Москва, Россия;

¹guri@inm.ras.ru, ²zalesny@inm.ras.ru, ³agoshkov@inm.ras.ru,
⁴gusev@inm.ras.ru, ⁵dinar@inm.ras.ru

Рассматривается задача математического моделирования бароклинной динамики Мирового океана и его крупных акваторий. Математическая модель разработана в ИВМ РАН и базируется на уравнениях общей циркуляции, записанных в обобщенной сферической σ -системе координат со свободной поверхностью, в приближениях гидростатики и Буссинеска.

Численный алгоритм основан на методе многокомпонентного расщепления и имеет гибкую, иерархически развиваемую модульную структуру. Основным “циклом” является расщепление сложной системы уравнений по физическим процессам на ряд крупных, энергетически сбалансированных подсистем-модулей. Каждый отдельный модуль может повторно расщепляться на модули более простой структуры. Глубина повторных расщеплений может включать несколько уровней вплоть до выделения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и простейшими уравнениями в частных производных. В зависимости от решаемой задачи, может выбираться определенный вид и глубина расщепления. Полная модель определяется набором расщепленных подсистем (модулей) и аппроксимирует исходную модель с некоторым порядком точности по времени.

Наряду с решением прямых прогностических задач, метод многокомпонентного расщепления может эффективно использоваться для решения задач четырехмерной вариационной ассимиляции данных наблюдений. Каждому отдельному модулю ставится в соответствие его сопряженный аналог, который решается в обратном времени. Со-

пряженная модель определяется соответствующим набором расщепленных сопряженных подсистем.

Разработанная методика иллюстрируется на решении задачи муссонной динамики Индийского океана в вихревом режиме и четырехмерной вариационной инициализации гидрофизических полей Мирового океана с учетом ассимиляции данных плавающих буев АРГО.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 10-01-00806-а, 09-05-01231-а и 09-05-00421-а).

Численные эксперименты с использованием глобальной климатической модели

Numerical experiments with global climate model

Пархоменко В. П.

ВЦ РАН, Москва, Россия; parhom@ccas.ru

При анализе долгосрочных изменений климата необходимо рассматривать всю атмосферу, океан (с морским льдом) и деятельный слой суши (почва и растительность) как взаимодействующие части единой системы, называемой климатической системой. Она характеризуется сложными взаимодействиями и обратными связями ее элементов. Климатическая система обладает также значительной временной изменчивостью.

Рассматриваемая гидродинамическая трехмерная глобальная климатическая модель включает блоки океана, атмосферы и морского льда. Описывает сезонный ход термохалинной циркуляции Мирового океана в геострофическом приближении с учетом фрикционного члена в уравнениях импульса по горизонтали. Постановка задачи с относительно грубым пространственным разрешением позволяет вести расчеты на длительные времена порядка тысяч лет с учетом эволюции глубоких слоев океана. Изучается также проблема объединения этой достаточно сильно агрегированной модели с более детальной моделью общей циркуляции атмосферы для улучшения результатов моделиро-

вания. Численные эксперименты показывают, что модель выходит на равновесие за период около 2000 лет.

Резкое потепление климата может вызвать быстрое таяние и разрушение ледяных континентальных щитов Гренландии, что приведет к значительным выбросам пресной воды в области Северной Атлантики. В численных экспериментах предполагается, что в течение 25 лет в области северной Атлантики происходят дополнительные выбросы пресной воды. Из расчетов следует, что максимум меридионального потока в Северной Атлантике уменьшается почти в два раза примерно через 25 лет. Эффект ослабления потока сохраняется до 200 лет несмотря на прекращение выбросов пресной воды. Блокировка термохалинной циркуляции ведет к понижению температуры воздуха на несколько градусов в соответствующей области, а также заметно влияет на глобальный климат.

Проведен также численный эксперимент по оценке влияния загрязнения цивилизационным и естественным мусором поверхности океана в области Северотихоокеанского субтропического кольца, отмечаемого в наблюдениях, на климат. Наличие мусора ведет к резкому перегреву поверхности океана. Мусор ограничивает путь излучения в воде сантиметрами, тогда как обычно излучение распределяется в слое глубиной в несколько десятков метров. Такая концентрация энергии приведет к значительному увеличению испарения в областях мусорных островов. Изучены несколько вариантов описания этого эффекта. В численном эксперименте предполагается, что температура поверхности океана увеличена на 10% в формуле, описывающей испарение с поверхности океана в области загрязнений. Это привело к увеличению испарения с поверхности океана и понижению температуры поверхности в этой области до 2°C. При этом изменяется и вертикальная циркуляция в северной области Тихого океана.

Представлен анализ некоторых особенностей параллельной реализации модели климата на многопроцессорных ЭВМ.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 2 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00607).

Численное моделирование волновых процессов в гетерогенных средах

Numerical modelling of wave processes in heterogeneous environment

Петров И. Б.

МФТИ, Долгопрудный, Россия; Petrov@mipt.ru

Задачи о распределении волн в геологических сферах имеют свою специфику. Дело в том, что геологические среды являются, как правило, существенно гетерогенными и градиентными (т.е. скорости звука в них изменяются в зависимости от координат). Гетерогенность таких сред обусловлена наличием поверхностей раздела сред (возможно, многочисленных), резервуаров, карстовых образований, трещин и систем трещин, которые могут иметь разные размеры и разную ориентацию в пространстве. Все эти особенности геологической среды должны быть описаны в рамках либо осредненных моделей, либо математически корректного выделения всех (или части) неоднородностей, например, с помощью решения задачи контактного разрыва на поверхностях раздела сред. При этом нужно иметь в виду то, что для получения адекватного численного решения соответствующих задач, которые сводятся к динамической системе уравнений в частных производных гиперболического типа (уравнения теории упругости и, возможно, акустики) необходимо выбрать или разработать соответствующий характеру таких задач метод. Известно, что методы, способные наиболее адекватно описывать сложные волновые процессы в существенно неоднородных средах, должны учитывать характеристические свойства соответствующей системы уравнений механики сплошных сред.

Автором разработан гибридный сеточно-характеристический метод для численного решения задач механики деформируемого твердого тела, способный учитывать указанные особенности гетерогенных геологических сред. Он позволяет корректно строить алгоритмы на контактных границах и границах области интегрирования, в определенной степени учитывать физику задачи (распространение разрывов вдоль характеристических поверхностей), обладает важным для рас-

смаатриваемых задач свойством монотонности. Приводятся результаты расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров И. Б., Холодов А. С.* Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.
2. *Петров И. Б.* Расчет процессов в жилищных и промышленных сооружениях при падении самолетов // Информационные технологии и вычислительные системы. 2005. № 1. С. 130–139.
3. *Левант В. Б., Петров И. Б., Челмоков Ф. Б.* Кластерная природа сейсмической энергии, рассеянной от зоны диффузной кавернозности и трещиноватости в массивных породах // Геофизика. 2005. № 6. С. 5–19.

Математические модели нелинейных процессов в экологии и решение прикладных задач

Mathematical models of nonlinear processes in ecology and solution of applied problems

Пирумов У. Г.

МАИ, Москва, Россия; kaf806@mai.ru

Основным источником токсичных компонент, канцерогенных элементов и аэрозолей являются высокотемпературные процессы в движущихся средах, имеющие место в энергетике, металлургии, автотранспорте, ракетной и авиационной технике. Для количественного и качественного прогнозирования этих процессов, создания способов борьбы с токсичными компонентами и аэрозолями предложены адекватные математические модели и эффективные методы решения соответствующих уравнений.

Математическое моделирование явлений предполагает в современной интерпретации проведение нескольких основных этапов исследований. Первоначально необходимо предложить физическую модель

явления и адекватную ей математическую модель. В рассматриваемых проблемах математическая модель этих процессов включает нелинейные уравнения физической газовой динамики, уравнения химической кинетики и уравнения движения и энергии частиц, выражающие законы сохранения массы, импульса, энергии в общем случае многокомпонентной смеси. При этом используются уравнения, записанные как в дифференциальной, так и в интегральной формах. Изучены одномерные стационарные и нестационарные течения, двумерные нестационарные, трехмерные стационарные течения. Рассмотрены как уравнения Эйлера, так и уравнения Навье–Стокса. В зависимости от рассматриваемого течения эти уравнения имеют эллиптический, параболический или гиперболический вид.

В связи с этим развиты оригинальные численные методы, в том числе метод решения обратной задачи теории сопла, различные варианты метода характеристик, методы решения релаксационных уравнений, методы сквозного счета, в том числе на структурированных и неструктурированных адаптивных сетках.

Перечисленное выше позволяет создать пакеты прикладных программ с соответствующим сервисным обеспечением, которые являются основой для проведения параметрических исследований и вычислительных экспериментов.

Представленные программные комплексы в течение многих лет использовались для решения прикладных задач в авиации, космонавтике, экологии и машиностроении.

Исследованы проблемы образования и нейтрализации вредных веществ в высокотемпературных движущихся средах с учетом неравновесных физико-химических процессов. Рассмотрена проблема распространения токсичных компонент в атмосфере при струйных течениях вблизи выхлопных устройств. Приведены некоторые результаты расчетных исследований различных прикладных задач.

Изучены следующие технические объекты и связанные с ними прикладные задачи:

- паровые котлы тепловых электростанций;
- автомобильные двигатели;
- газодинамический фильтр;
- сопла реактивных двигателей;
- стенды для испытания объектов ракетно-космической и авиационной техники;

- струи реактивных двигателей;
- течение в газовом анализаторе;
- воспламенение, горение и детонация газовых и газокapельных горючих смесей;
- взаимодействие высокоскоростных многофазных потоков с обтекаемой поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. М.: Наука, 1990.
2. *Волков В.А., Гидаспов В.Ю., Пирумов У.Г., Стрельцов В.Ю.* Численное моделирование течений реагирующих газокapельных и газовых смесей в экспериментах по воспламенению метанола // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 3. с. 424–434.
3. *Авдеевский В.С., Ашратов Э.А., Иванов А.В., Пирумов У.Г.* Газовая динамика сверхзвуковых неизобарических струй. М.: Машиностроение, 1989.
4. *Пирумов У.Г.* Обратная задача теории сопла. М.: Машиностроение, 1988.
5. *Гидаспов В.Ю.* Алгоритм численного расчета послойным методом характеристик квазидномерных нестационарных внутренних течений газа с ударными и детонационными волнами // Вычислительные аспекты решения задач охраны окружающей среды. Тематический сборник научных трудов. М.: МАИ, 1988, с. 33–37.
6. *Pirumov U.G., Ivanov I.E., Kryukov I.A.* “Numerical simulation of internal and external gas dynamic flows on structured and unstructured adaptive grids” in: AGARD conference proceedings 578. Progress and challenges in CFD methods and algorithms. Published April, p. 13-1–13-9 (1996).
7. *Волков В.А., Мусин В.Р., Пирумов У.Г., Прохоров М.Б., Стрельцов В.Ю.* Численное моделирование процесса нейтрализации окислов азота впрыском жидкой воды в высокотемпературные продукты сгорания // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 6.
8. *Авдеевский В.С., Пирумов У.Г.* Проблемы нейтрализации вредных выбросов в машиностроении // Проблемы машиностроения. 1994. № 5.
9. *Авдеевский В.С., Пирумов У.Г.* Внедрение методов подавления токсичных компонент // Проблемы машиностроения. 1994. № 6.
10. *Пирумов У.Г., Гидаспов В.Ю., Даниелян А.А., Крюков И.Э., Крюков И.А., Муслаев А.В.* Численный анализ двухфазного течения в фильтре // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 11. С. 19–28.
11. *Пирумов У.Г.* Математическое моделирование в проблемах охраны воздушного бассейна. М.: МАИ, 2001.

12. Гидаспов В.Ю., Москаленко О.А., Пирумов У.Г. Численное моделирование стационарных детонационных волн в газовых и газокапельных реагирующих смесях // Вестник МАИ. 2009. Т. 16. № 2. С. 51–61.
13. Винников В.В., Ревизников Д.Л., Способин А.В. Двухфазный ударный слой при обтекании тел сверхзвуковым запыленным потоком // Математическое моделирование. 2009. Т. 21. № 12. С. 89–102.
14. Gidasov V.Y., Pirumov U.G., Ivanov I.E. “Numerical simulation of reacting flows for propulsion systems,” Physics of Shock Waves, Combustion, Detonation and Non-Equilibrium Processes. Soloukhin Memorial. 12–17 November, 2005. P. 192–194.
15. Астраханцева Е.В., Гидаспов В.Ю., Пирумов У.Г., Ревизников Д.Л. Численное моделирование гемодинамических процессов в артериальном дереве. Исследование влияния пересечения сосуда на параметры течения // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 8. С. 25–36.

Численное моделирование солитонных решений нелинейных уравнений

Numerical simulation of soliton solutions of nonlinear equations

Попов С. П.

ВЦ РАН, Москва, Россия; spropov@yandex.ru

Среди нелинейных уравнений повышенное внимание привлекают уравнения, имеющие в качестве решений солитоны — уединенные волны, восстанавливающие после взаимодействий свои формы. Солитоносодержащие уравнения являются модельными для описания различных физических процессов. Это распространение гравитационных волн в мелкой воде и стратифицированных жидких пленках; генерация нелинейных звуковых волн в замагниченной плазме и упругих средах; формирование световых лучей в оптических волокнах и т.д. По форме солитоносодержащие уравнения различны: от одномерных дискретных уравнений до двумерных интегро-дифференциальных в частных производных. Это предопределяет большое разнообразие численных подходов для их решения. В данной работе обсуждаются воз-

возможности схем, использующих метод Рунге–Кутты и спектральный метод Фурье. В качестве примера рассматриваются уравнения Камаса–Холма, $\sin$ -Гордона и двумерный аналог дискретного уравнения Кортевега–де Вриза:

$$u_t - u_{xxt} = -2ku_x - (b+1)uu_x + bu_xu_{xx} + uu_{xxx},$$

$$d^2u/dt^2 = d^2u/dx^2 - a^2 \sin(u),$$

$$\dot{a}_{i,j} = a_{i,j}(a_{i+1,j} - a_{i-1,j} + a_{i,j+1} - a_{i,j-1}).$$

Обсуждаются численные решения задач с начальными условиями, приводящими к генерации солитонов различных типов — пиконов, к-солитонов, к-каспонов, бризеров, воблеров, кинков и предельных солитонов.

Пространственные структуры и волны для уравнений реакции–нелинейной диффузии

Spatial structures and waves for reaction–nonlinear diffusion equations

Разжевайкин В. Н.

ВЦ РАН, Москва, Россия; razzh@mail.ru

Модель распространения генных волн, получившая подробное математическое описание в известной работе А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова (1937), положившей основу теории уравнений реакции–диффузии, потребовала некоторых уточнений, сводящихся к необходимости учета зависимости коэффициента диффузии от зависимой переменной. Такая же потребность возникает и в ряде других задач в области математического моделирования динамики распределенных систем. Рассматривалось уравнение вида

$$u_t = D(u)\nabla_x(N(u)\nabla_x u) + F(u). \quad (1)$$

Здесь $u = u(t, x)$ — фазовая (т.е. зависимая) переменная, характеризующая пространственное распределение изучаемой величины в точке

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ в момент времени t . Коэффициенты диффузии отграничены от нуля: $N(u) > N_0 > 0$, $D(u) > D_0 > 0$. Все функции, входящие в (1), равно как и граница области $\partial\Omega$, считаются достаточно гладкими.

Оказывается, что многие известные результаты, установленные для случая постоянной диффузии $D(u) \equiv N(u) \equiv 1$, могут быть с незначительными изменениями распространены на случай уравнения (1). Вот некоторые из них (устойчивость здесь можно понимать в норме $C(\Omega)$).

1) Если пространственная область $x \in \Omega$ ограничена и выпукла, то при краевых условиях непроницаемости никакое стационарное решение уравнения (1), отличное от постоянного, не является устойчивым.

2) То же верно для одномерной области $\Omega = \mathbb{R}$ при дополнительном условии отсутствия стоячих волн $J(1) \neq 0$, где

$$J(U) = \int_0^U \frac{F(u)N(u)}{D(u)} du.$$

3) Постоянное распределение $\tilde{u}(x) \equiv U$, где U — доминирующее (т.е. доставляющее максимум для $J(u)$) положение равновесия (так что $F(U) = 0$) уравнения (1) на инвариантном отрезке $[a, b]$ (так что $F(a) \geq 0$, $F(b) \leq 0$), является «почти» аттрактором на этом отрезке. Это означает, что если некоторая его окрестность $O(U) \subset [a, b]$ не содержит других его положений равновесия, то для любого отрезка $[A, B] \subset O(U)$, $A < U < B$, найдется такая ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, что решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальным распределением $u_0(x) \in [a, b]$ и $u_0(x) \in [A, B]$ для $x \in \tilde{\Omega}$, стабилизируется (т.е. сходится равномерно на каждом компакте) к U .

4) На одномерном отрезке ($n = 1$) в грубом случае наблюдается чередование устойчивых и неустойчивых унимодальных стационарных решений однородной задачи Дирихле, причем имеющее максимальную амплитуду оказывается устойчивым.

5) При $n = 1$ условия существования волновых решений вида $u(x + ct)$ могут быть сформулированы в терминах свойств функции $J(u)$, так что, например, знак скорости волны $0 \rightarrow 1$ совпадает со знаком $J(1)$.

6) В строго колмогоровском случае (т.е. при $F(u) > 0$ при всех $u \in (0, 1)$) волновое решение существует для любых $c \geq c^*$, где $c^* \in$

$$[c_m, c_M], c_m = 2\sqrt{N(0)D(0)F_U(0)}, c_M = 2\sqrt{D_M\gamma},$$

$$\gamma = \sup_{U \in (0,1)} \frac{N(U)F(U)}{U}.$$

7) В триггерном случае ($F'(0) < 0$) существует не более одного значения для скорости волны.

8) Альтернативой существованию волны в триггерном случае является существование единственной правильной цепочки волн с невозрастающими значениями скорости.

9) В нестроого колмогоровском случае (т.е. при $F(u) > 0$ при некоторых $u \in (0, \varepsilon)$) диапазон возможных значений скорости исходящей из $u = 0$ волны сужается вплоть до его исчезновения по мере увеличения размаха волны. На ее хвосте правильная цепочка волн.

10) Начальные монотонно возрастающие распределения стабилизируются по форме (т.е. на фазовой плоскости самой переменной и ее пространственной производной) к правильной цепочке волн как в триггерном, так и в строго колмогоровском случае при асимптотике на $x \rightarrow -\infty$, $u \rightarrow 0$, соответствующей волне, распространяющейся с минимальной скоростью $c = c^*$. Более пологая асимптотика на бесконечности приводит к возможности стабилизации (в некотором ослабленном смысле) к волне, имеющей неминимальную скорость.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-07-00398).

Использование точных методов в описательных науках (на эколого-биологических примерах)

Using of exact methods in description sciences (on ecological-biological examples)

Саранча Д. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; Saran@ccas.ru

«В наше время задача «информатизации» описательных наук...

внедрения методов информатики в описательные науки является одной из важнейших, может быть, самой важной проблемой близкого будущего» [1, стр. 28]. Экология является одной из первых успешных областей применения точных методов.

В данной работе решалась задача по разработке методов использования ЭВМ в качестве инструмента интеллектуальной поддержки в междисциплинарном процессе *создания и анализа математических моделей* сложных иерархических систем *при неполных, разноплановых и неизбежно искаженных данных* о свойствах изучаемого объекта и их применения для создания комплекса взаимосвязанных моделей тундровых популяций и сообществ.

Адаптация методов системной динамики Дж. Форрестера позволила использовать практически всю биологическую информацию, но при этом создало ряд новых проблем. Главные — «угроза необозримости» и ограничения численными расчетами.

Основной тезис. Большая имитационная модель, где каждый блок проверен, выверен со специалистами, не гарантирует правильной работы модели. Такая модель не может быть самодостаточной — это *полуфабрикат*, инструмент по переработке исходной биологической (и не только) информации, *инструмент по предварительному исследованию* объекта. Для ее эффективного использования она должна быть компонентом набора взаимосвязанных моделей, состоящих из детальных имитационных моделей и сопряженных с ними упрощенных моделей. Упрощенные модели имеют небольшое количество переменных, допускают проведение подробного портретного исследования, позволяют выдвинуть гипотезы о ведущих механизмах изучаемого явления, а также настраивать исходную модель на соответствующие режимы.

Указанные аспекты привели к формулированию методики комплексных исследований (КОИС). Такие исследования включают в себя всю последовательность операций. Сбор, отбор, анализ и переработка исходной (биологической) информации. Обоснование выбора объекта, переменных и уравнений для его описания; выбор явления для раскрытия свойств объекта («тестирующего явления»); обоснование и построение детальных имитационных моделей; анализ их свойств. Формирование имитационной системы — набора моделей разной степени детализации; и формулирование на их основе гипотез о ведущих механизмах исследуемого явления.

По методике КОИС была создана имитационная модель сообщества «растительность–лемминги–песцы» [2], а также модель популяции леммингов с учетом возрастной структуры [2]. Анализ результатов вычислительных экспериментов с обеими взаимодополняющими моделями привел к обоснованию упрощенной модели в виде одномерного разностного уравнения, связывающего численности леммингов в двух соседних годах [2–4]. Это позволило сформулировать гипотезу: ведущее значение в формировании колебаний численности тундровых животных имеют *два безразмерных показателя* — относительная скорость прироста биомассы популяции леммингов и доля выживших леммингов в наиболее неблагоприятных условиях.

В процессе моделирования тундровых популяций и сообществ был предложен особый класс моделей, учитывающих сезонность [4], а также тип дискретных отображений, для которых при определенном сценарии изменения параметров, длина периода меняется в последовательности натурального ряда [3]. Наличие предыдущего опыта моделирования позволило перейти на другой уровень описания — использование индивидуально-ориентированных моделей [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А. А.* Информатика: предмет и задачи // Кибернетика. Становление информатики. М.: Наука. 1986. С. 22–28.
2. *Саранча Д. А.* Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. М.: МФТИ, 1997.
3. *Недоступов Э. В., Саранча Д. А., Чигерев Е. Н., Юрезанская Ю. С.* О некоторых свойствах одномерных унимодальных отображений // Доклады Академии наук. 2010. Т 430. № 1. С. 1–6.
4. *Глушков В. Н., Недоступов Э. В., Саранча Д. А., Юферева И. В.* Компьютерные методы анализа математических моделей экологических систем. М.: ВЦ РАН, 2006.

От первых научных космических экспериментов
до нанодиагностики
природных и космических сред

From pioneer science cosmic experiments
to nanodiagnostics of natural and space media

Сушкевич Т. А.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия; tamaras@keldysh.ru

Посвящается 100-летию юбилею **академика Анатолия Алексеевича Дородницына** (02.12.1910–07.06.1994), который столь же значим, как и другие эпохальные юбилеи, близкие по времени: 100-летний юбилей Главного Теоретика космонавтики академика М. В. Келдыша (10.02.1911–24.06.1978) и 35-летие Экспериментальной программы “Аполлон–Союз” (ЭПАС, август 1975 г.), а также 50-летие ПЕРВОГО полета человека в космос, который совершил 12 апреля 1961 года ПЕРВЫЙ космонавт планеты Ю. А. Гагарин (09.03.1934–27.03.1968), и 75-летие Г. С. Титова (11.09.1935–20.09.2000) — ВТОРОГО в мире космонавта, одного из ПЕРВЫХ организаторов и руководителей ракетно-космических войск. Ведь Анатолий Алексеевич явился одним из создателей теоретического фундамента реактивной авиации и ракетной техники — аэродинамики больших скоростей и стал участником этих событий.

В 2007 году прогрессивное научное сообщество отметило три эпохальных юбилея, которые разделяют ровно 50 лет:

- 150 лет со дня рождения Э.К. Циолковского (05.09.1857–19.09.1935),
- 100 лет со дня рождения С.П. Королева (12.01.1907–14.01.1966),
- 50 лет запуска первого искусственного спутника Земли (04.10.1957).

Двадцатый век в истории земной цивилизации — это век научно-технической революции (НТР), связанной с тремя открытиями:

- проникновение в тайны и овладение ядерной энергией,
- покорение космического пространства и выход человека в космос,
- изобретение электронно-вычислительных машин (ЭВМ) и создание информационных технологий.

Компьютер явился главным действующим лицом, основным двигателем НТР: использование ядерной энергии, полет в космос, инфор-

мационные технологии, естественно, были бы невозможны без ЭВМ. Два эпохальных научных проекта — атомный и космический — способствовали колоссальному развитию советской науки, которая могла конкурировать с мировой наукой XX века. Впервые для реализации инженерно-конструкторских проектов потребовалось решение больших задач на ЭВМ и были заложены основы новой технологии, которую позже называли “математическое моделирование” или “computer science”. Велики заслуги Анатолия Алексеевича в развитии “computer science” широкого профиля в Вычислительном центре, который он основал в 1955 г. и возглавил.

Для решения стратегической задачи создания ракетно-ядерного щита в 1953 г. организуется Институт Келдыша, в который Анатолий Алексеевич перешел из Математического института им. В. А. Стеклова (работал в Отделении, которым руководил М. В. Келдыш). Значительная часть жизни А. А. Дородницына связана с ЦАГИ, но в ЦАГИ работал и М. В. Келдыш. Их пути пересекались часто.

О космических исследованиях заговорили в 1955 г. *М. В. Келдыш — идеолог и организатор космических исследований*. По его указанию летом 1955 г. из Академии наук СССР разослали письма ученым разных специальностей с одним вопросом: **“Как можно использовать космос?”** Мнений и предложений было много и разных. Для убеждения руководителей СССР в необходимости освоения космического пространства и запусков космических спутников и кораблей М. В. Келдыш выделил **две главные задачи: разведка и наблюдения Земли**, вокруг которых сформировались многие научно-исследовательские проекты. Стратегической была разработка системы упреждения стартов ракет из космоса. В ноябре 1955 г. из АН СССР в ЦК КПСС и Совет Министров было направлено письмо с Программой космических исследований. В январе 1956 г. была организована Специальная комиссия по объекту “Д”, которую возглавил М. В. Келдыш; С. П. Королев и М. К. Тихонравов — его заместители.

Наша работа ориентирована на приложения в аэрокосмических системах наблюдений и дистанционного зондирования теории переноса излучения в диапазоне спектров солнечного и собственного излучения от жесткого ультрафиолета до миллиметровых волн. Особое внимание уделяется современным проблемам информационно-математического обеспечения нанодиагностики природных и техногенных сред, опасных явлений и объектов на основе аэрокосмического гиперспектраль-

ного дистанционного зондирования. Традиционно разрабатываемые нами программные системы автоматизированного расчета реализуются на самых мощных и высокопроизводительных компьютерах. Проблемами организации супервычислений коллектив занимается с 1989 г.

В частности, нас интересует задача мониторинга и дистанционной нанодиагностики загрязнений атмосферы и поверхности Земли, источником которых являются извержения вулканов, пожары, военные действия и другие природные и техногенные катастрофы. Мы располагаем фундаментальной методической базой [1, 2] для решения подобных задач, поскольку этими проблемами начали заниматься еще в 60-ые гг. XX-го в. и занимаем лидирующие позиции. Автор обеспечивал моделирование при проведении первых в мире научных экспериментов с космических пилотируемых кораблей [3, 4] и при выполнении программы “Союз–Аполлон”, в которых из космоса были ВПЕРВЫЕ обнаружены стратосферные аэрозольные слои, возникшие в результате извержения вулкана, а также мощных пожаров и военных действий. Актуальные проблемы и сейчас. Стоит задача оценивания информационного содержания гиперспектральных аэрокосмических измерений и заполнения существующего пробела в понимании реальных особенностей формирования спектральных образов наблюдаемых объектов и процессов для нанодиагностики их состояния.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00071 и № 08-01-00024) и ПФИ № 3 ОМН РАН (проект № 3.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Иолтуховский А. А.* Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990.
2. *Сушкевич Т. А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
3. *Сушкевич Т. А.* О пионерских работах по математическому моделированию радиационного поля Земли при освоении космоса // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. Физические основы, методы и технологии мониторинга окружающей среды, потенциально опасных явлений и объектов. ИКИ РАН. Сборник научных статей. Выпуск 5. Том 1. М.: ООО “Азбука-2000”, 2008. С. 165–180.
4. *Сушкевич Т. А.* К истории первого научного эксперимента по дистанционному зондированию Земли на пилотируемом космическом корабле // Там же. С. 315–322.

**Моделирование влияния экономической
деятельности человечества на глобальные
биосферные процессы**

**Modelling the impact of economic activities of
mankind on the global biosphere processes**

Тарко А. М.¹, Усатюк В. В.²

¹*ВЦ РАН, Москва, Россия; tarko@himki.net*

²*СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
usatyuk@mail15.com*

Академик Анатолий Алексеевич Дородницын любил и ценил природу, хорошо разбирался в проблемах экологии. Он много лет был председателем Российского национального комитета СКОПЕ (Научный комитет по проблемам окружающей среды) со штаб-квартирой в Париже. Он участвовал в руководстве проекта СКОПЕ “Последствия ядерной войны для окружающей среды”, которому мир обязан поддержкой в решении задачи о ядерной зиме. А.А. Дородницын интересовался проблемами биосферы и моделированием глобального биогеохимического цикла углерода, проводимым, в частности, в СКОПЕ в рамках проекта “Моделирование цикла углерода” и также автором данной работы. В докладе обсуждается математическое моделирование глобального биогеохимического цикла углерода, важнейшего из процессов биосферы, и роль биосферы в компенсации результатов влияния антропогенных выбросов CO_2 в атмосферу на глобальный климат. Представлены две пространственные модели глобального биогеохимического цикла углерода в системе атмосфера–экосистемы суши–океан. В основе моделей лежат системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В первой модели [1, 2] территория суши разделена на ячейки размером 0.5×0.5 град. географической сетки, во второй размер ячеек 4×5 град. Модели описывают процессы роста и отмирания растительности, накопления и разложения гумуса в терминах обмена углеродом между атмосферой, растениями и гумусом почвы в каждой ячейке суши. Единица времени в первой модели — 1 год, единица времени второй модели — 10 суток. Климат в каждой ячейке первой модели характеризуется среднегодовой температурой

воздуха у поверхности земли и количеством осадков за год, рассчитанным с помощью модели климата ВЦ РАН [3]. Во второй модели климат характеризуется большим числом параметров, в частности, трехмерным вектором скорости движения воздуха [3].

В первой модели моделировалась динамика биосферы с 1860 г. по 2100 г. Согласно базовому сценарию, антропогенное поступление CO_2 в атмосферу начинается в 1860 г. в результате промышленных выбросов CO_2 от сжигания ископаемых топлив (каменный уголь, нефть, газ), вырубки лесов и эрозии почв. К 2100 г. следует ожидать роста концентрации углекислого газа в атмосфере Земли в среднем в 2.2 раза и средней температуры атмосферы на 2.7°C по сравнению с их значениями в 1860 г. В 2008 г. наибольшие промышленные выбросы были зафиксированы с территории Китая, США, России, Индии и Японии. Больше всех стран поглотила CO_2 Россия, за ней идут Канада, Бразилия и Австралия. Обсуждается выполнение Киотского протокола (1997 г.) к Рамочной конвенции ООН об изменении климата (1992 г.). Расчеты показывают, что эффект выполнения Киотского протокола даст не очень сильное ограничение роста CO_2 . Однако значение ограничения важно для преобразования экономики и увеличения эффективности расходования энергетических ресурсов в развитых странах. Расчеты с учетом девяти активно развивающихся стран показывают, что к середине этого века торможение потепления сменится на его рост, больший, чем дает базовый сценарий. Еще более быстрый рост выбросов CO_2 дадут все страны, не являющиеся развитыми. В этом случае единственным выходом будет безвозмездная передача в эти страны технологий эффективного сжигания топлив.

Во второй модели вычислительные эксперименты качественно и количественно подтвердили, что в процессе фотосинтеза растения суши формируют разный на разных широтах сезонный ход кривых CO_2 в атмосфере. Благодаря фотосинтезу экосистем суши происходит уменьшение концентрации CO_2 летом в обоих полушариях, причем максимально это наблюдается в высоких и средних широтах Северного полушария. Также происходит эффект “затягивания” CO_2 на сотни километров из соседних широт.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00607).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарко А. М. Антропогенные изменения глобальных биосферных процессов. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2005.
2. Тарко А. М. Математическая модель глобального цикла углерода в биосфере // Журнал общей биологии. 2010. Т. 71. № 1. С. 97–109.
3. Пархоменко В. П. Верификация климатической модели. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

Система уравнений движения воздуха с фазовыми переходами воды

The dynamics of air equations with water phase transitions

Фужита Яшима Х.^{1,2}

¹ *Université 08 Mai 1945, Guelma, Algérie;*

hisao.fujitayashima@univ-guelma.dz

² *Università di Torino, Torino, Italia;*

hisao.fujitayashima@unito.it

Адекватность описания физических процессов в атмосфере (см. [1]) требует учета фазовых переходов воды. В предлагаемой модели динамики атмосферы искомыми функциями являются скорость воздуха $v(x, t)$, температура $T(x, t)$, а также следующие плотности: $\varrho(x, t)$ — сухого воздуха, $\pi(x, t)$ — водяного пара, $\sigma(m, x, t)$ — воды, $\nu(x, t)$ — кристаллов льда, где m — масса капли или льдинки; при этом давление $p(x, t)$, скорости капель $u(x, t)$ и льдинок $w(x, t)$ определяются соотношениями

$$p = R_0(\mu_a^{-1} \varrho + \mu_h^{-1} \pi)T,$$

$$u(m, x, t) = v(x, t) - \alpha_l(m)^{-1} \nabla \Phi(x),$$

$$w(m, x, t) = v(x, t) - \alpha_s(m)^{-1} \nabla \Phi(x),$$

где R_0 — газовая постоянная, μ_a — средняя молекулярная масса сухого воздуха, μ_h — молекулярная масса воды, $\Phi(x)$ — потенциал силы,

$\alpha_l(m)$ и $\alpha_s(m)$ — коэффициенты трения между воздухом и каплей массы m или льдинкой массы m соответственно.

Предлагаемая система состоит из следующих уравнений:

$$(\varrho + \pi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) = \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - R_0 \nabla \left(\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \right) - \left[\int_0^\infty (\sigma(m) + \nu(m)) dm + \varrho + \pi \right] \nabla \Phi, \quad (1)$$

$$(\varrho + \pi) c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \varkappa \Delta T - R_0 \left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \nabla \cdot \vec{v} + \eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + L_{gl} H_{gl} + L_{ls} H_{ls} + L_{gs} H_{gs} + E, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi v) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma(\cdot)) - H_{gs}(T, \pi, \nu(\cdot)), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma u) + \frac{\partial (m h_{gl} \sigma)}{\partial m} &= [h_{gl} - K_{ls}(T, m)] \sigma + K_{sl}(T, m) \nu + \\ &+ g_0(m) [N^* - \tilde{N}(\sigma, \nu)]^+ [\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^+ - g_1(m) [\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^- \sigma + \\ &+ B_l(\sigma; m) + Z_l(\sigma, \nu; m), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} + \nabla \cdot (\nu w) + \frac{\partial (m h_{gs} \nu)}{\partial m} &= [h_{gs} - K_{sl}(T, m)] \nu + \\ &+ K_{ls}(T, m) \sigma - g_2(m) [\pi - \bar{\pi}_{s,2}(T)]^- \nu + B_s(\nu; m) + Z_s(\sigma, \nu; m), \end{aligned} \quad (6)$$

где H_{gl} , H_{ls} , H_{gs} — величины конденсации, отвердевания и сублимации, L_{gl} , L_{ls} , L_{gs} — скрытое тепло, E — плотность источников тепла, h_{gl} , h_{gs} — величины конденсации и сублимации на капле и кристалле массы m , $\bar{\pi}_{s,1}(T)$, $\bar{\pi}_{s,2}(T)$ — плотности насыщенного пара, $K_{ls}(T, m)$, $K_{sl}(T, m)$ — коэффициенты отвердевания и плавления, $B_l(\sigma; m)$, $B_s(\sigma; m)$, $Z_l(\sigma, \nu; m)$, $Z_s(\sigma, \nu; m)$ — действия процессов коагуляции, $g_0(m) [N^* - \tilde{N}(\sigma, \nu)]^+ [\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^+$, $g_1(m) [\pi - \bar{\pi}_{s,1}(T)]^-$, $g_2(m) [\pi -$

$-\bar{\pi}_{s,2}(T)]^-$ — вероятности появления капель и исчезновения капель и кристаллов соответственно.

Доказываются существование и единственность локального решения для модифицированной системы уравнений (1)–(6) (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев Л. Т.* Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1965.
2. *Belhiche H., Aissaoui Z.M., Fujita Yashima H.* “Equations monodimensionnelles du mouvement de l’air avec la transition de phase de l’eau,” *Quaderno Dip. Mat. Univ. Torino*, No. 12, (2010).

Информационное сжатие математической модели на примере взаимодействия популяций

Information compression of mathematical model on the example of the interaction of populations

Яковенко Г. Н.

МФТИ, Долгопрудный, Россия; yakovenko_g@mtu-net.ru

Обсуждаются математические модели взаимодействия популяций. Модели строятся на основе обыкновенных дифференциальных уравнений [1–4]. В настоящей работе в традиционные модели вносятся два уточнения. Во-первых, в модели учитывается робастная неопределенность, которую свойственно вносить природе во взаимодействие экологических субъектов: перепады температуры и давления, дуновения ветра, сезонные изменения и т.д. Эта неопределенность учтена вхождением в уравнения достаточно произвольных функций $u_k(t)$ времени t . Во-вторых, устраняется субъективизм, который вносит в модель конкретный выбор переменных состояния, и следующие из этого выбора рассуждения о линейности-нелинейности. На основе групп и алгебр Ли строятся модели, инвариантные к выбору переменных состояния, т.е. модель не изменяется при любой, в том числе и нелинейной, неособенной замене переменных [5, 6].

Для рассмотренных моделей изучаются также симметрии по состоянию [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00228) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)” (проект № 2.1.1/3604).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разжевайкин В. Н.* Анализ моделей динамики популяций. М.: МФТИ, 2010.
2. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
3. *Яковенко Г. Н.* Теоретико-групповой анализ динамики взаимодействующих популяций // Электронный журнал “Исследовано в России”. 88, 2003. С. 981–990. (<http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/088.pdf>)
4. *Яковенко Г. Н.* Взаимодействие двух популяций: теоретико-групповые модели // Сборник научных трудов Международной научной конференции “Математика. Компьютер. Образование”. Т. 13. Вып. 2. Под. ред. Г.Ю. Ризниченко. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006. С. 133–140.
5. *Яковенко Г. Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. 2002. № 3. С. 40–83. (<http://www.neva.ru/journal>)
6. *Яковенко Г. Н.* Теория управления регулярными системами. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
7. *Яковенко Г. Н.* Симметрии математических моделей взаимодействующих популяций // Симметрии: теоретический и методический аспекты. Сборник научных трудов III международного симпозиума. Астрахань, 2009. С.122–126.

Информатика и математическое моделирование в экономике

Computer science and mathematical modelling in economics

Инструментальная система распределенного имитационного моделирования

Instrumental system for distributed simulation

Бродский Ю. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; brodsky@ccas.ru

Предлагаемая инструментальная система, во-первых, помогает построить синтез сложной многокомпонентной модели, что само по себе обычно является нетривиальной задачей, и, во-вторых, позволяет создать в Интернете пиринговую сеть моделирования, в которой, с одной стороны, каждый участник сети может предоставлять во всеобщий доступ (опубликовать) разработанные им методы, а с другой стороны, может использовать в разрабатываемых им моделях подходящие методы, разработанные другими участниками и опубликованные ими в Интернете. В основе инструментальной системы лежит описанная в [1] концепция анализа и синтеза сложных систем, ориентированная на параллельное выполнение методов, одновременно протекающих в модельном времени.

Основой сети распределенного моделирования является программное обеспечение пиринговой рабочей станции, оно состоит из клиентской и серверной частей. Клиентская часть ответственна за создание моделей. Она содержит средства, позволяющие по описаниям на

специальном непроцедурном языке описания комплексов и компонент (ЯОКК [2, 3]) методов, событий, компонент и комплексов строить информационную структуру модели, в первую очередь ее базу данных, а также средства поддержки выполнения модели и наблюдения за результатами моделирования. При этом методы, обеспечивающие функциональность модели могут быть как локальными, так и удаленными. Серверная часть пирингового клиента предоставляет в первую очередь сервис удаленных вызовов, опубликованных на этом хосте методов, а также сервис просмотра каталога и описаний этих методов.

Основой формализации модели является понятие *компоненты*. Компонента имеет внутренние и внешние характеристики. Деятельность компоненты осуществляют один или более параллельно протекающих *процессов*. Процесс состоит в чередовании конечного числа заранее известных *элементов* — элементарных с алгоритмической точки зрения методов. Чередование элементов определяется наступлением *событий*. Событие — метод, прогнозирующий интервал времени до наступления соответствующего системного события, заключающегося в смене элементов процесса. Если этот интервал равен нулю — считается что событие наступило, и происходит соответствующая ему смена элементов процесса.

Компоненты могут объединяться в *комплекс*, при этом (необязательно) может оказаться, что некоторые компоненты явно моделируют внешние переменные некоторых других компонент. Определенный таким образом комплекс, после описанной в [1] операции объединения его компонент с исключением из этого объединения явно моделируемых внешних переменных, сам становится компонентой, т.е. начинает удовлетворять формальному определению таковой. Этот факт позволяет строить модель как фрактальную конструкцию, сложность которой (и соответственно подробность моделирования) ограничивается лишь желанием разработчика.

Предметом распределения вычислений в этой модели являются методы и события. Каждый из них может находиться на отдельном компьютере в сети при наличии соответствующего сервиса, обеспечиваемого рабочей станцией распределенного моделирования. Инструментальная система спроектирована так, что все методы одного шага моделирования вызываются асинхронно.

Более подробно с проектом можно познакомиться в Интернете по адресу: <http://simul.ccas.ru/Distr>.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00176-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бродский Ю. И.* Некоторые вопросы синтеза сложных распределенных имитационных моделей // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов М.: ВЦ РАН. 2010. С. 25–40.
2. *Бродский Ю. И.* Описание, компоновка и работа модели в инструментальной системе распределенного моделирования // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов М.: ВЦ РАН. 2008. С. 24–46.
3. *Бродский Ю. И., Павловский Ю. Н.* Разработка инструментальной системы распределенного имитационного моделирования // Информационные технологии и вычислительные системы. 2009. № 4. С. 3–15. (<http://simul.ccas.ru/articles>)

Колебания в нечетных конкурентных системах Oscillation in the odd competitive systems

Бродский Ю. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; brodsky@ccas.ru

Цель работы — расширить арсенал элементарных моделей, пригодных для исследования колебательных процессов, являющихся суперпозицией нескольких циклов различной периодичности.

В этой связи предлагается рассмотреть специальный вид уравнений конкуренции нечетной размерности. Несмотря на высокую популярность уравнений конкуренции со времен А. Лотки и В. Вольтерра и множество публикаций по этой теме, предлагаемый вид уравнений конкуренции, по-видимому, ранее не исследовался.

Будем рассматривать n -мерную систему уравнений конкуренции

(n — нечетно, $n > 1$):

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^n m_{i,j} \frac{x_j}{x_j^*} \right), \quad m_{k,k} = 1. \quad (1)$$

Здесь α_i — коэффициент прироста i -й популяции, x_i^* — емкость среды для нее, т. е. предельная численность популяции, которая установилась бы в данной модели, если бы других популяций в ней не было. Матрица $\|m_{i,j}\|_{i,j=1}^n$ — матрица конкуренции. Ее компоненты $m_{i,j}$ — коэффициенты нетерпимости (см. [1]), их смысл в предметной области модели — сравнение межпопуляционной конкуренции с внутрипопуляционной. Так $m_{i,j}$ показывает, во сколько раз конкуренция популяции j с популяцией i сильнее ($m_{i,j} > 1 - j$ нетерпима к i), или наоборот, слабее ($m_{i,j} < 1 - j$ толерантна к i), чем конкуренция внутри самой популяции j . Поскольку конкуренция внутри популяций выступает здесь в качестве эталона измерения, все диагональные элементы матрицы конкуренции единичны.

Теорема 1. (см. [2]) Пусть $d > 0$, $\alpha_i = \alpha > 0$ и матрица конкуренции имеет следующий вид:

$$m_{i,j} = d_{i,j} = \begin{cases} 1 - (-1)^{j-i}d, & i < j; \\ 1, & i = j; \\ 1 + (-1)^{i-j}d, & i > j. \end{cases}$$

Тогда точка

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1^*}{n}, \dots, \frac{x_n^*}{n} \right), \quad (2)$$

лежащая в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости

$$1 - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_j^*} = 0, \quad (3)$$

есть стационарная точка системы (1), и в малой окрестности этой точки любое решение системы (1) экспоненциально стремится к гиперплоскости (3), а в указанной гиперплоскости является линейной комбинацией $(n-1)/2$ гармонических колебаний около точки (2) с частотами

$$\frac{\alpha d}{n} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi k}{n} \right), \quad 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}.$$

В качестве любопытного «побочного» результата исследования получено следующее тождество:

$$\prod_{k=1}^n \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi k}{2n+1}\right) = 2n+1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00420-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бродский Ю. И.* Толерантность и нетерпимость с точки зрения системной динамики и исследования операций. М.: ВЦ РАН, 2008.
2. *Бродский Ю. И.* Колебания в многомерных нечетных конкурентных системах // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов М.: ВЦ РАН, 2010. С. 7–24.
(<http://simul.ccas.ru/articles>)

Регуляризованный экстраградиентный метод решения многокритериальной задачи равновесного программирования

Regularized extragradient method for solving a parametric multicriteria equilibrium programming problem

Васильев Ф. П.¹, Антипин А. С.², Артемьева Л. А.³

¹ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;

² ВЦ РАН, Москва, Россия; asantip@yandex.ru

³ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;
artemieva.Luda@gmail.com

Работа посвящена разработке и исследованию методов решения многокритериальной задачи равновесного программирования. В задаче требуется найти точку $u_* = (w_*, \lambda_*, p_*) \in \Omega = W_0 \times E_+^{m_2} \times E_+^{m_3}$,

удовлетворяющую следующим условиям:

$$w_* \in \text{Arg min} \{ \langle \lambda_*, f(w) \rangle_{E^{m_2}} \mid g(w) \leq T_2 p_*, w \in W_0 \},$$

$$\langle \lambda - \lambda_*, f(w_*) - T_1 \lambda_* \rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in E_+^{m_2},$$

$$\langle p - p_*, g(w_*) - T_2 p_* \rangle \leq 0 \quad \forall p \in E_+^{m_3},$$

где W_0 — заданное выпуклое замкнутое множество из евклидова пространства E^{m_1} , $f(w) = (f^1(w), f^2(w), \dots, f^{m_2}(w))^\top$, $g(w) = (g^1(w), g^2(w), \dots, g^{m_3}(w))^\top$ — непрерывно дифференцируемые функции на W_0 ($\top$ — знак транспонирования), переменные $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{m_2})^\top \in E^{m_2}$, $p = (p^1, p^2, \dots, p^{m_3})^\top \in E^{m_3}$ — множители Лагранжа, T_1, T_2 — квадратные матрицы порядка m_2, m_3 соответственно, $\langle a, b \rangle_{E^m} = \sum_{i=1}^m a^i b^i$ — скалярное произведение в E^m , $|a| = (\sum_{i=1}^m (a^i)^2)^{\frac{1}{2}}$ — норма в E^m , $E_+^m = \{a = (a^1, \dots, a^m)^\top : a^1 \geq 0, \dots, a^m \geq 0\}$, $\text{Arg min} \{h(z) \mid z \in Z\}$ — множество точек минимума функции $h(z)$ на множестве Z .

Такие задачи имеют широкую сферу применения [1–3] и возникают при исследовании моделей экономического равновесия, моделей согласования дефицита ресурсов, моделей автоматизации проектирования. Матрицы T_1, T_2 в задаче играют роль параметров [1–3], и, выбирая их различным образом, мы получим, в частности, задачу математического программирования, задачу равновесного многокритериального программирования по Парето, задачу минимизации с равновесным выбором допустимого множества.

На практике входные данные, как правило, задаются с погрешностью. В этих условиях с помощью методов, разработанных для решения исходной задачи с точными входными данными, не всегда можно получить удовлетворительные приближения для решения этой задачи даже при сколь угодно малых погрешностях в задании входных данных, так как исходная задача может оказаться неустойчивой. Поэтому для решения исходной задачи нужно привлекать идеи и методы регуляризации [3]. В работе предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода решения многокритериальной задачи равновесного программирования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-00388).

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А. С. Многокритериальное равновесное программирование: экстрапроксимальные методы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 12. С. 1988–2013.
2. Антипин А. С., Артемьева Л. А., Васильев Ф. П. Многокритериальное равновесное программирование: экстраградиентный метод // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 234–241.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

О комбинаторной теории переобучения On combinatorial theory of overfitting

Воронцов К. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; vokov@forecsys.ru

Получение точных оценок обобщающей способности остается открытой проблемой в теории статистического обучения, начиная с работ В. Н. Вапника и А. Я. Червоненкиса, выполненных около 40 лет назад [1]. Многие известные оценки служат обоснованием известного эмпирического факта, что выбор алгоритма из заданного семейства по критерию минимума частоты ошибок на обучающей выборке может приводить к *переобучению*, т. е. к существенно более высокой частоте ошибок на контрольной выборке, неизвестной в момент обучения. Как правило, переобучение тем сильнее, чем сложнее семейство алгоритмов, т. е. чем больше в нем *различимых* алгоритмов (два алгоритма *неразличимы*, если они допускают ошибки на одних и тех же объектах обучающей и контрольной выборки). Проблема в том, что практически все известные оценки сильно завышены и лишь на качественном уровне описывают связь переобучения со сложностью семейства.

Комбинаторный подход [2–4] позволяет получать *точные* (не завышенные, не асимптотические) оценки за счет того, что вместо вероятностной меры на сложно устроенном множестве объектов вводится более простое (и единственное) вероятностное предположение о рав-

ной вероятности всех разбиений конечной выборки на обучающую и контрольную подвыборки. Эксперименты [3] и точные оценки для модельных семейств [4] показали, что переобучение зависит не только от числа различных алгоритмов, но и от степени их различности, точнее, от наличия у семейства свойств *расслоения* и *связности*. Семейства, состоящие из нескольких десятков алгоритмов и не обладающие одним из этих свойств, могут иметь очень высокую вероятность переобучения. В то же время, расслоенные и связанные семейства могут содержать миллиарды различных алгоритмов при незначительном переобучении.

В докладе обсуждаются последние результаты, полученные в рамках комбинаторного подхода и пути дальнейшего развития комбинаторной теории переобучения. Точные оценки получены для ряда модельных семейств алгоритмов, обладающих теми же ключевыми свойствами расслоения, связности и размерности, что и реальные семейства, применяемые для решения практических задач распознавания и прогнозирования. В частности, исследованы интервалы булева куба [4], многомерные монотонные и унимодальные сетки алгоритмов [П. Ботов], пучки монотонных цепочек алгоритмов [А. Фрей], хэмминговы шары [И. Толстихин]. П. Ботовым показано, что вероятность переобучения нейронных сетей, решающих деревья, байесовских классификаторов на реальных задачах классификации неплохо приближается вероятностью переобучения многомерной монотонной сетки алгоритмов при соответствующем подборе ее размерности.

В [4] показано, что и в общем случае учет расслоения и связности позволяет на порядки повысить точность классических оценок [1]. А. Кочедыков и И. Решетняк еще улучшили и обобщили эти результаты, сняв некоторые избыточные ограничения. А. Ивахненко получены комбинаторные оценки для реального семейства — множества конъюнкций элементарных пороговых предикатов над вещественными признаками. Это позволило разработать новый критерий отбора закономерностей в логических алгоритмах классификации.

Точная оценка полного скользящего контроля для метода ближайшего соседа, выраженная через *профиль компактности* выборки, позволила разработать эффективные процедуры отбора эталонных объектов [М. Иванов], а Ю. Янович показал, что профили компактности являются статистически устойчивыми характеристиками выборки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-07-00422) и программы ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ванник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.
2. *Vorontsov K. V.* Combinatorial probability and the tightness of generalization bounds // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, No. 2. Pp. 243–259.
3. *Vorontsov K. V.* Splitting and similarity phenomena in the sets of classifiers and their effect on the probability of overfitting // Pattern Recognition and Image Analysis. 2009. Vol. 19, No. 3. Pp. 412–420.
4. *Vorontsov K. V.* Exact combinatorial bounds on the probability of overfitting for empirical risk minimization // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. Vol. 20, No. 3. Pp. 269–285.

Автоматизация проектирования летательных аппаратов в ВЦ РАН

Automating the design of aircraft in CCAS

Вышинский Л. Л., Флеров Ю. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; wysh@ccas.ru, fler@ccas.ru

В докладе рассказывается о работах по автоматизации проектирования летательных аппаратов, которые проводились в Вычислительном центре, и роли в этих работах Анатолия Алексеевича Дородницына. Инициатором работ по САПР был Никита Николаевич Моисеев, который в начале семидесятых активно искал приложения для работ ВЦ в области исследования операций. На инициативу ВЦ откликнулся Павел Осипович Сухой, выдающийся авиаконструктор, один из основателей советской реактивной и сверхзвуковой авиации. Павел Осипович одним из первых среди генеральных конструкторов понял практическую необходимость автоматизации и информатиза-

ции проектирования. Основная мотивация необходимости этих работ, из уст самого П.О. Сухого, звучала так: «Ошибка Генерального стоит очень дорого, а потому надо иметь возможность проанализировать последствия основополагающих решений». Сухой обратился к А.А. Дородницыну и предложил Вычислительному центру начать совместную работу по созданию системы автоматизированного проектирования самолетов. А.А. Дородницын, работая в ЦАГИ, хорошо знал всех генеральных конструкторов авиационных КБ, и не удивительно, что он активно поддержал предложение Павла Осиповича Сухого. В результате в мае 1972 г. П.О. Сухим и А.А. Дородницыным был подписан совместный приказ о начале работ по автоматизации проектирования. Под эти работы была организована совместная лаборатория ВЦ и ОКБ, которая получила название «Теории и методов автоматизированного проектирования» (сокращенно — ТиМАП). По времени это совпало с началом проектирования Су-27. В дальнейшем Анатолий Алексеевич Дородницын уделял лаборатории ТиМАП самое пристальное внимание, вникал в ход работ, помогал в решении острых вопросов.

В докладе перечислены основные направления автоматизации проектирования или, как тогда говорили, подсистемы САПР, которые получили свое развитие в работах совместной лаборатории. Построение сложных внешних обводов Су-27 в тот период было одной из центральных практических проблем проектирования. Поэтому в работах ТиМАП много внимания уделялось теоретическим и практическим проблемам аппроксимации и интерполяции геометрических поверхностей. При создании в ТиМАП комплекса программ анализа характеристик летательных аппаратов нашли место традиционные для ВЦ работы по численным методам аэродинамических, газодинамических, прочностных расчетов. Во многих подсистемах САПР развивались и апробировались различные методы оптимизации. Впервые в авиационной отрасли было предложено использование методов многокритериальной оптимизации в оценке эффективности боевых самолетов. В рамках ТиМАП в конце семидесятых были начаты работы по системной организации программ, информационному и инструментальному обеспечению САПР.

Разработка первой очереди САПР проходила практически параллельно с проектированием СУ-27. Благодаря активной совместной работе Вычислительного центра с ОКБ Сухого уже к концу семидеся-

тых годов в ОКБ была создана комплексная система САПР, которая охватывала практически все сферы проектирования самолетов. В 1981 г. постановлением Совета Министров СССР коллективу разработчиков САПР в ОКБ Сухого была присуждена премия Совета Министров СССР «... за создание первой очереди системы автоматизированного проектирования сложных изделий машиностроения». Во главе списка лауреатов этой премии стоит фамилия А.А. Дородницына.

К сожалению, после смены генерального конструктора в 1982 г. совместная лаборатория фактически прекратила свое существование. САПР на предприятии изменил свое лицо. Предпочтение было отдано импортным программным продуктам, ориентированным, в основном, на исполнение чертежей. Однако многие программы анализа, которые создавались в рамках лаборатории ТиМАП, до сих пор работают на предприятии. В последнее время, спустя много лет, сотрудничество ВЦ с ОКБ Сухого возобновилось, правда, уже не в том объеме и не в том формате.

Алгоритмы параллельных вычислений для решения задач дискретной оптимизации

Parallel algorithms for discrete optimization problems

**Галимьянова Н. Н.¹, Игнатьев А. Л.¹, Коньшин И. Н.²,
Посыпкин М. А.³, Сигал И. Х.²**

¹*МИИТ, Москва, Россия;*

²*ВЦ РАН, Москва, Россия;*

³*ИСА РАН, Москва, Россия;*

isignal@ccas.ru

Решение задач дискретной оптимизации требует больших затрат вычислительных ресурсов, так как большинство этих задач является NP полными. Несмотря на значительное сокращение вычислительной работы за счет эффективного отсева подмножеств, заведомо не содержащих оптимальных решений, объем вычислений все же остается нас-

только большим, что для его реализации применение параллельных вычислительных систем становится совершенно необходимым, особенно для решения задач большой размерности.

При организации параллельных вычислений особенно важным является повышение эффективности расчетов, в значительной степени определяющейся как балансировкой загрузки процессоров, так и требованием уменьшения объема обменов (в сравнении с объемом вычислений). Рассматриваются особенности построения параллельных вычислительных алгоритмов для решения задач дискретной оптимизации. При этом предлагаются подходы, которые могут быть применимы для вычислительных систем, имеющих достаточно большое количество процессоров.

Применение метода ветвей и границ предполагает выбор начального рекорда, достаточно близкого к оптимальному решению (близость определяется с помощью оценок), что является очень важным для отсева заведомо неперспективных ветвей и приводит к значительному сокращению общих вычислительных затрат. При этом на эффективность этого предварительного этапа влияет последовательность использования алгоритмов поиска начального рекорда. Существенным становится также баланс между объемом вычислительной работы по распараллеливанию на этапе поиска начального рекорда и этапами решения задачи методом ветвей и границ.

Разработка алгоритмов параллельных вычислений предполагает выделение процедур двух типов: общего назначения, не зависящих от конкретных решаемых задач, и связанных с рассматриваемой задачей. Такой подход позволяет существенно уменьшить трудоемкость разработки алгоритмов параллельных вычислений.

Приводятся некоторые результаты решения двух наиболее часто рассматриваемых в качестве тестовых задач дискретной оптимизации: о ранце и о коммивояжере. Решение выполняется на параллельных вычислительных системах; анализируется эффективность и ее зависимость от параметров задачи и алгоритмов.

Для задачи об одномерном булевом ранце были реализованы последовательные, параллельные алгоритмы ветвей и границ, динамического программирования и комбинированный метод [1,2]. Из результатов экспериментов видно, что в алгоритме ветвей и границ максимальное ускорение достигает 16–17 на 20 процессорах кластера МВС-15000.

Параллельный алгоритм для решения задачи коммивояжера был

реализован с помощью библиотеки BNB-Solver [3], предназначенной для решения задач дискретной и глобальной оптимизации методом ветвей и границ на параллельных вычислительных системах с общей и распределенной памятью. Для вычисления значений нижней границы использовались алгоритмы приведения матрицы расстояний и задачи о назначениях. В ходе проведения эксперимента были решены задачи коммивояжера размерами до 444 городов [4], при этом масштабируемость достигала 83 на 96 вычислительных ядрах кластера МВС-100К.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-07-00072).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2. *Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.*, Knapsack problems, Springer Verlag, Berlin (2004).
3. *Посыпкин М.А.* Архитектура и программная реализация библиотеки для решения задач оптимизации методом ветвей и границ на многопроцессорных вычислительных комплексах // Проблемы вычислений в распределенной среде: распределенные приложения, коммуникационные системы, математические методы и оптимизация. ИСА РАН. М.: КомКнига, 2006. С. 18–25.
4. *Ignatyev A. L., Posypkin A. L., Sigal I. Kh.*, “Solving the travelling salesman problem on shared and distributed memory systems” In: Proc. of Optimization and applications (OPTIMA-2009), Petrovac, Montenegro, Sept. 21-25, 2009, pp. 37–38.

Параллельные методы решения задач линейного программирования большой размерности

Parallel methods for solving large-scale linear optimization problems

Голиков А. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; gol@ccas.ru

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют неединственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек) дают возможность получать различные решения в случае неединственности. Так, симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. В [1] предложен метод решения задач ЛП, использующий новые вспомогательные функции типа модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче ЛП дает возможность получить точную проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной минимизации вспомогательной кусочно квадратичной функции, начиная с некоторого значения коэффициента штрафа. Подставляя найденную проекцию во вспомогательную функцию и вновь минимизируя ее, находится некоторое точное решение двойственной задачи линейного программирования. Предложен простой итеративный процесс, в котором, начиная с произвольного коэффициента штрафа, получаются точные решения прямой и двойственной задачи за конечное число шагов. Применение обобщенного метода Ньютона для минимизации введенных вспомогательных функций дает возможность решать на однопроцессорных компьютерах задачи ЛП с очень большим числом переменных (несколько десятков миллионов) при умеренном числе ограничений (несколько тысяч). Сравнение с некоторыми известными коммерческими (например, CPLEX) и исследовательскими программами показали полное преимущество программной реализации нового метода в системе MATLAB при решении задач большой размерности и близкие результаты по времени решения задач малой размерности. Метод

хорошо поддается распараллеливанию. Было реализовано несколько параллельных схем предложенного метода зависимости от вида разбиения исходной матрицы ограничений на блоки: клеточная схема, когда матрица разбивается на одинаковые блоки, количество которых равно числу процессоров; столбцовая схема — матрица разбивается на блоки по столбцам; строчная схема — матрица разбивается на блоки по строкам. Каждая из предложенных схем имеет свои достоинства и недостатки, чем и определяется область их применения. Так, столбцовая схема весьма эффективна при формировании систем линейных уравнений в обобщенном методе Ньютона, строчная схема более эффективна для параллельного метода решения этих систем линейных уравнений. Была реализована “безматричная” схема, которая позволила решать задачи ЛП с наибольшим числом ограничений по сравнению с другими схемами. Эта схема наиболее рационально использует память кластера, поэтому ее целесообразно применять при большом количестве ограничений и переменных. Ускорение для этой схемы при сравнительно малом числе ограничений может оказаться меньше единицы.

Расчеты проводились на параллельном вычислительном кластере МВС-6000IM, состоящем из двухпроцессорных узлов на основе Intel Itanium 2 с частотой 1.6 GHz, соединенными сетью Myrinet 2000 [2].

При решении задач ЛП с одним миллионом неизвестных и при десяти тысячах ограничений с помощью клеточной схемы на 144 процессорах было достигнуто ускорение расчетов примерно в 50 раз, время счета составило 28 с. Задача ЛП с двумя миллионами переменных при двухстах тысячах ограничений на 80 процессорах была решена с помощью “безматричной” схемы менее, чем за 40 минут. С помощью столбцовой схемы разбиения задача ЛП с максимальным количеством переменных — 60 млн. при четырех тысячах ограничений была решена на 128 процессорах за 140 с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00619).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Метод решения задач линейного программирования большой размерности // Докл. Академии наук. 2004. Т. 397. № 6. С. 727–732.

2. Гаранжа В. А., Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 8. С. 1369–1384.

Качественные и численные методы в задачах управления

Qualitative and numerical methods in control problems

Дикусар В. В., Зубов Н. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; dikussar@yandex.ru

Для линейных стационарных систем первого приближения впервые получены критерии робастной устойчивости по части координат. Эти результаты являются существенным развитием робастной теории на случай неустойчивых систем и имеют практическое приложение, так как позволяют найти границы эквивалентного качественного поведения целых семейств систем устойчивых по части координат [1].

Для линейных стационарных управляемых систем впервые решена задача определения минимального числа управляющих воздействий (входов), при которых открытую систему можно сделать полностью управляемой. Полученный результат редуцирован на линейные стационарные системы наблюдения так, что в работе также решена задача определения минимального числа выходов, при которых открытая система может быть сделана полностью наблюдаемой. Решение этих задач имеет огромное практическое значение, так как позволяет еще на этапе создания систем управления или наблюдения выбирать системы, обладающие оптимальной структурой [2–4].

Работа [5] посвящена вопросам разработки приближенных конструктивных аналитических методов решения нелинейных краевых задач теплопроводности применительно к проблемам оптимального управления взаимосвязанным электромагнитным и тепловым процессом.

С точки зрения синтеза оптимального управления можно выделить два больших класса задач [6]. В первом из них важен учет тонкой структуры поля в области локальных возмущений (например, процессы с подвижной границей с фазовыми превращениями). Здесь при использовании численных методов требуется введение неравномерных мелких сеток или сгущение узлов конечных элементов, что может создать предпосылки неустойчивости вычислительной схемы.

В другом классе задач вычисление функционалов цели оптимального управления не требует знания тонкой структуры поля в области локальных возмущений. Примером могут служить задачи нагрева токопроводящих тел (металлов, порошков, композитов) в электромагнитном поле. Для этого класса допустимо и целесообразно сглаживание по объему локальных возмущений поля в вычислительных схемах.

Авторы предлагают сглаживание с итерационным приближением переменных коэффициентов к истинным значениям нелинейных коэффициентов.

В работе [7] решена задача с нерегулярным принципом максимума на базе схемы Дубовицкого–Милютина. Предложен метод регуляризации вырожденного принципа максимума.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 10-08-00624 и № 09-01-90425).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дикусар В. В., Зеленков Г. А., Zubov Н. В. Робастная устойчивость по части координат. СПб: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009.
2. Дикусар В. В., Зеленков Г. А., Zubov Н. В. Критерии существования однородных классов эквивалентности неустойчивых интервальных полиномов. // Доклады академии наук. Теория управления. 2009. Т. 429. № 3. С. 1–3.
3. Дикусар В. В., Зеленков Г. А., Zubov Н. В. Условия существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов // Доклады академии наук. Теория управления. 2009. Т. 429. № 2. С. 174–175.
4. Dikusar V. V., Zelenkov G. A., Zubov N. V., "Criteria for the existence of uniform equivalence classes of unstable interval polynomials," DOKLADY MATHEMATICS, **80**, No. 3, 1–3 (2009).
5. Гжизивачевски М., Вуйтович М., Дикусар В. В. Численно-аналитический метод решения нелинейных многомерных задач электротеплового поля. // Труды ИСА РАН. М.: ИСА РАН, Т. 42. № 2. 2009. С. 112–129.

6. *Борунов В.П., Вуйтович М., Дикусар В.В.* Нелинейные задачи оптимального управления процессами электромагнитного нагрева при наличии ограничений. М.: ВЦ РАН, 2010. С. 112–129.
7. *Dikusar V. V.* “Re-entry body problem with control-state constraints,” in: The Fourth International Workshop Computer Algebra Systems in Teaching and Research (CASTR’2007), Siedlce, Poland, 2007, pp. 67–74.

Управляемые системы, группы Ли и системы Пфаффа

Control systems, Lie groups and Pfaffian systems

Елкин В. И.

ВЦ РАН, Москва, Россия; elk_v@mail.ru

Понятие управляемой динамической системы возникло из конкретных задач управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями. Понятия группы Ли и системы уравнений Пфаффа возникли из потребностей чистой математики. Тем не менее между ними существует тесная связь. С управляемой системой можно связать группу Ли (вернее, группу несколько более общего вида) и систему уравнений Пфаффа, причем задачи управления можно переформулировать в традиционные задачи теории групп преобразований и теории систем Пфаффа. Более точно, некоторые категории управляемых систем изоморфны категориям групп преобразований и систем Пфаффа (подробности в [1–3]).

Проиллюстрируем сказанное на примере нелинейных систем, линейных по управлениям:

$$\dot{y} = f(y)u, \quad y \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r. \quad (1)$$

Считаем, что множество M , называемое фазовым пространством, — область, $f(y)$ — $n \times r$ -матрица, столбцы которой f_α , $\alpha = 1, \dots, r$, являются гладкими векторными полями в M , причем $\text{rank} f(y) = \text{const} = r$.

Ассоциируем с системой (1) группу преобразований S . Эта группа порождается однопараметрическими группами диффеоморфизмов, ко-

торые являются сдвигами по решениям систем дифференциальных уравнений, правыми частями которых являются векторные поля f_α , $\alpha = 1, \dots, r$.

Говорят, что система (1) обладает свойством управляемости, если для любых точек $y_0, y_1 \in M$ найдется такая фазовая траектория $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, соответствующая некоторому допустимому управлению $u(t)$, что $y(t_0) = y_0$, $y(t_1) = y_1$. Группа S называется транзитивной, если для любых точек $y_0, y_1 \in M$ найдется такое преобразование $s \in S$, что $s(y_0) = y_1$.

Оказывается, что система (1) обладает свойством управляемости тогда и только тогда, когда ассоциированная группа S транзитивна. Отсюда следует, что условие управляемости системы (1) вытекает из известного условия транзитивности группы S (теоремы Чжоу–Рашевского) в терминах алгебры Ли этой группы.

Говорят, что система (1) допускает декомпозицию, если существует замена координат, в результате которой система (1) приводится к треугольному виду $\dot{x} = g(x, u)$, $\dot{z} = h(x, z, u)$. Оказывается, свойство системы (1) допускать декомпозицию равносильно другому свойству группы S — импримитивности, что также позволяет решить задачу о существовании декомпозиции с помощью указанной алгебры Ли.

Рассмотрим теперь проблему классификации управляемых систем. Говорят, что две системы вида (1) эквивалентны, если существует диффеоморфизм фазовых пространств, переводящий траектории одной системы в траектории другой системы. Все системы (1) разбиваются на классы эквивалентных систем. Проблема классификации заключается в описании управляемых систем с точностью до эквивалентности. Свяжем с системой (1) систему Пфаффа, которая получается исключением из уравнений (1) переменных u (что можно осуществить, выразив эти переменные из некоторых r уравнений системы (1) и подставив их в другие $n - r$ уравнений системы (1)) и умножением на dt :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^k(y) dy^i = 0, \quad k = 1, \dots, q = n - r. \quad (2)$$

Оказывается, что проблема классификации управляемых систем (1) сводится к классической проблеме классификации систем уравнений Пфаффа вида (2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00228).

ЛИТЕРАТУРА

1. Елжин В. И. Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М.: Наука, 1997.
2. Елжин В. И. Редукция нелинейных управляемых систем. Декомпозиция и инвариантность по возмущениям. М.: Фазис, 2003.
3. Елжин В. И. Редукция нелинейных управляемых систем. Симметрии и классификация. М.: Фазис, 2006.

Мультипликативно-барьерные методы для задач полуопределенного программирования Multiplicatively barrier methods for semidefinite programming problems

Жадан В. Г.

ВЦ РАН, Москва, Россия; zhadan@ccas.ru

Пусть $\mathcal{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n и пусть заданы матрицы $C \in \mathcal{S}^n$, $A_i \in \mathcal{S}^n$, $1 \leq i \leq m$ и вектор $b \in R[m]$. Линейная задача полуопределенного программирования заключается в нахождении такой матрицы $X \in \mathcal{S}^n$, что

$$C \bullet X \rightarrow \min, \quad A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad X \succeq 0, \quad (1)$$

где знак $\bullet$ указывает на скалярное произведение между матрицами по Фробениусу, неравенство $X \succeq 0$ означает, что матрица X должна быть положительно полуопределенной. Двойственной к (1) является задача

$$b^T u \rightarrow \max, \quad V(u) = C - u^1 A_1 - u^2 A_2 - \dots - u^m A_m \succeq 0. \quad (2)$$

Предполагается, что матрицы A_i , $1 \leq i \leq m$, линейно независимы. Задачи линейного программирования являются частным случаем задач

(1), (2), когда от всех матриц требуется, чтобы они были диагональными.

Для задач линейного программирования в [1] были разработаны барьерно-проективные методы, которые относятся к классу методов внутренней точки. В настоящем сообщении рассматриваются их обобщения для решения задач (1), (2).

Пусть $X * V$ обозначает симметризованное произведение матриц X и V , т.е. $X * V = (XV + V^T X^T)/2$. Прямой мультипликативно-барьерный метод описывается следующим рекуррентным соотношением

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k X_k * V_k, \quad V_k = V(u_k), \quad \alpha_k > 0. \quad (3)$$

Вектор двойственных переменных u_k в (3) находится из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^m u_k^j A_i \bullet (X_k * A_j) = A_i \bullet (X_k * C) + \tau (b^i - A_i \bullet X_k), \quad 1 \leq i \leq m,$$

где $\tau > 0$. От начальной точки X_0 требуется, чтобы она была только положительно определенной матрицей, равенствам в (1) она может не удовлетворять.

Пусть $\mathcal{A} - mn \times n$ матрица, составленная из матриц A_i , $1 \leq i \leq m$ и пусть $\mathcal{A}_{vec} - m \times n^2$ матрица, i -й строкой которой является вектор $\text{vec} A_i$ (прямая сумма столбцов матрицы A_i). Обозначим также через $X^\otimes = (X \otimes I_n + I_n \otimes X)/2$ кронекеровскую сумму матрицы X .

Наряду с (3) предлагается также итеративный процесс, основанный на методе Ньютона

$$X_{k+1} = X_k - [\mathcal{D}_n \Lambda^{-1}(X_k) \mathcal{L}_n] \bullet (X_k * V_k), \quad (4)$$

где

$$\Lambda(X) = \mathcal{L}_n \{ [I_{n^2} - \mathcal{P}(X)] V^\otimes + \tau \mathcal{P}(X) \} \mathcal{D}_n,$$

$$\mathcal{P}(X) = X^\otimes \mathcal{A}_{vec}^T G^{-1}(X) \mathcal{A}_{vec}, \quad G(X) = \mathcal{A}_{vec} X^\otimes \mathcal{A}_{vec}^T,$$

$\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ — соответственно элиминационная и дублицирующая матрицы [2].

Теорема 1. Пусть для прямой и двойственной задач (1), (2) имеет место строгая двойственность, причем их решения X_* и V_* строго комплементарны. Пусть, кроме того, X_* есть крайняя

точка допустимого множества в (1). Тогда метод (3) локально сходится к X_* с линейной скоростью, а метод (4) — со сверхлинейной скоростью.

Рассматриваются также аналоги методов (3) и (4), предназначенные для решения двойственной задачи (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00608), а также при содействии Программы ведущих научных школ России (НШ-4096.2010.1) и Программы фундаментальных исследований ОМН РАН (проект № 3-16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Evtushenko Y. G., Zhadan V. G.*, “Stable Barrier-Projection and Barrier-Newton Methods for Linear and Nonlinear Programming,” in: *Algorithms for Continuous Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 255–285.
2. *Magnus J. R., Neudecker H.*, “The elimination matrix: some lemmas and applications,” *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, **3**, No. 4, 422–449 (1980).

Поддержка принятия решений на основе аппроксимации многомерной границы Парето Decision support based on approximation of the high-order Pareto frontier

Каменев Г. К., Лотов А. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; GKK@mail.ru, Lotov10@ccas.ru

Методы принятия решений при нескольких критериях выбора играют все большую роль в практике принятия решений. Одним из важнейших подходов многокритериальной оптимизации (МКО) является подход, основанный на аппроксимации и изучении границы Парето, представленной в графической форме. Этот подход привлекает внимание своей простотой для пользователей, которым при исследовании не приходится отвечать на сложные вопросы о своих предпочтениях. В то же время, такой подход требует развития совершенных матема-

тических методов аппроксимации границы Парето, особенно сложной при числе критериев больше двух-трех.

В задачах МКО множество достижимых критериальных векторов задается моделью как образ множества допустимых решений при некотором (часто нелинейном) отображении, описывающем зависимость критериев от решения. Начиная с середины 1970-х годов в ВЦ РАН развивается методика решения задач МКО, в рамках которой визуализация границы Парето основывается на аппроксимации оболочки Эджворта–Парето (ОЭП) множества достижимых критериальных векторов, т.е. максимального множества, имеющего ту же границу Парето, что и множества достижимых критериальных векторов. Благодаря этому удастся осуществить диалоговую визуализацию ОЭП и его границы Парето для 3–8 критериев. При этом, однако, аппроксимация ОЭП должна быть построена в достаточно простом виде, пригодном для его дальнейшей визуализации. В описываемом подходе ОЭП аппроксимируется в выпуклом случае многогранным множеством, а в невыпуклом случае — объединением конечного числа конусов [1].

В разработанных ранее подходах к задаче полиэдральной аппроксимации выпуклых тел либо требуется явное аналитическое описание аппроксимируемого множества, либо используются неадаптивные или полуадаптивные методы. В связи с требованием аналитического описания аппроксимируемого множества методы первого типа не могут быть применены в задачах многокритериальной оптимизации, а неадаптивные или полуадаптивные методы, как было доказано в 80-х гг., не являются неэффективными в негладком случае, который наиболее характерен для задач многокритериальной оптимизации. Нами были разработаны адаптивные итеративные методы аппроксимации выпуклых компактных тел, которые позволяют получать аппроксимацию с любой степенью точности за конечное число итераций, на которых решаются задачи выпуклой оптимизации на аппроксимируемом множестве. В частности, был предложен, изучен и реализован метод “уточнения оценок”, являющийся в настоящее время основным методом аппроксимации многомерных выпуклых компактных тел [1].

Разработанная нами теория адаптивных методов полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых компактных тел позволяет сделать вывод об асимптотической близости получаемых в них многогранников к многогранникам наилучшей аппроксимации, а также об эффективности их с точки зрения сложности описания аппрок-

симирующих многогранников и числа задач оптимизации, решаемых на аппроксимируемом множестве [2]. Важно, что предложенные нами методы являются практически реализуемыми в задачах с неявным заданием аппроксимируемого множества, что естественно при многокритериальной оптимизации. Они были использованы при решении ряда экологических проблем [1].

При аппроксимации границы Парето в нелинейных многокритериальных задачах широкое распространение получили методы случайного поиска, предложенные в 1950-х гг., а также появившиеся в последние годы эволюционные методы. В методах, основанных на использовании глобальной оптимизации параметрического семейства сверток критериев для поиска точек границы Парето, оценка точности метода опирается на знание постоянных Липшица критериальных функций, которые в прикладных исследованиях могут быть не известны. В разработанных нами гибридных методах благодаря аппроксимации ОЭП удастся не только интегрировать оптимизацию сверток критериев, методы случайного поиска и эволюционные методы, но и дать статистическую оценку качества полученной аппроксимации [3].

В настоящее время многофазные методы теоретически и экспериментально исследованы. В частности, доказано, что для однофазных методов асимптотическая скорость их сходимости определяется верхней метрической размерностью множества достижимых критериальных векторов, для двухфазных методов — размерностью образа в пространстве критериев множества локальных оптимумов используемой критериальной свертки решений, а для двухфазных методов с использованием глобальной оптимизации — метрической емкостью (энтропией) границы Парето, что является оптимальным. Методы были использованы для решения сложных проблем проектирования [1].

Таким образом, в настоящее время заложена теоретическая, алгоритмическая и программная база для поддержки принятия решений на основе аппроксимации границы Парето в линейном и нелинейном случаях. Соответствующее программное обеспечение реализовано как для персональных компьютеров, так и для мощных многопроцессорных комплексов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-00599 и № 10-01-00199).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lotov A., Bushenkov V., Kamenev G. Interactive decision maps. Approximation and visualization of Pareto frontier, Kluwer Acad. Publs, Boston (2004).
2. Каменев Г. К. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: ВЦ РАН, 2007.
3. Березкин В. Е., Каменев Г. К., Лотов А. В. Гибридные адаптивные методы аппроксимации невыпуклой многомерной паретовой границы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 11. С. 2009–2023.

Имитационная модель управления гетерогенным вычислительным комплексом

Simulation model for the heterogeneous computing system management

Козлов М. В.¹, Коновалов М. Г.², Малащенко Ю. Е.³,
Назарова И. А.⁴

¹ ВЦ РАН, Москва, Россия; kz2pit@yandex.ru

² Институт проблем информатики РАН, Москва, Россия;
mkonovalov@ipiran.ru

³ ВЦ РАН, Москва, Россия; malash09@ccas.ru

⁴ ВЦ РАН, Москва, Россия; irina-nazar@yandex.ru

Рассматривается проблема создания, развития, повышения надежности работы и управления гетерогенным вычислительным комплексом. Предполагается, что вычислительные ресурсы комплекса варьируются от переносных персональных компьютеров до мощных кластеров, содержащих большое число процессоров, в том числе узко специализированных.

Для гетерогенного вычислительного комплекса существует общая научно-техническая проблема, которая состоит в следующем:

- поиск способов эффективного использования вычислительных ресурсов и повышения вычислительной мощности;
- создание специализированного программного обеспечения;

— разработка диспетчерских правил, позволяющих в реальном времени удовлетворять требованиям потребителей по объему и срокам завершения вычислений.

В докладе рассматриваются некоторые общетеоретические вопросы, связанные с логической схемой организации “диспетчеризации”, возможности применения математических методов и имитационного моделирования для разработки алгоритмов управления выполнением заданий.

Практическая проблема развития и управления процессом эксплуатации гетерогенных вычислительных ресурсов является ключевой для взаимосвязанного коллектива пользователей и привлекательной в смысле использования арсенала средств теоретической информатики, математики и исследования операций.

Предлагается две группы имитационных моделей. Во-первых, рассматривается оригинальная динамическая имитационная модель, которая опирается на подробное алгоритмическое описание процесса коллективного взаимодействия вычислительных ресурсов и диспетчеров через телекоммуникационную сеть. Исследуется новый подход к оперативному управлению размещением заданий в системе гетерогенных вычислительных ресурсов.

Управление выполнением заданий включает в себя назначение ресурсов для их выполнения и выбор объема заданий. Цели управления формализуются в терминах производительности системы, количества отказов в ней, а также “стоимостных” показателей. Проблема сводится к задаче оптимального управления марковскими последовательностями. Для ее решения используются адаптивные алгоритмы, оптимизирующие предельные средние характеристики. Предложенные адаптивные стратегии слабо зависят от структуры и особенностей конкретной модели. Поэтому в случае изменения деталей, например, в сторону большего отражения особенностей конкретной системы, работоспособность алгоритмов сохраняется.

Имитационная модель реализована в виде программной системы, что дает возможность экспериментально анализировать свойства вычислительного комплекса, и, в том числе, свойства предлагаемых алгоритмов адаптивного свойства.

Во-вторых, рассматривается группа имитационных моделей и соответственно, вычислительных экспериментов, посвященная анализу диспетчерских правил выполнения заданий, находящихся в текущий

момент в очереди и имеющих заданное (ограниченное) время для выполнения. Предполагается, что время выполнения отдельного задания — случайная величина с гарантированной верхней оценкой максимального значения. Изучаются различные диспетчерские правила, а также различные стратегии перераспределения высвобождающихся ресурсов при параллельной обработке заданий.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 09-07-12032-офи_м и № 08-07-00152-а) и грантом президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-4806.2010.1).

Определение радужки глаза на изображении по согласованным максимумам проекций градиентов яркости

Detection of eye iris by correlated maxima of brightness gradient projections

Матвеев И. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; matveev@ccas.ru

Предложен метод обнаружения на изображении радужки глаза, при условии, что известны координаты некоторой точки, лежащей внутри зрачка. Метод основан на построении гистограмм — проекций локальных градиентов яркости и сопоставлении их максимумов как возможных положений границ зрачка и радужки. Метод отличается малой вычислительной сложностью и высокой устойчивостью к шумам.

Входными данными служат растровое монохромное изображение и приблизительные координаты центра глаза $\mathbf{c}$, определенные, например [1–3]. Возможные точки $\mathbf{x}$ границ зрачка и радужки определяются как имеющие достаточно большой градиент, направленный от центра $\mathbf{c}$. Обозначим множество таких точек $v(\mathbf{x})$.

Относительно центра $\mathbf{c}$ изображение разделяется на четыре квадранта: левый, правый, нижний, верхний. В каждом из этих четырех

квадрантов вычисляется проекция — функция, дающая количество точек, лежащих на заданном расстоянии r от центра. В дискретном представлении

$$\Pi(r) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{r-0.5 < \|\mathbf{x}\| < r+0.5} v(\mathbf{x}).$$

Определив положения локальных максимумов проекций $\Pi(r)$ для всех четырех квадрантов, можно получить возможные удаления границ гипотетических окружностей зрачка и радужки от заданной точки в соответствующем направлении (вверх, вниз, вправо, влево). Комбинируя эти величины, можно получить координаты центров и радиусы этих окружностей. Качество окружности, полученной для заданных положений локальных максимумов, определяется как сумма значений проекций в этих положениях.

Среди гипотетических окружностей, построенных методом круговых проекций, выбирается пара, имеющая максимальное суммарное качество и удовлетворяющая ограничениям, обусловленным природой радужки человека [4]: (1) радиус радужки не может превосходить радиус зрачка более, чем в 6 раз, (2) зрачок не может занимать больше 75% радужки, (3) центр радужки лежит внутри зрачка, (4) минимальная и максимальная ширина кольца радужки отличаются не более чем в два раза.

Алгоритм протестирован автором на более чем 100000 изображений, дав долю грубых ошибок менее 0.2% (грубой ошибкой считается отличие положения или размера зрачка или радужки более чем на 10% от истинного) и долю умеренных ошибок менее 0.7% (отличие на 5%). Скорость работы алгоритма на процессоре P-IV 3GHz — около 0.01 с. для изображения 640×480 точек. Основное время занимает вычисление градиентов яркости. Предлагаемый метод поиска радужки может быть применен для предварительного определения координат окружности радужки (с точностью до 10 пикселей) и зрачка (с точностью до 5 пикселей) при том, что известна точка, лежащая внутри зрачка.

Алгоритм используется в ПО распознавания по радужке Iritech Inc и в его составе был апробирован в открытом международном тесте [5], где ПО Iritech Inc заняло первое место по точности распознавания человека по изображению радужки глаза.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-90441).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maenpaa T.* “An iterative algorithe for fast iris detection” In: Proc. IWBRs 2005, Beijing Press, Beijing, China, pp 127–134.
2. *Benn D. E., Nixon M. S., Carter J. N.*, “Robust eye centre extraction using the Hough transform,” In: Proc. 1st Int. Conf. on Audio- and video-based biometric person authentication, 1997.
3. *Матвеев И. А.* Поиск центра глаза на изображении методом Хафа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 2. С. 36–40.
4. *Потебня Г. П., Лисовенко Г. С., Кривенко В. В.* Клиническая и экспериментальная иридология. Киев: Наукова думка, 1995.
5. *Grother P., Tabassi E, Quinn G. W., Salamon W.* Performance of iris recognition algorithms on standard images // USA, National Institute of Standards and Technology, 30 October 2009, <http://iris.nist.gov/irex/index.html>.

Теория игр и экспериментальная экономика о рациональности принятия решений

Game theory and experimental economics about rationality of decision making

Меньшиков И. С.

ВЦ РАН, Москва, Россия; ivanmen@ccas.ru

Традиционно в теории игр предполагалось, что каждый из участников процесса принятия решений является полностью рациональным анализатором ситуации, который стремится к увеличению своей целевой функции (выигрыша) на основе имеющейся у него информации. Однако постепенно были накоплены эмпирические наблюдения, а также результаты социально-экономических экспериментов в контролируемых условиях лаборатории, которые показывают, что объяснить поведение людей с позиций жесткой рациональности выбора невозможно, поскольку приходится учитывать разнообразные челове-

ческие факторы, которые невозможно описать формальной целевой функцией.

Термин ЛПР теперь приходится понимать не традиционным образом, как лицо, принимающее решение, а скорее, как личность, принимающая решение. При этом принимающая решение личность обладает определенным психологическим типом, который может быть заранее выявлен на основе системы тестирования. Оказывается, что в социально-экономических ситуациях со многими участниками редко можно говорить об оптимальном решении. Скорее, речь идет о наилучшем ответе на поведение остальных, которое еще надо каким-то образом предвидеть, что существенно зависит от типа личности участника и характера механизма взаимодействия.

Экспериментальные данные, полученные в Лаборатории экспериментальной экономики ВЦ РАН и МФТИ (ЛЭЭ), показывают, что наблюдаемая вариативность принятия решений участниками в заданной роли во многом объясняется принадлежностью к определенному типу личности. Этот результат, по-видимому, связан с предысторией принятия решений участником, а также с характером его индивидуальных предпочтений.

ЛЭЭ оснащена также системой стабиллографических кресел, которая позволяет отслеживать функциональное состояние участников в течение самого процесса принятия решений в рамках заданного механизма взаимодействия участников. Измеряемое 50 раз в секунду положения центра тяжести участника, по мнению психофизиологов, является системной характеристикой функционального состояния человека под действием когнитивных и иных нагрузок, связанных с принятием решений. Более того, проведенные исследования позволяют говорить о взаимном влиянии друг на друга функциональных состояний участников. Тем самым потоки действий участников и их функциональных состояний являются в определенном смысле двойственными.

Проводимые в ЛЭЭ исследования близки к так называемой нейроэкономике, которая активно развивается в последние годы в ведущих лабораториях мира.

На стыке теории игр и экспериментальной экономики возникают новые понятия равновесия, которые являются ослаблениями классического равновесия Нэша, но при этом лучше согласуются с результатами лабораторных экспериментов. В ЛЭЭ предложен ряд таких по-

веденческих равновесий, которые вписываются в общую концепцию слабого равновесия, в рамках которой ослабляется принцип Нэша о наилучшем ответе на поведение остальных участников за счет введения неточного представления о действиях остальных и проявления наилучшего ответа лишь на агрегированном уровне группы участников, соответствующих одной роли в игре. Постоянно расширяется библиотека экспериментов, в которых слабое равновесие в той или иной форме лучше согласуется с лабораторными данными о поведении участников, чем равновесие Нэша в классическом виде.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00321-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меньшиков И. С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. М.: МЗ Пресс, 2007.
2. *Бурнаев Е. В., Меньшиков И. С.* Модель функционального состояния участников лабораторных рынков // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 187–204.
3. *Двуреченская М. А., Меньшикова О. Р.* Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми ставками // Сборник научных трудов МФТИ “Информационные технологии: модели и методы”. М.: МФТИ, 2010. С. 93–104.

А. А. Дородницын — ученый и человек **A. A. Dorodnicyn as a scientist and a human**

Молчанов И. Н.

*Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев,
Украина; dept150@insyg.kiev.ua*

Доклад представляет собой воспоминания об академике А.А. Дородницыне, его жизненном пути, научной и организационной деятельности, о его заслугах в подготовке научных кадров и его влиянии на

научные исследования на Украине, а также в бывших республиках СССР, о замечательных качествах Анатолия Алексеевича как выдающейся личности.

Геометрическая теория декомпозиции Geometric theory of decomposition

Павловский Ю. Н.

ВЦ РАН, Москва, Россия; jpvlsk1@rambler.ru

Геометрическая теория декомпозиции [1–3] — языковая среда, в рамках которой реализуется следующий подход к проблеме декомпозиции математических объектов и моделей: объект (модель) загружается в *класс родственных объектов*, где определено понятие об изоморфизме и декомпозицией объекта считается его *сохраняющееся при изоморфизмах* представление с помощью семейства *редукций* этого объекта (модели), причем по этому представлению исходный объект должен *восстанавливаться однозначно*. В докладе даются точные эквиваленты выделенным в тексте терминам и словосочетаниям [4]. В основе этой среды лежат лишь два двойственных друг другу понятия: понятие о Р-декомпозиции объекта и понятие о его F-декомпозиции. Никаких других основополагающих понятий в геометрической теории декомпозиции *нет*. Геометрическая теория декомпозиции, возникла как методологическое обеспечение работ по продвижению технологии компьютерного имитационного математического моделирования в сложные области исследований и практической деятельности [5–6]. В докладе излагается то, что можно считать “ядром” геометрической теории декомпозиции. На некоторых важных обобщениях в рамках доклада остановиться невозможно. Доклад преследует две цели. Одна из них состоит в том, чтобы показать, как языковая среда геометрической теории декомпозиции порождает понятия и представления, позволяющие сделать достаточно обоснованные гипотезы о свойствах и поведении реальных сложных систем. Вторая состоит в демонстрации того, что часть содержания теорий конкретных математических

объектов (моделей) можно трактовать как изучение их декомпозиций [7].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-07-00176).

ЛИТЕРАТУРА

1. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. М.: Фазис, 1998.
2. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. М.: ВЦ РАН, 2003.
3. Павловский Ю.Н., Смирнова Т.Г. Введение в геометрическую теорию декомпозиции. М.: Фазис, 2006.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
5. Бродский Ю.И., Лебедев В.Ю. Инструментальная система имитации MISS. М.: ВЦ РАН СССР, 1991.
6. Белотелов Н.В., Бродский Ю.И., Павловский Ю.Н. Разработка инструментально системы имитационного моделирования. ЭКОМОД-2009. Сборник трудов. Киров: ВятГу, 2009. С. 131–142.
7. Elkin V. I. Reduction of nonlinear control systems: a differential geometric approach. Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers. 1999.

Математическое моделирование в экономике Mathematical modelling in economics

Петров А. А.^{1,2}

¹ВЦ РАН, Москва, Россия; petrov@ccas.ru

²МФТИ, Долгопрудный, Россия

Математическое моделирование — методология проблемно ориентированных фундаментальных исследований. Большой вклад в создание математического моделирования в физических областях приложений внесла школа академика А.А. Дородницына. Математическое моделирование развивалось вместе с развитием вычислительной техники. Успехи математического моделирования в физике и технике и

вычислительной техники продвигали математические модели и методы в новые области приложений, в частности, в экономику.

В экономической науке математические методы широко применяются с конца XIX в., с помощью математических моделей были до конца решены некоторые фундаментальные проблемы экономической науки. Специалисты, пришедшие в экономику из физики и техники, не имели фундаментального экономического образования, яркий тому пример Д. Форрестер и Д. Медоуз. Поэтому «физическое» направление математического моделирования экономики столкнулось с «экономическим», точнее, неоклассическим направлением экономической науки. Возникла проблема, соединить фундаментальные положения экономической науки с культурой математического моделирования, созданной в физической области приложений.

В докладе представлен краткий обзор проблем экономической науки, ее достижений, которые вошли в обиход математического моделирования, развития этих достижений математическим моделированием и нерешенных проблем.

Опыт моделирования российской экономики в период мирового финансового кризиса

Experience of modelling of the Russian economy during the global financial crisis

Поспелов И. Г.

ВЦ РАН, Москва, Россия; pospeli@ccas.ru

В течение последних 35 лет в отделе «Математическое моделирование экономических систем» ВЦ РАН под руководством академика РАН А.А. Петрова в рамках научного направления «Системный анализ развивающейся экономики» разработаны модели советской и российской экономики, учитывающие особенности фактически складывающихся экономических отношений и институтов.

В 1988 г. была построена модель, которая воспроизводила основные качественные особенности эволюции плановой экономики. За два

года до реформы 1992 г. были правильно предсказаны краткосрочные ее последствия. Были построены: модель экономики периода высокой инфляции 1992–1995 гг.; модель экономики периода «финансовой стабилизации» 1995–1998 гг., где предсказывался кризис 1998 г.; модель для оценки перспектив развития экономики после кризиса 1998 г., модель для оценки теневого оборота, построенная по заказу налогового ведомства.

С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов, скрывшуюся за видимой, часто казалось бы парадоксальной, картиной экономических явлений, которая не укладывалась в известные теоретические схемы. Опыт применения моделей показал, что они служат надежным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а также прогноза последствий макроэкономических решений при условии сохранения сложившихся отношений. Можно сказать, получилась целая «летопись» российских экономических реформ, написанная на языке математических моделей [1].

В 2009 г. создана модель общего межвременного экономического равновесия, успешно воспроизводящая за счет выбора 35 настроенных параметров несглаженную квартальную динамику основных макроэкономических показателей экономики России, таких как ВВП, потребление, накопление, импорт, экспорт, три индекса цен, кредиты, сбережения, международные резервы и др. в период 2004–2009 гг., включающий период мирового экономического кризиса.

Модель описывает движение экономических показателей как результат взаимодействия 9 экономических макроагентов: производителей, банков, торговых посредников, домашних хозяйств, собственников капитала, государства, центрального банка, экспортеров и импортеров, причем первые 5 из агентов описаны в модели как рациональные субъекты, обладающие полным предвидением. При этом в качестве институциональных ограничений на действия агентов используются некоторые наблюдаемые в российской экономике устойчивые соотношения на показатели, выявленные предварительным эконометрическим анализом.

Модельные агенты решают каждый свою задачу оптимального управления относящимися к их компетенции потоками однородного труда, трех агрегированных продуктов, а также остатками семи финансовых инструментов. Для всех этих величин в модели выполняются

полные системы балансов. Планы агентов балансируются за счет соответствующего определения информационных переменных: цен, процентов и т. п. Таким образом, вся сложная многомерная траектория модели представляет одно межвременное экономическое равновесие.

Все этапы разработки, исследования модели и расчетов поддерживаются созданной нами оригинальной инструментальной системой ЭКОМОД [2]. Она реализована в среде компьютерной алгебры Maple. Система контролирует корректность синтаксиса модели, корректность переобозначений величин, правильность размерностей величин, правильность уравнений балансов и информационных связей агентов. Система автоматически генерирует условия оптимальности в моделях поведения агентов, автоматически упрощает систему соотношений на основе их семантики, выполняет расчеты по модели на этапах верификации модели и численных экспериментов с ней. Система сохраняет исходный вид и экономический смысл соотношений, подвергшихся любым преобразованиям, позволяет быстро повторить все преобразования после изменения исходных гипотез, сохраняет дерево вариантов модели в файловой системе, хранит и представляет результаты расчетов. Система работает с моделью, введенной с клавиатуры компьютера в стандартной математической нотации, вплоть до представления результатов расчетов в графической или табличной форме.

С математической точки зрения модель сводится к краевой задаче для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для ее решения были разработаны специальные алгоритмы, реализованные в настоящее время на суперкомпьютере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поспелов И. Г.* “Модельная летопись” российских экономических реформ // *Экология и жизнь*, 2006. № 1. С. 3-15.
2. *Андреев М. Ю., Поспелов И. Г., Поспелова И. И., Хохлов М. А.* Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007.

Использование методов распознавания и интеллектуального анализа данных при решении задач медицинской диагностики и прогнозирования

The use of pattern recognition and intellectual data analysis methods in tasks of medical diagnostics and forecasting

Сенько О. В.

ВЦ РАН, Москва, Россия; senkoov@mail.ru

А.А. Дородницын высоко оценивал перспективы использования методов распознавания по прецедентам в областях естествознания, где использование методов моделирования, основанных на физических законах, является практически неосуществимым. К таким направлениям может быть отнесена значительная часть современных биомедицинских исследований, использующих математические методы распознавания для решения задач компьютерной диагностики патологических состояний, прогноза динамики заболевания, исследование взаимосвязи между различными группами факторов, характеризующих течение заболевания и др. Результаты решения данных задач имеют большое значение при выборе оптимального курса лечения или профилактики заболеваний.

Следует отметить ряд достаточно характерных и важных с точки зрения теории распознавания особенностей современных биомедицинских исследований.

Комбинированное применение разнообразных биофизических, биохимических, психометрических и др. методов обследования пациентов позволяет чрезвычайно расширить спектр показателей (признаков), которые теоретически могли бы повысить точность решения соответствующих задач диагностики и прогноза. При этом нередко общее число потенциальных диагностических или прогностических признаков оказывается сравнимым (или даже заметно превышает) число случаев заболевания в существующих клинических базах данных. Трудоемкость многих видов обследования и высокая стоимость необходимого оборудования часто приводит к большой доле пропущенных значений для соответствующих показателей. Взаимосвязь биологиче-

ских параметров часто оказывается нелинейной и требует для своего описания учета взаимодействия различных факторов.

Перечисленные особенности биомедицинской информации накладывают определенные требования на математические модели распознавания: учет информативности используемых признаков, устойчивость к относительно небольшим изменениям в обучающих данных, адекватная обработка пропущенных значений. Таким условиям удовлетворяет разработанный в рамках школы Ю.И. Журавлева подход, основанный на принципе частичной прецедентности. Данный подход включает комбинаторно-логические методы, алгоритмы вычисления оценок, методы, основанные на взвешенном голосовании по системам эмпирических закономерностей. Высокой диагностической и прогностической способностью обладают коллективные решения по наборам алгоритмов распознавания, полученные с помощью алгебраического подхода. При решении задач медицинской диагностики и прогнозирования большее значение имеет оценка влияния различных факторов на диагноз или исход заболевания. Дополнительные возможности для таких оценок предоставляют инструменты интеллектуального анализа данных, основанные на поисках систем эмпирических закономерностей, кластеризации и многомерного шкалирования. Большинство перечисленных методов реализовано в рамках разработанной в ВЦ РАН программной системы “РАСПОЗНАВАНИЕ” [1]. Разработанные в ВЦ РАН математические методы распознавания уже длительное время используются при решении задач медицинского прогнозирования или диагностики [2]. За последние годы методы распознавания успешно использовались при решении задач онкологии, психиатрии, гинекологии, педиатрии, геронтологии, кардиологии и других областей медицинских исследований [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В.* РАСПОЗНАВАНИЕ. Математические методы. Программная система. Применения. М.: Фазис, 2006.
2. *Дородницына В. В.* Применение диалоговой системы для решения медицинских задач прогнозирования и диагностики. М.: ВЦ АН СССР, 1985.

3. Zhuravlev Yu. I., Kuznetsova A. V., Ryazanov V. V., Botvin M. A. "The Use of Pattern Recognition Methods in Tasks of Biomedical Diagnostics and Forecasting," Pattern Recognition and Image Analysis, **3**, No. 2, v. 18. 195–200 (2008).

**Создание программного обеспечения
распределенных информационных систем
поддержки научных исследований**

**Development of distributed current research
information systems**

Серебряков В. А.

ВЦ РАН, Москва, Россия; serebr@ccas.ru

На протяжении последних лет в отделе систем математического обеспечения ВЦ РАН велись работы по созданию *Единого научного информационного пространства* (ЕНИП) РАН — интегрированного информационного пространства распределенных и локальных цифровых (электронных) ресурсов организаций РАН. В процессе этой работы был создан комплекс программных средств, обеспечивающий использование этих ресурсов и полнофункциональное управление ими. Основой предлагаемого решения является разработка и внедрение в организациях РАН единого подхода к информационному наполнению и интеграции существующих и вновь создаваемых ресурсов в ЕНИП РАН. Единое научное информационное пространство (информационную среду фундаментальных и прикладных исследований РАН) должны составлять всевозможные цифровые (электронные) ресурсы: информационные и вычислительные системы, Web-сайты, цифровые библиотеки, распределенные и локальные базы и банки данных, использующие как собственные принципы организации, так и технологии открытой архитектуры проекта ЕНИП РАН.

Основу единого информационного пространства РАН составляет *Информационная магистраль* ЕНИП РАН, представляющая собой

комплекс аппаратных, программных и организационных мер, обеспечивающих:

- формирование состава цифровых ресурсов и служб ЕНИП РАН;
- предоставление доступа к цифровым ресурсам и службам ЕНИП РАН;
- обеспечение защиты цифровых ресурсов и служб ЕНИП РАН;
- ведение и поддержка в актуальном состоянии метаданных системы;
- поиск по хранимой метаинформации и идентификация ресурсов;
- интеграцию ресурсов различных областей и отраслей знаний.

Информационная система Института РАН должна, с одной стороны, стать центром научно-информационного сервиса сотрудников Института, а с другой — обеспечивать полное представление информации о научной деятельности Института для мирового сообщества. Информационная система Института РАН должна представлять собой узел в распределенной архитектуре множества узлов — информационных систем Институтов РАН.

Приложения ЕНИП.

К настоящему времени имеется множество приложений разработанной системы. Среди них:

- Портал интеграции пространственных данных ГеоМета;
- Электронная библиотека Научное Наследие России;
- Система управления электронными библиотеками LibMeta;
- Порталы организаций РАН:
 - Отделение математических наук;
 - Уральское отделение РАН;
 - Институт США и Канады РАН;
 - Институт Научной Информации по Общественным Наукам РАН;
 - Библиотека по естественным наукам РАН

и другие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллектив авторов под редакцией Серебрякова В.А. Интегрированная система информационных ресурсов: архитектура, реализация, приложения. М.: ВЦ РАН, 2004.

2. Бездушный А.А., Бездушный А.Н., Серебряков В.А., Филиппов В.И. Интеграция метаданных Единого Научного Информационного Пространства РАН. М.: ВЦ РАН, 2006.
3. Бездушный А.А., Бездушный А.Н., Серебряков В.А., Нестеренко А.К., Сысоев Т.М., Теймуразов К.Б. Информационная WEB-система “Научный институт” на платформе ЕНИИ. М.: ВЦ РАН, 2007.

О выявлении активных индексов в задачах линейного программирования

On revealing active indices in the linear programming problems

Сухинин М. Ф.

РУДН, Москва, Россия; msukhinin@sci.pfu.edu.ru

Предложены эффективные методы выявления активных индексов (т. е. номеров нулевых координат) при численном решении больших задач линейного программирования. Это позволяет, например, в транспортных задачах не производить перевозки малых количеств грузов и, тем самым, снизить количество заданий транспортным службам, что несомненно является важным моментом при планировании перевозок. Приведены результаты численных экспериментов для восемнадцати транспортных задач, в которых 300 поставщиков и 800 потребителей, и двойственных к ним, где ограничения-равенства выполнены сначала с относительной погрешностью порядка 10^{-10} , а затем после замены малых координат вектора-решения нулями — с относительной погрешностью порядка 10^{-7} , что, по-видимому, вполне допустимо и в то же время значительно выигрывает по удобству реализации из-за отмененных, по существу, почти пустых перевозок. Отдельно приведены результаты для транспортной задачи, в которой 2020 поставщиков и 8090 потребителей с другими параметрами. Обсуждены различные способы сочетания точности плана с его легкостью.

Проблемы автоматизации проектирования вычислительных систем реального времени

Problems of CAD of real-time systems

Фуругян М. Г.

ВЦ РАН, Москва, Россия; rts@ccas.ru

Вычислительные системы реального времени предназначены для контроля и управления процессами в автоматизированных производствах, транспортных системах, системах производства энергии, в нефте- и газодобывающих производствах и многих других областях человеческой деятельности.

В секторе проектирования систем реального времени ВЦ РАН разработана инструментальная система автоматизации программирования вычислительных систем реального времени (САПР ВСРВ). Система предназначена для автоматизации проектирования и генерации систем реального времени, осуществляющих обработку циклически поступающей информации в темпе поступления при жестких временных ограничениях. Эта система, во-первых, позволяет в короткие сроки в автоматическом режиме проектировать из готовых прикладных модулей конкретную ВСРВ, описанную пользователем с помощью программы реального времени, и, во-вторых, заранее, т.е. до обработки информации в реальном времени, проводить оптимизацию вычислений. Система решает такие задачи, как разбиение программ на параллельные процессы, составление допустимого расписания выполнения процессов, синхронизация вычислений, динамическое распределение памяти и др. При разработке этой системы был получен ряд вспомогательных результатов, которые представляют отдельный теоретический и практический интерес. Например, были разработаны и реализованы управляющий монитор и наглядные языковые средства для описания циклической обработки информации, а также решены новые задачи составления расписаний функционирования ВСРВ для следующих случаев:

— требования на выполнение заданий поступают циклически с заданными периодами (разработан полиномиальный алгоритм, основан-

ный на сведении ее к задаче поиска максимального потока в сети специального вида);

- связи между процессорами образуют произвольный связный граф (разработан полиномиальный алгоритм, основанный на преобразовании расписания для полного графа в расписание для заданного неполного графа);

- учитываются издержки на обработку прерываний и переключений и ограничения на объем памяти процессоров (задача сведена к многопродуктовой потоковой задаче в сети специального вида);

- в некоторые неопределенные моменты времени могут поступать запросы на выполнение более приоритетных работ (задача сводится к решению антагонистической игры специального вида; разработан приближенный метод решения этой игры, основанный на аппроксимации ее конечными играми);

- часть работ допускает прерывания и переключения с одного процессора на другой, а часть — не допускает;

- длительности выполнения работ линейно зависят от количества выделенного им дополнительного ресурса.

Кроме того решены следующие задачи:

- разработаны эффективные эвристические алгоритмы для случая прерываемых работ, время работы которых в сотни, а в некоторых случаях в тысячи раз меньше времени работы точного алгоритма; в то же время в 95% экспериментах лучший из этих алгоритмов находил верное решение;

- решена задача синтеза, т.е. определяется множество производительностей процессоров, при которых существует допустимое расписание; это множество задается системой кусочно-линейных неравенств;

- для решения задач составления расписания без прерываний разработан метод агрегирования (последовательное разбиение задачи на подзадачи существенно меньшей размерности и формирование решения задачи из решений подзадач); при этом отклонение от точного решения не превышало 5%;

- для практического применения метода агрегирования при решении подзадач меньшей размерности и композиции решения исходной задачи из решений подзадач были разработаны различные приближенные полиномиальные и точные псевдополиномиальные алгоритмы;

— разработана подсистема организации рестартов для ВСРВ, позволяющая в случае возникновения сбоя определить те программные модули, которые подлежат повторному запуску; разработаны алгоритмы, позволяющие определить такое расположение модулей контроля, при котором математическое ожидание суммарного времени, затраченного на выполнение всех модулей (включая повторное их выполнение при возникновении ошибок), минимально.

Современные проблемы исследования операций Contemporary problems of operations research

Хачатуров В. Р.

ВЦ РАН, Москва, Россия

Исследование операций как научная дисциплина сформировалось более пятидесяти лет назад. Существуют различные толкования содержания этого научного направления. Приведем одно из них, принадлежащее крупному специалисту в этой области Н.Н. Воробьеву: “Исследование операций — построение, разработка и приложения математических моделей принятия решений. Содержанием теоретического аспекта исследования операций является анализ и решение математических задач выбора в заданном множестве допустимых решений элемента, удовлетворяющего тем или иным критериям оптимальности и называемого оптимальным решением задачи” (Математическая энциклопедия. 1979. Т. 2. С. 676.).

Существуют и другие определения, уточняющие или расширяющие это понятие, но основная суть в этом определении отражена. За прошедшие годы были разработаны различные методы исследования операций, многие из которых сформировались в самостоятельные научные направления. Перечислим основные методы, хотя есть опасность, что не все из них будут упомянуты. Это целый класс методов математического программирования (линейное, выпуклое, вогнутое, нелинейное, дискретное, параметрическое, стохастическое, динамическое, дробно-линейное и т.п.), многокритериальная оптимизация, за-

дачи нахождения максимума (минимума), теория игр, теория полезности и др. Разработанность этих методов неодинакова: наиболее разработанными из них являются линейное и выпуклое программирование.

Большинство задач исследования операций предъявляет высокие требования к техническому (hardware), программному (software) и алгоритмическому (brainware) обеспечению ЭВМ и, в свою очередь, влияет на развитие ЭВМ и формирование их парка. Сфера применения исследования операций включает в себя огромное число задач технических, технико-экономических, социально-экономических, региональных, что способствует улучшению качества принимаемых решений.

Большой вклад в развитие методов исследования операций сделан коллективом сотрудников Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН. В своих последних работах академик А.А. Дородницын перечислял и анализировал основные трудности, с которыми встречается исследователь при попытках применения методов исследования операций при решении сложных задач.

На основании большого опыта решения конкретных задач принятия решений и изучения этих работ нам удалось сгруппировать и сформулировать следующие крупные проблемы, которые сейчас стоят перед специалистами по исследованию операций, назвав их проблемами Дородницына.

Проблема 1. Научные основы формализованного построения математических моделей.

Проблема 2. Опосредованные методы математического моделирования на основе математической обработки накопленной информации.

Проблема 3. Технология совместного использования математического моделирования, статистики и распознавания образов.

Проблема 4. Обоснование полноты системы признаков, описывающих исследуемое явление.

Проблема 5. Принятие решений в псевдометрическом пространстве при наличии многих критериев.

Проблема 6. Обоснование применения математических закономерностей (формул, теорем и т.п.) в других отраслях знаний.

Проблема 7. Теоретические основы построения человеко-машинных систем для плохо формализуемых явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дородницын А.А.* Информатика: предмет и задачи // Кибернетика. Становление информ. М.: Наука, 1986. С. 22–28.
2. *Дородницын А.А.* Проблема математического моделирования в описательных науках // Кибернетика. 1983. № 4. С. 6–10.
3. *Хачатуров В.Р.* Человеко-машинные системы — теоретические основы, опыт разработки и перспективы // Проблемы прикладной матем. и информ. Часть II. Информ. М.: ВЦ РАН, 1992. С. 31–48.
4. *Хачатуров В.Р.* Проблемы математического моделирования в описательных науках и пути их решения // Вычислительная матем. и информ. М.: ВЦ РАН, 1996. С. 152–161.

Авторский указатель

Aleksandrov E. B.	165	Бродский Ю. И.	213, 215
Gatignol Ph.	69	Брушлинский К. В.	30
Gatignol R.	163	Брыкина И. Г.	32
		Бутузов В. Ф.	92
Kosenko I. I.	165	Вабищевич П. Н.	94
Onofri F.	73	Василевский Ю. В.	97
Pascal M.	71	Васильев Ф. П.	217
Radev S.	73	Власов В. И.	85, 87, 175
Slawianowski J. J.	74	Власов В. И.	34
Stepanov S. Ya.	76	Волков А. В.	98
		Воронцов К. В.	219
		Вышинский Л. Л.	221
Абрамов А. А.	79	Гаева З. С.	178
Агошков В. И.	189, 191	Гайфуллин А. М.	36
Азаренок Б. Н.	80	Галимьянова Н. Н.	223
Аксенов А. В.	82	Гаранжа В. А.	99
Албу А. Ф.	167	Голиков А. И.	226
Алексюк А. И.	160	Голубятников А. Н.	101
Антипин А. С.	217	Горшков А. Б.	34
Аристов В. В.	21, 23	Гребеников Е. А.	103
Артемяева Л. А.	217	Гулин А. В.	105
Архипов А. С.	25	Гусев А. В.	191
Архипов Б. В.	169	Гущин В. А.	180
Атамуратов А. Ж.	83	Давыдов А. А.	182
Бабаков А. В.	172	Данилов А. А.	97
Безродных С. И.	85, 87	Демьянов Ю. А.	38
Белотелов Н. В.	174	Дианский Н. А.	191
Белоцерковский О. М.	89	Диесперов В. Н.	28, 40
Бишаев А. М.	25	Дикусар В. В.	228
Богданов А. Н.	28	Дородницын А. В.	42
Боговский М. Е.	90	Дородницын В. А.	107
		Дымников В. П.	184

Егоров И. В.	43	Котеров В. Н.	169
Елкин В. И.	230	Крайко А. Н.	52
Жадан В. Г.	232	Кривцов В. М.	187
Жук В. И.	28, 45	Кузнецов М. М.	54
Жуков В. Т.	47	Куликовский А. Г.	57
Жура Н. А.	110	Курочкин С. В.	118
Забелок С. А.	21	Ларина И. Н.	58
Заворохин Г. Л.	111	Липатов И. И.	54
Залесный В. Б.	189, 191	Лотов А. В.	234
Земцова Н. И.	103	Лунев В. В.	34
Зубов В. И.	167	Малашенко Ю. Е.	237
Зубов Н. В.	228	Марчук Г. И.	189, 191
Зубцов А. В.	36	Матвеев И. А.	239
Иванов М. Я.	50	Матус П. П.	125
Игнатов П. А.	30	Меньшиков И. С.	241
Игнатьев А. Л.	223	Милявский В. В.	60
Ильин В. А.	112	Михайлов И. Е.	83
Ильин О. В.	23	Моисеев Е. И.	126
Каменев Г. К.	234	Молчанов И. Н.	243
Капорин И. Е.	114	Назаров А. И.	111
Капырин И. В.	97	Назарова И. А.	237
Карамзин Ю. Н.	185	Нейланд В. Я.	62
Керимов М. К.	115	Нечепуренко Ю. М.	128
Кобельков Г. М.	116	Никитин К. Д.	97
Ковалев Р. В.	34	Новиков А. В.	43
Козлов В. В.	52	Ольшанский М. А.	130
Козлов М. В.	237	Павловский Ю. Н.	244
Коновалов М. Г.	237	Пальцев Б. В.	131
Коньшин И. Н.	117, 223	Пармузин Е. И.	189
Конюхова Н. Б.	118	Пархоменко В. П.	192
Копачевский Н. Д.	120	Перова Л. В.	140
Корнев А. А.	123	Петров А. А.	245
Королев Г. Л.	40	Петров И. Б.	194
Корпусов М. О.	124	Пирумов У. Г.	195

Поляков Д. Б.	125	Ульянова В. И.	79
Поляков С. В.	185	Усатюк В. В.	207
Попов В. А.	133		
Попов И. В.	135	Федирко В. А.	185
Попов С. П.	198	Федоров А. В.	43
Поспелов И. Г.	246	Феодоритова О. Б.	47
Посыпкин М. А.	223	Флеров Ю. А.	221
		Фортов В. Е.	60
Радкевич Е. В.	62	Фролова А. А.	21, 60
Разжевайкин В. Н.	199	Фрязинов И. В.	135
Рамазанов М. Д.	137	Фужита Яшима Х.	175, 209
Рахматуллин Д. Я.	139	Фуругян М. Г.	254
Рогов Б. В.	32		
Рыков В. А.	58	Хачатуров В. Р.	256
		Хищенко К. В.	60
Саранча Д. А.	201	Холодов А. С.	154
Свешников А. Г.	124, 140	Холодов Я. А.	154
Сенько О. В.	249	Холмеева А. А.	126
Сергеев В. С.	143		
Серебряков В. А.	251	Цурков В. И.	156
Сигал И. Х.	223		
Скороходов С. Л.	175	Чарахчян А. А.	60
Скубачевский А. Л.	133	Черемисин Ф. Г.	64
Соколов Л. А.	62	Чернышев А. В.	28
Солбаков В. В.	169	Четверушкин Б. Н.	182
Соловьев В. Р.	187	Чмыхова Н. А.	30
Соловьев М. Б.	145	Чугайнова А. П.	57
Сомов Б. В.	85	Чураков Д. А.	34
Судоков В. Г.	43		
Сумбатов А. С.	147	Шалаев В. И.	66
Сухинин М. Ф.	253	Шананин А. А.	178
Сушкевич Т. А.	204	Шапочкин Д. А.	169
		Шведченко В. В.	62
Тарко А. М.	207	Шильников Е. В.	182
Тер-Крикоров А. М.	149	Шишкин Г. И.	158
Тирский Г. А.	32	Шишкина Л. П.	158
Толстых А. И.	150	Шкадов В. Я.	160
Тыртышников Е. Е.	152	Шкадова В. П.	160
		Шуршалов Л. В.	60

Шутяев В. П.	189
Юхно Л. Ф.	79
Яковенко Г. Н.	211

Author index

Abramov A. A.	79	Diansky N. A.	191
Agoshkov V. I.	189, 191	Diesperov V. N.	28, 40
Aksenov A. V.	82	Dikusar V. V.	228
Albu A. F.	167	Dorodnitsyn A. V.	42
Aleksandrov E. B.	165	Dorodnitsyn V. A.	107
Aleksyuk A. I.	160	Dymnikov V. P.	184
Antipin A. S.	217	Egorov I. V.	43
Arhipov A. S.	25	Elkin V. I.	230
Aristov V. V.	21, 23	Fedirko V. A.	185
Arkhipov B. V.	169	Fedorov A. V.	43
Artemieva L. A.	217	Feodoritova O. B.	47
Atamuratov A. G.	83	Flerov Yu. A.	221
Azarenok B. N.	80	Fortov V. E.	60
Babakov A. V.	172	Fourougian M. G.	254
Belotelov N. V.	174	Frolova A. A.	21, 60
Belotserkovskii O. M.	89	Fryazinov I. V.	135
Bezrodnykh S. I.	85, 87	Fujita Yashima H.	175, 209
Bishaev A. M.	25	Gaeva Z. S.	178
Bogdanov A. N.	28	Gaifullin A. M.	36
Bogovskii M. E.	90	Galimyanova N. N.	223
Brodsky Yu. I.	213, 215	Garanzha V. A.	99
Brushlinsky K. V.	30	Gatignol Ph.	69
Brykina I. G.	32	Gatignol R.	163
Butuzov V. F.	92	Golikov A. I.	226
Charakhch'yan A. A.	60	Golubiatnikov A. N.	101
Chernyshev A. V.	28	Gorshkov A. B.	34
Chetverushkin B. N.	182	Grebenikov E. A.	103
Chmykhova N. A.	30	Gulin A. V.	105
Chugainova A. P.	57	Gusev A. V.	191
Churakov D. A.	34	Gushchin V. A.	180
Danilov A. A.	97	Ignatov P. A.	30
Davydov A. A.	182	Ignatyev A. L.	223
Demyanov Yu. A.	38		

Il'in V. A.	112	Marchuk G. I.	189, 191
Ilyin O. V.	23	Matus P. P.	125
Ivanov M. Ya.	50	Matveev I. A.	239
Kamenev G. K.	234	Menshikov I. S.	241
Kaporin I. Ye.	114	Mikhailov I. E.	83
Kapryin I. V.	97	Milyavskii V. V.	60
Karamzin Yu. N.	185	Moiseev E. I.	126
Kerimov M. K.	115	Molchanov I. N.	243
Khachaturov V. R.	256	Nazarova I. A.	237
Khishchenko K. V.	60	Nazarov A. I.	111
Kholodov A. S.	154	Nechepurenko Yu. M.	128
Kholodov Ya. A.	154	Neyland V. Ya.	62
Kholomeeva A. A.	126	Nikitin K. D.	97
Kobelkov G. M.	116	Novikov A. V.	43
Konovalov M. G.	237	Olshanskii M. A.	130
Konshin I. N.	117, 223	Onofri F.	73
Konyukhova N. B.	118	Paltsev B. V.	131
Kopachevsky N. D.	120	Parkhomenko V. P.	192
Kornev A. A.	123	Parmuzin E. I.	189
Korolev G. L.	40	Pascal M.	71
Korpusov M. O.	124	Pavlovsky Yu. N.	244
Kosenko I. I.	165	Peroval L. V.	140
Koterov V. N.	169	Petrov A. A.	245
Kovalev R. V.	34	Petrov I. B.	194
Kozlov M. V.	237	Pirumov U. G.	195
Kozlov V. V.	52	Polyakov D. B.	125
Kraiko A. N.	52	Polyakov S. V.	185
Krivtsov V. M.	187	Popov I. V.	135
Kulikovskii A. G.	57	Popov S. P.	198
Kurochkin S. V.	118	Popov V. A.	133
Kuznetsov M. M.	54	Pospelov I. G.	246
Larina I. N.	58	Posypkin M. A.	223
Lipatov I. I.	54	Radev S.	73
Lotov A. V.	234	Radkevich E. V.	62
Lunev V. V.	34	Rakhmatullin D. Ya.	139
Malashenko Yu. E.	237		

Ramazanov M. D.	137	Ter-Krikorov A. M.	149
Razzhevaikin V. N.	199	Tirskiy G. A.	32
Rogov B. V.	32	Tolstykh A. I.	150
Rykov V. F.	58	Tsurkov V. I.	156
		Tyrtysnikov E. E.	152
Sarancha D. A.	201		
Senko O. V.	249	Ul'yanova V. I.	79
Serebryakov V. A.	251	Usatyuk V. V.	207
Sergeev V. S.	143		
Shalaev V. I.	66	Vabishchevich P. N.	94
Shananin A. A.	178	Vasilyev F. P.	217
Shapochkin D. A.	169	Vassilevski Yu. V.	97
Shilnikov E. V.	182	Vlasov V. I.	85, 87, 175
Shishkina L. P.	158	Vlasov V. I.	34
Shishkin G. I.	158	Vorontsov K. V.	219
Shkadova V. P.	160	Vyshinskiy L. L.	221
Shkadov V. Ya.	160		
Shurshalov L. V.	60	Wolkov A. V.	98
Shutyaev V. P.	189		
Shvedchenko V. V.	62	Yakovenko G. N.	211
Sigal I. Kh.	223	Yukhno L. F.	79
Skorokhodov S. L.	175		
Skubachevskii A. L.	133	Zabelok S. A.	21
Slawianowski J. J.	74	Zalesny V. B.	189, 191
Sokolov L. A.	62	Zavorokhin G. L.	111
Solbakov V. V.	169	Zemtsova N. I.	103
Soloviev M. B.	145	Zhadan V. G.	232
Soloviev V. R.	187	Zhukov V. T.	47
Somov B. V.	85	Zhuk V. I.	28, 45
Stepanov S. Ya.	76	Zhura N. A.	110
Sudokov V. G.	43	Zubov N. V.	228
Sukhinin M. F.	253	Zubov V. I.	167
Sumbatov A. S.	147	Zubtsov A. V.	36
Sushkevich T. A.	204		
Sveshnikov A. G.	124, 140		
Tarko A. M.	207		
Tcheremissine F. G.	64		