УДК 531.36, 334.01

# О РАЧИТЕЛЬНОМ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

А.А.Буров

*Вопрос о рачительном и нерачительном хозяйствовании рассматривается с точки зрения классической механики. Предлагается подход к его описанию с помощью аналога уравнений Ньютона и уравнений Лагранжа второго рода, дается экономическая трактовка фундаментальных понятий механики таких, например, как кинетическая и потенциальная энергия.*

*В 2009 году исполнилось сто лет с выхода знаменитой публикации Леона Вальраса "Экономика и механика" [1]. В этой своей последней работе Л.Вальрас еще раз сделал попытку найти аналоги между законами поведения хозяйствующих субъектов и законами механики. Такая естественная идея, прежде всего, попытка построения той или иной аксиоматики, позволяющей так или иначе описывать производство и потребление, восходящая, вероятно, к работам Адама Смита, достаточно широко представлена в исследованиях современных экономистов [2–9]. В частности, большое внимание уделяется уравнениям, возникающим как уравнения экстремалей дисконтированного функционала полезности. Такие уравнения хорошо известны в механике – они представляют собой уравнения Гамильтона с диссипативными силами специального вида, определенными способом введения дисконтирования. При их исследовании, в частности, ставится вопрос изучения регулярного и хаотического поведения, установившихся "движений" и их устойчивости. При этом, задача производства, как правило, формулируется так ( [10]): "выбрать норму накопления $s$ так, чтобы* максимизировать приведенное потребление[1] *на плановом периоде".*

*В то же время, скорее всего именно "рыночная" ориентированность предлагаемых моделей не дала возможности вычленить простую и понятную аксиоматику, аналогичную ньютоновской, известной из механики – во главу исследований ставится наличие товарного обмена, максимизация прибыли и прочие факторы, затеняющие смысл производства и потребления, как элементов человеческого бытия. Более того, как на то указывают, например, результаты [9, 11], правильное описание больших экономических систем, в которых существенна роль игрового элемента, еще более усугубляемая наличием денег в их современном смысле, требует принципиально иного подхода к попыткам статистического описания материальной составляющей современного бытия.*

*При наличии "диссипации" - будь она фискального происхождения или порождена устареванием, "утруской и усушкой" – предлагаемая аксиоматика никак не может покинуть рамок "аристотелевой аксиоматики механики", согласно которой для поддержания движения требуется постоянное приложение силы к движущемуся объекту. Попытке преодолеть имеющееся положение вещей посвящена настоящая работа.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00536-а, 12-08-00637-а.*

**Ключевые слова:** рачительный хозяин, кинетическая энергия, потенциальная энергия, уравнения Ньютона, уравнения Лагранжа, положение равновесия, периодическое движение, многочастотные колебания.

**1. Постановка задачи. Пространство конфигураций.** Рассмотрим хозяйственную деятельность рачительного хозяина (РХ) с точки зрения классической механики. Под рачительностью будем понимать такое поведение хозяина, при котором

[1] выделено нами

вся его хозяйственная деятельность ориентирована на то, чтобы гарантировать свои производство и потребление, не выходя за рамки замкнутой системы домашнего хозяйства. Иными словами, в идеале РХ организует свою жизнь и свою хозяйственную деятельность вне зависимости от какого бы то ни было товарообмена, т.е. ведет натуральное хозяйство. В то же время, если хозяину не удается организовать свои дела так, чтобы его хозяйствование можно было назвать рачительным, то будем называть такого хозяина нерачительным (НРХ).

Конфигурационное пространство. Пусть события развиваются в *пространстве запасов* $\mathcal{X}$ размерности $n$ и состоят в потреблении и производстве продуктов, количество которых в кладовой определяется векторной величиной $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Быстрота изменения компонент вектора $\mathbf{x}$, т.е. разница между быстротой производства и быстротой потребления продуктов $x_i$, $i = 1, \ldots, n$, определяется вектором $\mathbf{v} = (v_1, \ldots v_n)$, таким что $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$. Таким образом если $v_i < 0$, то потребление происходит быстрее чем производство, и количество $i$-го продукта в кладовой убывает, в то время как при $v_i > 0$ $i$-ый продукт производится быстрее, чем потребляется, и кладовая наполняется этим продуктом.

*Примечание 1.* Пространство $\mathcal{X}$ аналогично конфигурационному пространству в механике. Заметим, что в рамках данного рассмотрения нет и речи о том, что имеется некоторое количество хозяев, осуществляющих деятельность в одном и том же, общем для всех них конфигурационном пространстве. Грубо говоря, хотя картошка в моей кладовой идентична по потребительским свойствам картошке в кладовой соседа, у меня нет никаких оснований и никакой возможности распоряжаться соседской картошкой. Этим отличается представление о конфигурационном пространстве от того, что принято в классической механике, когда предполагается, что движение осуществляется в общем для всех точек однородном трехмерном евклидовом пространстве.

“Первый закон Ньютона”. При отсутствии внешних воздействий натуральное хозяйство пребывает в состоянии равновесия. В таком состоянии количество производимого и количество потребляемого равны между собой в любой момент времени.

“Второй закон Ньютона”. “Уравнения Ньютона”. Будем считать, что свои привычку работать и привычку потреблять всякий хозяин описывает функцией $T = T(\mathbf{v}, \mathbf{q})$, аналогичной кинетической энергии в классической механике. Как и в механике, можно считать, что

$$T(0, \mathbf{q}) = 0, \quad T = T(\mathbf{v}, \mathbf{q}) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} \neq 0, \qquad (1.1)$$

хотя это совершенно необязательно. Так, для систем, которые по аналогии с механикой будут называться *натуральными,*

$$T(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v}\right), \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{m}(\mathbf{q})$ – “тензор инерции” хозяина, т.е. величина, описывающая его привычки в отношении производства и потребления. Тензор инерции в общем случае будем считать зависящим от состояния запасов $\mathbf{q}$ и, быть может, от времени. В простейшем случае для натуральных систем

$$T(q) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2. \qquad (1.3)$$

Можно ввести аналог понятия количества движения

$$\mathbf{p} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}, \qquad (1.4)$$

экономическая интерпретация которого требует отдельного обсуждения. Так, в случае натуральной системы

$$\mathbf{p} = \mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}. \tag{1.5}$$

*П р и м е ч а н и е.* Из специальной теории относительности можно заимствовать функцию $T$ в виде

$$T(\mathbf{q}) = -E\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v})}{E}}, \tag{1.6}$$

где $E$ - постоянная, имеющая ту же размерность, что и $T$. При этом импульс примет вид

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{(\mathbf{m}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v})}{E}}} \tag{1.7}$$

Будем считать, что состояние кладовой любого хозяина описывается функцией $U = U(\mathbf{q})$, определенной в пространстве запасов и аналогичной потенциальной энергии в классической механике. Такая функция, например, может иметь вид

$$U(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o\right), \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^o\right)\right), \tag{1.8}$$

где $\mathbf{q}^o$ – то самое равновесие, которое возникает в формулировке “первого закона Ньютона”.

Динамика производства и потребления описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}, \quad L = T - U. \tag{1.9}$$

Так как функция Лагранжа $L$ предполагается не зависящей явно от времени, то уравнение ( 1.9) допускает первый интегралБ известный как интеграл Пенлеве – Якоби – обобщённый интеграл энергии

$$\mathcal{J}_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v}\right) - L = h. \tag{1.10}$$

В простейшем случае, когда “кинетическая энергия” определена соотношением ( 1.2), этот интеграл представим в виде

$$\mathcal{J}_0 = T + U = h. \tag{1.11}$$

В силу соотношения (1.10) и положительной определенности “кинетической энергии” ( 1.1) имеет место неравенство

$$U(\mathbf{q}) = h - T \leq h, \tag{1.12}$$

определяющее ограничение на положение системы при заданном уровне интеграла энергии. Область

$$\Sigma_h = \{\mathbf{q} : \quad U(\mathbf{q}) \leq h\},$$

как и в механике, будем называть *областью возможных движений.* При фиксированном значении постоянной энергии эту область можно рассматривать как *производственный потенциал:* какими бы ни были действия хозяина при данном уровне интеграла энергии, его запасы не смогут покинуть области возможного движения. Область возможного движения также позволяет оценивать запасы тех или иных продуктов по отдельности или в совокупности в рамках предположения о том, что запасы всех прочих продуктов фиксированы.

В одномерном случае уровни этого интеграла, изображенные на фазовой плоскости, позволяют делать суждения о состоянии дел данного хозяина.

**2. Один продукт. Линейные модели.** Пусть для начала хозяйственная деятельность задается функциями ( 1.8), ( 1.1) в пространстве запасов размерности единица, т.е производится и потребляется ровно один продукт. Тогда фазовый портрет уравнения движения, которые оказываются линейными, представлен на рис. 1 в случае, когда $c > 0$, и на рис. 2, когда $c < 0$, где $c$ – единственная компонента матрицы $\mathbf{C}$.

Эллиптический случай. Обратим внимание на основные свойства фазового портрета в случае $c > 0$, т.е. в случае, когда потенциал $U(q)$ – выпуклая вниз функция, достигающая своего минимума в точке $q^o$. Пусть для начала $q^o > 0$ (рис. 1,а). Тогда

1. Уравнения ( 1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется и запасы остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ устойчиво – оно окружено семейством периодических решений одного и того же периода [2]. Этот период можно разбить на четыре равные части, которые можно назвать так же, как и сезоны:

    2.1. *Весна,* когда запасы находятся вблизи своего минимума, но происходит замена преобладания скорости потребления над скоростью производства на противоположное состояние;

    2.2. *Лето,* когда запасы близки к равновесным и превышение скорости производства над скоростью потребления близко к максимальному;

    2.3. *Осень,* когда запасы близки к максимальным, но происходит замена преобладания скорости производства над скоростью потребления на противоположное состояние;

[2]свойство изохронности, т.е. независимости периода от амплитуды выглядит несколько нереальным, но, как известно, такова особенность линейных систем.

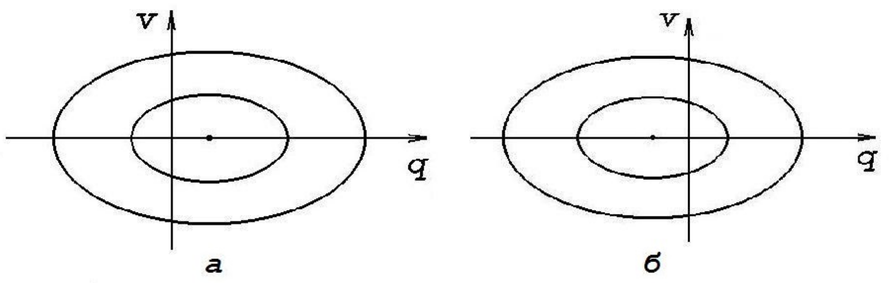


Рис.1

2.4. *Зима,* когда запасы близки к равновесным и превышение скорости потребления над скоростью производства максимально.

3. Среди периодических решений имеются те, что пересекают ось $q = 0$, и те, что ее не пересекают.

   3.1. Пусть периодическое решение не пересекает ось $q = 0$, разве что касается ее. В этом случае за весь жизненный цикл хозяину не приходится залезать в долги. Такое хозяйствование можно признать рачительным.

   3.2. Пусть теперь периодическое решение пересекает ось $q = 0$. Это означает, что жизненный цикл хозяина пресекается, или, если будет такая возможность, ему придется залезать в долги. Такое хозяйствование трудно признать рачительным.

Пусть теперь $q^o < 0$ (рис.1,б). В этом случае пояснения надо несколько переменить. Ограничимся рассмотрением того случая, когда у хозяина имеется возможность жить в долг. Противоположный случай представляется слишком печальным.

1. Уравнения ( 1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$.

Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и долги остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ устойчиво – оно окружено семейством периодических решений одного и того же периода. Этот период также можно разбить на четыре равные части, которые можно назвать так же, как и сезоны:

   2.1. *Весна,* когда долги находятся вблизи своего максимума, но происходит замена преобладания скорости потребления над скоростью производства на противоположное состояние;

   2.2. *Лето,* когда долги близки к равновесным и превышение скорости производства над скоростью потребления близко к максимальному;

   2.3. *Осень,* когда долги близки к минимальным, а то и вовсе отсутствуют (см. п.3), но происходит замена преобладания скорости производства над скоростью потребления на противоположное состояние;

   2.4. *Зима,* когда долги близки к равновесным и превышение скорости потребления над скоростью производства максимально.

3. Среди периодических решений имеются те, что пересекают ось $q = 0$, и те, что ее не пересекают.

   3.1. Пусть периодическое решение не пересекает ось $q = 0$ или, в крайнем случае, касается ее. В этом случае за весь жизненный цикл хозяин не вылезает из долгов и в случае касания лишь обнуляет их.

   3.2. Пусть теперь периодическое решение пересекает ось $q = 0$ или касается ее. Это означает, что хозяин периодически вылезает из долгов, но потом вновь оказывается должен.

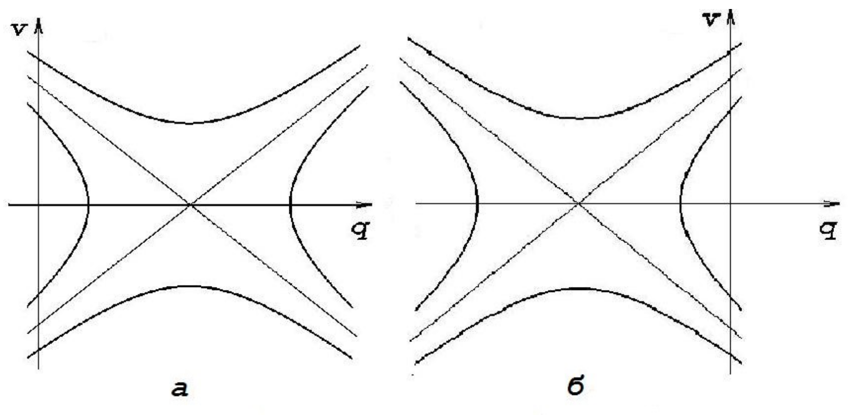


Рис.2

Таким образом, хозяйствование при $q^o < 0$ нельзя признать рачительным.

Гиперболический случай. Поясним теперь основные свойства фазового портрета в случае $c < 0$, т.е. в случае, когда потенциал $U(q)$ – выпуклая функция, достигающая своего максимума в точке $q^o$. Пусть для начала $q^o > 0$ (рис.2,а). Тогда

1. Уравнения ( 1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и запасы остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ – неустойчивое решение гиперболического типа. В него "впадают" две устойчивые сепаратрисы, из него "вытекают" две неустойчивые сепаратрисы. Эти сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на четыре области, в каждой из которых фазовые траектории – ветви гиперболы.

3. Свойства сепаратрис можно пояснить так:

   3.1. На *устойчивой сепаратрисе* $W_s^+$ происходит экспоненциально затухающее пополнение запасов, величина которых стремится к равновесному значению $q^o$;

3.2. На *неустойчивой сепаратрисе* $W_u^+$ происходит экспоненциально нарастающее пополнение запасов, величина которых изначально близка к равновесному значению $q^o$;

3.3. На *устойчивой сепаратрисе* $W_s^-$ происходит экспоненциально затухающее оскудение запасов, величина которых стремится к равновесному значению $q^o$;

3.4. На *неустойчивой сепаратрисе* $W_u^+$ происходит экспоненциально нарастающее оскудение запасов, величина которых изначально близка к равновесному значению $q^o$.

4. Свойства гиперболических решений можно описать так:

4.1. Решениям из области I отвечает "раскрутка" из состояния нулевых запасов до некоторой максимальной величины, сопровождающаяся экспоненциально нарастающим убыванием запасов и последующим разорением.

4.2. Решениям из области II отвечает "раскрутка" из состояния нулевых запасов, сопровождающаяся замедлением темпов накопления при величине запасов, близкой $q^o$, и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.3. Решениям из области III отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов до некоторой минимальной величины и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.4. Решениям из области IV отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов, сопровождающаяся замедлением темпов сокращения при величине запасов, близкой $q^o$, и дальнейшим экспоненциально нарастающим убыванием запасов вплоть до разорения.

Естественно, что в случаях, ведущих к разорению, речь идет о НРХ. Но и случаи, когда запасы нарастают до сколь угодно больших величин, вряд ли можно отнести к деятельности РХ – такое поведение противоречит твёрдо установленному факту конечности земной жизни. С определенными оговорками речь идёт о РХ в случаях устойчивых сепаратрис – эти правила хозяйствования несут в себе большой риск сорваться либо в режим разорения, либо в режим нарастающей жадности.

Пусть теперь $q^o < 0$ (рис.2,б). Тогда

1. Уравнения ( 1.9) обладают равновесным решением $(0, q^o)$. Для такого решения все, что производится, тут же потребляется, и долги остаются неизменными.

2. Равновесное решение $(0, q^o)$ – неустойчивое решение гиперболического типа. В него "впадают" две устойчивые сепаратрисы, из него "вытекают" две неустойчивые сепаратрисы. Эти сепаратрисы разделяют фазовую плоскость на четыре области, в каждой из которых фазовые траектории – ветви гиперболы.

3. Свойства сепаратрис можно пояснить так:

   3.1. На *устойчивой сепаратрисе* $W_s^+$ происходит экспоненциально затухающее погашение долгов, величина которых стремится к равновесному значению $q^o$;

   3.2. На *неустойчивой сепаратрисе* $W_u^+$ происходит экспоненциально нарастающее погашение долгов, величина которых изначально близка к равновесному значению $q^o$;

3.3. На *устойчивой сепаратрисе* $W_s^-$ происходит экспоненциально затухающее нарастание долгов, величина которых стремится к равновесному значению $q^o$;

3.4. На *неустойчивой сепаратрисе* $W_u^+$ происходит экспоненциальное нарастание долгов, величина которых изначально близка к равновесному значению $q^o$.

4. Свойства гиперболических решений можно описать так:

4.1. Решениям из области I отвечает погашение долгов до некоторой минимальной величины, сопровождающееся дальнейшим экспоненциально нарастанием долгов и последующим разорением.

4.2. Решениям из области II отвечает "раскрутка" из состояния нулевых запасов, сопровождающаяся замедлением темпов накопления при величине запасов, близкой $q^o$, и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.3. Решениям из области III отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов до некоторой минимальной величины и дальнейшим экспоненциальным нарастанием как самих запасов, так и темпов их прироста.

4.4. Решениям из области IV отвечает экспоненциально быстрое сокращение запасов, сопровождающееся замедлением темпов сокращения при величине запасов, близкой $q^o$, и дальнейшим экспоненциально нарастающим убыванием запасов вплоть до разорения.

Естественно, что в случаях, ведущих к разорению, речь идет о НРХ. Но и случаи, когда запасы нарастают до сколь угод-

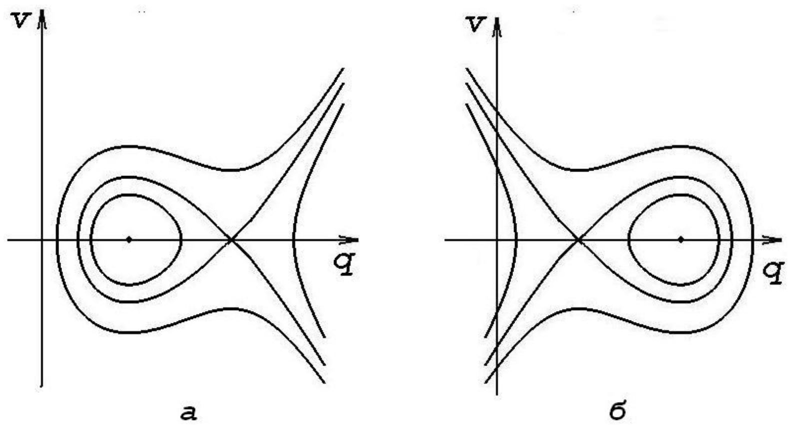


Рис.3

но больших величин, вряд ли можно отнести к деятельности РХ – такое поведение противоречит твердо установленному факту конечности земной жизни. С определенными оговорками речь идет о РХ в случаях устойчивых сепаратрис – эти правила хозяйствования несут в себе большой риск сорваться либо в режим разорения, либо в режим нарастающей жадности.

**3. Один продукт. Нелинейные модели.** Обратимся теперь к случаю, когда функция $T$ по-прежнему имеет вид (1.1), но функция $U$ – не квадратична. В этом случае разнообразие фазовых портретов столь велико, что "экономическую интерпретацию" надо давать в каждом отдельном случае.

Пусть, например, потенциал $U$ кубичен по координате $q$. В этом случае в задаче имеется одно устойчивое равновесие эллиптического типа $E^1$ и одно неустойчивое равновесие гиперболического типа $H^1$. При этом, одна входящая и одна выходящая сепаратрисы гиперболического равновесия $H^1$ совпадают и охватывают устойчивое равновесие $E^1$, а две другие входящая и выходящая сепаратрисы простираются до безконечности. Типичные фазовые портреты изображены на рис.3.

Заметим, что с точки зрения экономической интерпретации наблюдаемых типов движения уже простейшие нелинейные модели одновременно вбирают в себя многие особенности линейного колебательного и гиперболического поведения. В частности, в кубической модели можно наблюдать

1) периодические движения, охватывающие устойчивое равновесие и присущие колебательному движению линейной системы,

2) экспоненциально быстрые приход с бесконечности и уход на бесконечность, присущие гиперболическому поведению линейной системы,

3) присущие сепаратрисам линейной системы асимптотическое стремление к неустойчивому равновесию и асимптотический исход из него.

В то же время, несомненно, для кубического потенциала имеются и некоторые качественные различия. Среди них укажем прежде всего:

1) неизохронность периодических движений, охватывающих устойчивое положение равновесия $E^1$ – их период существенно зависит от их амплитуды;

2) наличие петли сепаратрисы, не наблюдаемое ни в одной из линейных моделей. Эта петля соседствует, с одной стороны, с находящимися внутри нее долгопериодическими движениями, и, с другой стороны, с движениями, приходящими с бесконечности и вновь уходящими на нее, однако пребывающими предельно долгое время в окрестности этой петли,

3) наличие ровно одной пары сепаратрис, простирающихся на бесконечность,

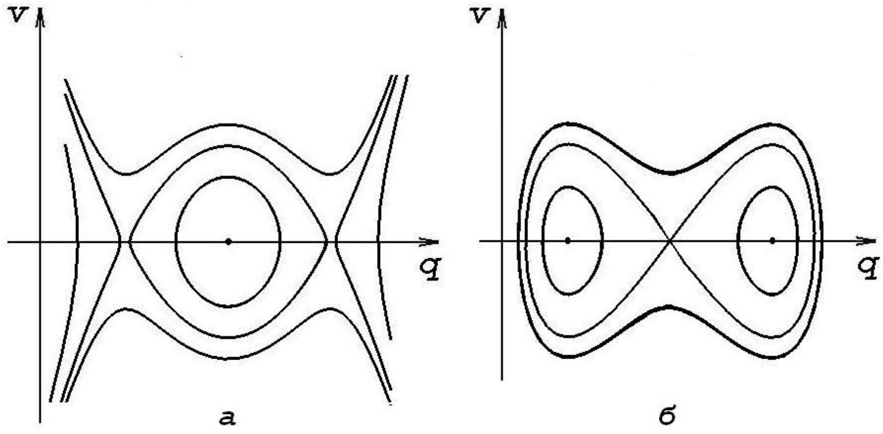


Рис.4

4) в противоположность линейной гиперболической модели, для всех неограниченных движений имеет место

   4.1) либо гарантированное разорение – в случае, когда количество запасов на эллиптическом равновесии превосходит количество запасов на гиперболическом равновесии,

   4.2) либо гарантированный экспоненциальный рост – в противоположном случае, когда количество запасов на гиперболическом равновесии превосходит количество запасов на эллиптическом равновесии.

Для потенциала четвертой степени существенным оказывается ограниченность его сверху или снизу. Так, если потенциал ограничен сверху, то имеются как ограниченные, периодические решения, так и решения, уходящие на бесконечность и приходящие с нее (рис.4,а). В то же время для потенциала, ограниченного снизу, решений, уходящих на бесконечность, нет ни при одном значении постоянной интеграла энергии (рис.4,б).

**4. Многопродуктовая линейная модель.** Предположим теперь, что производство и потребление осуществляется в пространстве из $n$ продуктов, но модель по-прежнему остается линейной и описывается уравнениями (1.9) с функцией Лагранжа, определяемой соотношениями (1.8), (1.2). Если матрица $\mathbf{A}$ зависит только от координат, то по теореме об одновременном приведении к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена, существует линейная замена переменных

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}\mathbf{Q}, \tag{4.1}$$

позволяющая представить функции $T$ и $U$ как

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{V}^2,\ U = \frac{1}{2}\left(c_1(Q_1 - Q_1^o)^2 + \cdots + c_n(Q_n - Q_n^o)^2\right),\ \mathbf{V} = \dot{\mathbf{Q}}.$$

Эта замена позволяет осуществить разделение переменных и представить уравнения движения в виде

$$\ddot{\mathbf{Q}}_i + c_i\left(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_i^o\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Компоненты вектора $\mathbf{Q}$ с экономической точки зрения можно рассматривать как результат *агрегирования,* определяемого отображением, обратным отображению (4.1). Динамике по каждой из компонент этого вектора можно дать в точности ту же интерпретацию, как и для однопродуктовых моделей, описанных в разд. 2. Для положительных коэффициентов $c_i$ соответствующие *агрегаты* будут демонстрировать динамику по колебательному, эллиптическому типу, в то время как для отрицательных $c_i$ динамика соответствующих агрегатов будет гиперболична.

Полезно заметить, что в случае, когда $\mathbf{q}^o$ – устойчивое равновесие и имеют место периодические, с частотами $\omega_i = \sqrt{c_i}$, колебания по каждому из агрегатов, *наблюдаемые величины* –

компоненты вектора продуктов $\mathbf{q}_i$ – в общем случае из-за несоизмеримости частот будут меняются со временем квазипериодически. Вероятно поэтому изучение графиков зависимости состояния запасов от времени обычно оказывается затруднительным.

"Гироскопические силы". В ряде практически важных задач механики функция $T$ – линейно - квадратична по скоростям, т.е. соотношение ( 1.1) имеет вид

$$T(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{v}, \mathbf{q}\right). \tag{4.3}$$

Линейная составляющая этой функции, как известно, определяет действующие в системе *гироскопические силы.* Пусть, как и всюду в этом разделе, матрица $\mathbf{A}$ и вектор $\mathbf{B}$ постоянны. Тогда при квадратичном потенциале

$$U(q) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right), \left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right)\right), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T = const \tag{4.4}$$

уравнения движения примут вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}^o\right) = 0, \tag{4.5}$$

где

$$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T = \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \qquad -$$

постоянная кососимметрическая матрица гироскопических сил.

Гироскопические силы с точки зрения экономического поведения можно интерпретировать как источник не сопровождающейся энергетическими потерями перемены рода деятельности – перехода с производства и потребления одних продуктов на производство и потребление других. При этом уравнения движения при добавлении гироскопических сил по-прежнему допускают интеграл энергии ( 1.10). Иными словами, в зависимости от предпочтений гироскопические силы в экономике могут быть интерпретированы либо как “дань моде”, либо как источник консервативного “поведенческого разнообразия”.

В этой связи становится ясной и стабилизирующая роль “поведенческого разнообразия”: если $\mathbf{q}^o$ – неустойчивое равновесие четной степени неустойчивости, то правильная организация такого разнообразия позволяет его стабилизировать. В то же время, нечетность степени неустойчивости такого равновесия указывает на то, что оно не может быть стабилизировано посредством “модных нововведений”.

**5. Многопродуктовая нелинейная модель.** Общее исследование многопродуктовой нелинейной модели оказывается столь же затруднительным, сколь затруднительно исследование задач классической механики в случае, когда число степеней свободы превосходит единицу. Основная причина тому – отсутствие в общем случае дополнительных законов сохранения, не позволяющее осуществить эффективное агрегирование, которое в механике именуется *разделением переменных.*

В случае, когда экономическое поведение описывается натуральной консервативной системой, среди наиболее общих результатов помимо теоремы о существовании либрационных периодических решений (см., например, [12]), можно выделить и теоремы о существовании конечного числа импульсных управлений, позволяющих перевести систему из одного положения в пространстве запасов в любое другое без потери энергии посредством конечного числа переключений скорости изменения запасов [13].

О реальности и о торговле. Обратим внимание на то обстоятельство, что торговля в рассмотренных описаниях поведения, в целом, не предусмотрена – способ рачительного, “периодического” хозяйствования оказывается самодостаточным. Спрашивается, возможен ли такой механизм в реальности, в условиях, когда производство *товаров* для отдачи вовне, а не *запасов* для внутреннего потребления ставится во главу угла. Вероятно, ответ на этот вопрос положителен, пример чему дают правильно поставленные монастырские хозяйства, в которых трудники, мастера разных специальностей, работают, так сказать, “на один котел”, да и потребляют из того котла сообща, по тем или иным установленным правилам.

Что касается торговли, то в случае рачительного ведения хозяйствования поводом для отдачи вовне одних запасов в обмен на получение извне других может оказаться необходимость или желание “отодвинуть” область возможного движения системы в пространстве запасов от границ первого координатного угла, на которых тот или иной запас обращается в нуль. При нерачительном ведении хозяйствования поводов для торговли больше – отдача вовне одних запасов в обмен на получение извне других может перевести нерачительный способ хозяйствования в рачительный и тем самым устранить саморазрушение системы.

**6. Приложение. Письмо г-на Анри Пуанкаре г-ну Леону Вальрасу[3].** Мой дорогой коллега, Вы не обратили внимания на мою мысль. Я отнюдь не хотел бы сказать, что Вы превысили "точные границы". Ваше определение предельной полезности кажется законным. Я мог бы его оправдать следующим образом. Можно ли измерить удовлетворенность? Я могу сказать, что вот это удовлетворенность больше вот того, потому что я предпочитаю одно другому. Но я не могу сказать, что вот эта удовлетворенность в два раза или в три раза больше, чем вон та. Такое высказывание само по себе не имеет смысла, и говорить можно не иначе как по произвольному соглашению.

Удовлетворенность - это величина, но величина неизмеримая. Теперь: неизмеримая величина - оказывается ли она полно-

[3]На: Les éléments d’économie politique pure, 4 e ed. Recue le 1-er octobre 1901. (Примечание Леона Вальраса)

стью исключенной из математических рассуждений? Вовсе нет. Температура, например (по крайней мере, до появления термодинамики, которая дала смысл понятию абсолютной температуры), представляет собой величину, не поддающуюся измерению. И это произвол, что ее измеряют по расширению ртути. Ее можно было бы определить на столь же законном основании как некоторую функцию от расширения чего-либо другого и измерять любой функцией этого расширения, при условии, что эта функция окажется монотонно возрастающей. Также и здесь – Вы можете определить удовлетворенность как произвольную функцию при условии, что эта функция всегда растет в то время, когда растет удовлетворенность, которую она представляет. В вашем распоряжении, таким образом, будут несколько произвольных функций, но после того, как будет сделан выбор, у Вас будет право делать выводы на основании расчетов. Если в этих выводах, по-прежнему будут оставаться произвольные функции, эти выводы не будут неверными, но будут лишены какого-либо интереса, поскольку они будут подчиняться произвольным соглашениям, принятым вначале. Вы должны стремиться к устранению этих произвольных функций, и это то, что Вы и делаете.

Другое замечание: я могу сказать, большую ли удовлетворенность испытывает одно и то же лицо в тех условиях по сравнению с этими; но у меня нет никакой возможности сравнить удовлетворение, испытываемое двумя разными лицами. Это увеличивает количество произвольных функций, которые должны быть устранены.

Таким образом, когда я говорил о "точных границах" – это совсем не то, что я имел в виду. Я считал, что прежде любого математического рассуждения имеются какие-то математические гипотезы, и для того, чтобы эти рассуждения оказались плодотворными (как и в приложениях, прежде всего, в физике), нужно, чтобы эти гипотезы были приняты во внимание.

Иными словами, если об этом условии забывают, то тем самым пересекают точные границы.

Например, в механике часто пренебрегают трением и рассматривают тела как предельно отполированные. А Вы рассматриваете людей как крайних эгоистов и как крайних ясновидящих. Первое предположение может быть принято в первом приближении, но второе может потребовать некоторых оговорок [4].

Искренне преданный Вам коллега Пуанкаре.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Walras L.* Économique et mécanique // Bulletin de la Societe vaudoise de sciences naturelles. 1909.

2. *Cass D., Shell K.* Introduction to Hamiltonian Dynamics in Economics // Journal of Economic Theory. 1976. Vol. 12(1). P.1 – 10.

3. *Cass D., Shell K.* The Structure and Stability of Competitive Dynamical Systems // Journal of Economic Theory. 1976. Vol. 12(1). P. 31-70.

4. *Lucas, Robert Jr.* On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol.22. No.1. P.3-42.

5. *Bonneuil, Noël* Capital accumulation, inertia of consumption and norms of reproduction // Journal of Population Economics. 1994. Vol. 7. No. 1. P.49-62.

6. *Ларуш Л.* Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания. Москва: Шиллеровский институт науки и культуры. 1997. =


[4]Мне кажется, что последний абзац моего § 1 отвечает на это замечание (Примечание Леона Вальраса)

La Rouche L. The Science of Physical Economy as the Platonic Epistemological Basis for All Branches of Human Knowledge // Executive Intelligence Review, Vol. 21, №9-11 (1994).

7. *Marino D.* Policies and Complex Dynamics: an Hamiltonian Approach // Economics and Complexity. 1998. Vol.1. No.2. P.3 – 14.

8. *Strulik H.* On the Mechanics of Economic Development and Non-Development // Quantitative Macroeconomics Working Papers 19911, Hamburg University, Department of Economics. 1999.

9. *McCauley J. L.* The Futility of Utility: how market dynamics marginalize Adam Smith // http://arxiv.org/abs/cond-mat/9911291v2

10. *Абрамов А.П., Иванилов Ю.П.* Физика и математическая экономика. М.: Знание. 1991. 32 с.

11. *Маслов В.П.* Капиталистическая математика // http://viktor-maslov.narod.ru/article.pdf

12. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. - Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. 429 с.

13. *Козлов В.В., Хмелевская А.Ю.* Об импульсном изоэнергетическом управлении // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1992. No.5. С. 69-71.

14. *Doyle Jon* Matter, Mind and Mechanics. New model of dynamogenesis and rationality. Synopsis of the Mechanical Foundations of Psycology and Economics // In: http://www.csc.ncsu.edu/faculty/doyle/publications/tns00.pdf

15. *Doyle Jon* A Rational Mechanics of Reasoning // In: http://www.csc.ncsu.edu/faculty/doyle/publications/armor02.pdf

16. *Doyle Jon* Extending Mechanics to Minds: The Mechanical Foundations of Psychology and Economics. London, UK: Cambridge University Press, May 2006.

17. *Saslow Wayne M.* An economic analogy to thermodynamics // Am. J. Phys. 1999. Vol.67. No.12. P.1239 – 1247.

18. *Joling Albert, van Daal Jan* Leon Walras's mathematical economy and the mechanical analogies // History of Economics Society Bulletin. 1989. No.11. P. 25-32.

19. *Shell K.* The theory of Hamiltonian Dynamical Systems, and an application to economics // The Theory and Application of Differential Games. Proc. of the NATO Advanced Study Institute at the University of Warwick, Coventry, England, 27 August - 6 September, 1974. P. 189-199.

20. *Kondratenko A.* Physical Modeling of economic systems: Classical and Quantum Economies // MPRA Paper No. 10452, posted 25. December 2007 at http://mpra.ub.uni-muenchen.de/10452/