

# РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Российской академии наук  
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН**

«УТВЕРЖДАЮ»  
Директор ВЦ РАН  
академик РАН,  
д. ф. - м. н., профессор  
Ю. Г. Евтушенко

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

## **Тематический план учебных занятий и семинаров**

**по теме**

**«Определение достаточных условий существования решений в  
неклассических моделях механики сплошной среды»**

для подготовки аспирантов по специальности  
05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы  
программ

Москва 2013

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Целями и задачами курса являются:

- Ознакомление с основами прикладных теорий адгезии деформируемых сред: понятие адгезии, энергии адгезии, история развития моделей адгезии (атомистические модели, модели молекулярной динамики, пружинные модели, модели дополнительных адгезионных слоев, Модель Лапласа –Янга и ее обобщения).
- Неклассические краевые задачи для прикладных моделей адгезии в механике сплошных сред
- ознакомление с механикой деформируемых гетерогенных сред - важность моделей адгезии; изучение моделей деформируемых сред с микро/наноструктурой, с учетом моделирования адгезионных свойств в механике деформируемых сред;
- построение прикладных градиентных вариантов теории упругости, обеспечивающих детализированное описание спектра когезионных и адгезионных взаимодействий
- построение прикладных вариантов теории и адгезионных взаимодействий
- углубленное изучение вариационных методов построения моделей неоднородных сред с расширенным спектром взаимодействий в объеме, на поверхности и на ребрах;
- обобщение вариационных теорем упругости, углубленный анализ определяющих соотношений, в объеме, на поверхности и на ребрах; основные вариационные теоремы механике сред с адгезионными свойствами поверхностей
- Адгезия в механике гетерогенных структур, особенности краевых задач с учетом адгезионных свойств на границах.
- Исследование существования слабых решений краевых задач с учетом адгезии на границах.
- Исследование существования классических решений краевых задач с учетом адгезии на границах.
- Численные методы решения задач градиентных теорий упругости с учетом адгезионных свойств на основе методов сглаживания (интегральные методы выполнения части краевых условий)
- Приложении теории адгезии к полимерным нанокомпозитам, наномодифицированным структурам (сплавам), керамикам, тонкопленочным структурам
- Освоение методов осреднения для определения эффективных механических свойств структурированных материалов с учетом адгезионных свойств,
- освоение методов моделирования физико-механических процессов в сопряженных задачах градиентной упругости, связанных с изучением влияния масштабных и поверхностных эффектов для гетерогенных материалов (связанные проблемы теплопроводности, термоупругости и пр.), важных как для естественнонаучных проблем, так и для прикладных промышленных задач.

## **2. МЕСТО КУРСА ЗАНЯТИЙ «Определение достаточных условий существования решений в неклассических моделях механики сплошной среды» В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ ПОСЛЕВУЗОВСКОГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Курс «Определение достаточных условий существования решений в неклассических моделях механики сплошной среды» относится к дисциплинам по выбору учебного плана подготовки аспирантов по научной специальности 01.01.03 «математическая физика», 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и 01.02.04 «механика деформируемого твердого тела».

Для успешного усвоения курса аспиранту необходимо знать следующие дисциплины в рамках университета:

- «Математический анализ» и «функциональный анализ»;
- «Линейная алгебра и тензорный анализ»;
- «Механика сплошной среды», включая «теорию упругости», «теорию пластичности» и «механику разрушения»;
- «Механика композиционных материалов»
- «Термодинамика»;
- «Уравнения математической физики»;
- «Численные методы»

Для успешного изучения курса аспиранту необходимо уметь читать и понимать научную литературу по данной тематике как на русском, так и на английском языке.

Получаемые в данном курсе знания будут востребованы при подготовке к кандидатскому экзамену по научной специальности 01.01.03 «математическая физика», 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», 01.02.04 «механика деформируемого твердого тела». а также в научно-исследовательской работе и при выполнении диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

## **3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

В результате изучения курса «Определение достаточных условий существования решений в неклассических моделях механики сплошной среды» аспирант должен:

- знать современное состояние и основные результаты, полученные к настоящему времени в мировой научной литературе, четко понимать основные проблемы механики деформируемых гетерогенных сред с развитой поверхностью раздела фаз, ориентироваться в понимании наиболее важных и актуальных областей приложения;
- понимать связь градиентных вариантов теории упругости с классической теорией и с другими современными естественнонаучными дисциплинами;
- знать современные методы спектрального анализа, методы математической физики, численные методы решения задач прикладной теории упругости, методы механики композитов, связанные с определением эффективных свойств, включая методы асимптотического усреднения, энергетических методов усреднения, методов Эшелби и пр.);
- иметь опыт самостоятельных исследований и, используя полученные знания, создавать модели различных механических и физико-механических процессов и явлений, а также владеть разнообразными методами эффективного решения соответствующих математических задач;

- владеть современным языком научных публикаций и уметь грамотно излагать полученные результаты и оформлять их в виде научных статей.

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА КУРСА

Курс посвящен освоению современных континуальных теорий адгезии в механике деформируемых сред, позволяющих уточнить описание неоднородных структур, дать для них расширенное описание спектра адгезионных взаимодействий, и развить методы учета, адгезионных характеристик на деформативные свойства неоднородных материалов с микро/наноструктурой, исследовать новый класс неклассических краевых задач, связанный с дополнительными слагаемыми, появляющимися за счет учета адгезии в краевых условиях, проанализировать вопросы существования и единственности решения этого класса задач для гармонических двумерных, бигармонических краевых задач, а также трехмерных краевых задач для уравнений Ламе.

Большое внимание уделено современным достижениям механики деформируемого твердого тела, в том числе механике гетерогенных материалов, вариационным методам моделирование в механике деформируемых сред, вариационным моделям деформирования. Обсуждаются определяющие уравнения для неклассических моделей, дается анализ структуры обобщенных модулей упругости для градиентных моделей. Изложены основы континуальной теории адгезии для деформируемых сред, обобщающие модель Лапласа – Янга, даны ее обобщения и на градиентные модели, обсуждаются прикладные задачи в механике неоднородных сред, где учет адгезионных эффектов необходим. Излагаются методы определения эффективных физико-механических свойств в гетерогенных структурах, включая энергетические методы, методы двух и трех фаз (метод самосогласованных фаз Эшелби), асимптотический метод.

Устанавливаются диапазоны параметров в моделях адгезии как для класса регулярных (классических) решений, так и для класса слабых решений (обобщенных решений) позволяющие реализовывать прикладные модели адгезии для определения и прогноза эффективных модулей упругости, эффективных коэффициентов теплопроводности, коэффициентов температурного расширения, диссипативных свойств наполненных композитов, керамик, поликристаллических металлических сплавов армированных нановключениями и пр.

Обсуждаются численные методы, особенности их при моделировании гетерогенных структур с развитой внутренней границей для прогноза влияния на свойства структур технологических параметров и оценки накопления поврежденности, связанной адгезионной поврежденностью.

##### 4.1. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ КУРСА

№ п/п	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1.	Введение. Основы механики сплошных сред Введение в континуальную теорию адгезии. Описание основных	Понятие сплошного тела. Гипотеза сплошности. Деформация элемента сплошной среды. Тензоры деформаций, тензоры свободных и стесненных деформации. Условия совместности деформаций, условия совместности Папковича, условия Сен-Венана, формулы Чезаро. Тензоры напряжений, определяющие соотношения, тензор модулей упругости. Модели адгезии типа Лапласа – Янга. Капиллярность, мениск, смачиваемость, давление Лапласа.	

	адгезионных эффектов в средах		
2.	Кинематические модели сред с усложненными свойствами на поверхности и на ребрах	<p>Формулировка последовательности кинематических моделей на поверхности и ребрах (определение менисковых эффектов):</p> <p>1. модели адгезии для классической теории упругости- модель идеальной адгезии, основанная на кинематических соотношениях Коши.</p> <p>2. модели адгезии сред с полями дефектов: модель сред с сохраняющимися дислокациями-модель Папковича, модель сред с полями сохраняющимися дисклинациями модель Сен_Венана и пр. Иерархия моделей адгезии.</p> <p>Определение списка аргументов для рассматриваемых моделей с целью формулировки принципа возможных перемещений и для построения вариационных моделей адгезии</p>	
3.	Вариационная формулировка градиентных моделей адгезии	<p>Общая характеристика градиентных теорий адгезии для моделей Коссера, Миндлина, Тупина, Аэро-Кувшинского.</p> <p>Формулировка вариационных уравнений в вариациях на основе метода множителей Лагранжа, определение спектра внутренних усилий для обобщенных моделей сред, определяющие соотношения, условия потенциальности и структура тензоров обобщенных модулей упругости. Полная вариационная постановка, краевые задачи для моделей сред с обобщенным спектром взаимодействий, общий анализ градиентных моделей сред. Обобщение теорем Нейбера-Папковича для градиентных сред, представление общего решения через потенциалы уравнений Лапласа и Гельмгольца. Гипотезы Аэро-Кувшинского.</p>	
4.	Континуальная теория адгезионных взаимодействий деформируемых сред. Некоторые приложения.	<p>Вариационная модель адгезионных взаимодействий, определение кинематики и спектра поверхностных усилий.</p> <p>Анализ адгезионных модулей, структура модулей, обобщение модели Лапласа Янга, тестовые задачи: поверхностное натяжение, капиллярность, смачиваемость, мениск, уравнение Юнга.</p> <p>Теоремы существования и единственности в моделях сред с адгезионно-активными поверхностями.</p> <p>Интегральные теоремы Теорема Клапейрона, теорема Дюпре.</p> <p>Контактные взаимодействия с учетом адгезионных взаимодействий.</p> <p>Обобщенные модели адгезии сред с полями дефектов-дислокаций, модели адгезии с «поврежденной» поверхностью.</p> <p>Среды Папковича-Коссера с адгезионными свойствами.</p> <p>Особенности учета адгезионных взаимодействий в градиентных теориях упругости, идеальная и «поврежденная» адгезия.</p> <p>Поверхностные волны в средах с адгезионными свойствами, теория тонких пленок и пластин с адгезионно- активными свойствами.</p>	
5.	Условия существования и единственности слабых решений.	<p>Исследование неклассических краевых задач в теории адгезии для слабых решений (обобщенных). Условия и существования решений для гармонических плоских задач, для бигармонических плоских задач, для трехмерных задач с оператором Ламе.</p>	
6	Условия существования и единственности регулярных решений.	<p>Теоремы существования решения для краевых задач в теории идеальной адгезии для круга, полуполосы последовательно для гармонических задач, бигармонических задач.</p> <p>Теоремы о единственности решений. Определение диапазона параметров в моделях адгезии, допустимых для существования решений. Физическая трактовка результатов.</p>	
6.	Приложение	Методы определения эффективных свойств: метод	

моделей адгезии для описания свойств гетерогенных материалов	энергетического сглаживания, метод самосогласованных фаз Эшелби. Численный анализ сходимости решений полученных с использованием метода асимптотического осреднения с привлечением энергетического сглаживания. Наполненные композиты с микро/ нановключениями, влияние адгезионных масштабных эффектов на эффективные механические свойства.	
--	---	--

## 4.2. СТРУКТУРА КУРСА

Вид работы	Трудоемкость, часов
<b>Общая трудоемкость</b>	<b>180</b>
<b>Аудиторная работа</b>	<b>36</b>
<i>Лекции</i>	<b>36</b>
<i>Практические занятия</i>	
<i>Лабораторные занятия</i>	
<b>Самостоятельная работа:</b>	<b>144</b>
<i>Самостоятельное изучение разделов</i>	
<i>Самоподготовка (проработка и изучение лекционного материала и учебно-монографического материала, выполнение практических занятий)</i>	144
<b>Вид итогового контроля (зачет, экзамен)</b>	<b>Кандидатский экзамен</b>

### Трудоемкость отдельных разделов курса

№ темы и название	Общее число часов	Аудиторная работа (лекции)	Внеаудиторная самостоятельная работа
1. Основы механики сплошных сред	20	4	16
2. Введение в вариационные методы механики, вариационные методы моделирования	20	4	16
3. Основные положения теории упругости	20	4	16

4. Основные адгезионные эффекты в механике сред, понятия об атомистических моделях адгезии, континуальная модель Лапласа-Янга	20	4	16
5. Обобщенная вариационная модель Лапласа -Янга	20	4	16
6. Условия существования слабых решений для моделей Лапласа - Янга	20	4	16
7. Теоремы существования регулярных решений для моделей Лапласа -Янга	20	4	16
8. Теоремы единственности регулярных решений для моделей Лапласа -Янга	20	4	16
9. Об особенностях численной реализации краевых задач в теории адгезии деформируемых сред тела	20	4	16
Всего (зач. ед. (часов))	180 час	36 час	144 час

## **5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕТНО-МЕТАДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

### **Форма контроля знаний:**

Кандидатский экзамен по специальности

### **Контрольно-измерительные материалы**

На кандидатском экзамене соискатель должен продемонстрировать знания в объеме основной программы кандидатского экзамена по научной специальности 01.02.04 «механика деформируемого твердого тела», гибкое владение современными методами математического анализа, математической физики, методами спектрального анализа, умение формулировать математические модели механических проблем, формулировать краевые задачи, а также способность находить оптимальный и адекватный аппарат эффективного исследования и решения возникающих задач.

### **Контрольные вопросы для программы**

1. Способы описания деформации сплошного тела. Тензоры деформации.
2. Соотношения Коши, соотношения совместности Папковича и Сен-Венана, свободные и стесненные деформации. Кинематические модели сред теории упругости, сред с полями дефектов, градиентной упругости.
3. Определяющие соотношения, тензор напряжений, тензоры модулей упругости четвертого ранга.
4. Вариационные метода построения моделей адгезионных взаимодействий. Принцип возможных перемещений, вариационный принцип Лагранжа, вариационно-кинематический принцип. Вариационные модели теории адгезионных взаимодействий.

Обобщенная модель Лапласа –Янга. Структура модулей упругости в модели «идеальной» теории

5. Краевые задачи теории упругости, уравнения Ламе, Краевые задачи градиентной упругости, неклассические краевые задачи в теории адгезии Лапласа Янга. Теорема Нейбера- Папковича, обобщение теоремы Нейбера- Папковича для градиентной упругости и теории адгезии.
6. Краевые задачи для гармонических задач, неклассические краевые задачи адгезии.
7. Краевые задачи теории адгезии для бигармонического уравнения.
8. Трехмерные краевые задачи теории упругости с адгезионными краевыми условиями.
9. Методы математического анализа, математической физики и спектрального анализа, метод разделения переменных, интегральное преобразование Гильберта, интегральное преобразование Фурье.
10. Метод осреднения в механике композитов. Энергетические методы, метод Эшелби трех фаз, асимптотический метод осреднения.
11. Эффективные свойства наполненных композитов, масштабные эффекты, эффект «насыщения».
12. Градиентная термоупругость и теплопроводность. Адгезионные модели и эффект Капицы
13. Адгезионные эффекты в теории тонких пленок и пластин.

## 6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

14. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М., Мир, 1982, 334 с.
15. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.Изд. Иностран. Лит.1963, 247 с.
16. Миндлин, Р.Д. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости Р.Д. Миндлин, Г.Ф. Тирстен// Механика. – 1964. – Т.86. – № 4. – С. 80–114.
17. Эринген, А.К. Теория микрополярной упругости / А.К. Эринген // Разрушение. – М.: Мир. –1975. – Т. 2. – С. 646–751.
18. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой: Нелокальная теория упругости/ И.А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
19. Аэро, Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // Физ. тверд. тела. – 1960. – Т. 11. – Вып.7. – С.1399-1409.
20. Кувшинский, Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего»вращения / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // Физ. тверд. тела. – 1963. – Т. 5. – Вып. 9. –С. 2591–2598.
21. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984, 352с.
22. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М., Мир,1984, 472 с.
23. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. – М.: Наука, 1985.
24. M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, A continuum theory of elastic material surfaces, Arch. Ration. Mech. Anal. 1975, 57(4), 291–323
25. M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, Addenda to our paper A continuum theory of elastic material surfaces, Arch. Ration. Mech. Anal. 1975, 59(4), 389–390.
26. Ya. S. Podstrigach and Ya. Z. Povstenko, Introduction to Mechanics of Surface Phenomena in Deformable Solids (in Russian), (Naukova Dumka, Kiev, 1985).
27. Ya.Z. Povstenko, Theoretical investigation of phenomena caused by heterogeneous surface tension in solids, J. Mech. Phys.Solids, 1993. 41(9), 1499–1514.
28. P. Podio-Guidugli and G.V. Cifarelli, Surface interaction potentials in elasticity, Arch. Ration. Mech. Anal.1990. 109(4), 343–383.
29. D. J. Steigmann and R.W. Ogden, Elastic surface-substrate interactions, Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Eng. Sci. 1982, 455, 437–474.

30. H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang, and B. L. Karihaloo, Size-dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress, *J. Mech. Phys. Solids*. 2005, 53(7), 1574–1596.
31. H. L. Duan, J. Wang, and B. L. Karihaloo, Theory of Elasticity at the Nanoscale, in: *Advances in Applied Mechanics*. 2008, 1–68.
32. Sharma, P., Ganti, S., Bhate, N., Effect of surfaces on the size-dependent elastic state of nanoinhomogeneities. *Appl. Phys. Lett.* 2003, 82, 535–537.
33. P. Sharma, S. Ganti, Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface. Interface Energies. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 71, 663–671
34. Benveniste, Y., Miloh, T., Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech.Mater.* 2001. 33, 309–323.
35. Benveniste, Y., A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media. *J. Mech. Phys. Solids*. 2006, 54, 708–734.
36. Hashin, Z., 2002. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*. 2006, 50, 2509–2537.
37. Wang, J., Duan, H.L., Zhang, Z., Huang, Z.P., An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites. *Int. J. Mech. Sci.* 2005, 47, 701–708.
38. Cuenot, S., Frertigny, C., Demoustier-Champagne, S., Nysten, B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Phys. Rev. B* 69, 2004, 165410.
39. Белов П. Лурье С. Теория идеальных адгезионных взаимодействий// *Механика композиционных материалов и конструкций*. (2007), 13 (4), 545-561.
40. Еремеев В.А., Альтенбах Х., Морозов Н.Ф. О влиянии поверхностного натяжения на эффективную жесткость наноразмерных пластин // *Доклады РАН*. 2009. 424(5), 618–620.
41. Альтенбах Х., Еремеев В.А., Морозов Н.Ф. Линейная теория оболочек при учете поверхностных напряжений // *Доклады РАН*. 2009, 429(4), 472–476.
42. Ma, X.-L. Gao H.M., Reddy J.N., A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2008, 56, 3379–3391
43. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. “Gradient theory of media with conserved dislocations. Particular models: generalized Cosserats media model with surface effects, porous media, media with free forming (media with “twinning”), generalized pseudo-continuum”, in book *Mechanics of Generalized Continua: A hundred years after the Cosserats*, Springer, 2010, 110-119.
44. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L. P. On the existence of solution in the linear elasticity with surface stresses. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. 2010, 90(3), 231–240
45. Моисеев Е.И., Лурье С.А., Нефедов П.В. Об условиях существования решения для краевых задач в моделях адгезионных взаимодействий// *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2013, 19 (1), С. 545-561.
46. С.А.Лурье, Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. Масштабные эффекты в механике сплошных сред. материалы с микро и наноструктурой. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011.

## 7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

**Необходимое оборудование для лекций и практических занятий:** Компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система)

Программу составил проф. С.А. Лурье