УДК 531

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРАХ ЗАТОЧКИ ИНСТРУМЕНТА НА ТОЧИЛЬНОМ КРУГЕ

А. С. Сумбатов

Решена элементарная задача о нахождении точки соприкосновения и угла наклона инструмента, затачиваемого на точильном круге, при которых давление круга на инструмент оказывается минимальным по величине.

Ключевые слова: сухое трение, коэффициент трения скольжения, угол трения, равновесие, минимум функции.

Всем, кому приходилось точить инструмент, например зубило на абразивном круге, хорошо известно, что если неправильно рассчитать силу, точку соприкосновения и наклон инструмента, то можно не удержать инструмент в руках. Последствия бывают серьезные.

На рис. декартовы оси координат имеют своим началом точку касания O однородного стержня (зубила) и точильного круга. Ось Ox составляет угол α с горизонтом, а стержень – угол β с осью Ox. Сила тяжести P приложена в середине G стержня, $OG = a$. Предположим, что для удержания стержня в равновесии требуется приложить к нему сосредоточенную силу (F_x, F_y) в точке стержня, отстоящей от его конца O на расстоянии λa $(0 < \lambda \leq 2)$, а также момент M. Со стороны круга на стержень действуют сила нормального давления $R_x = N > 0$ и сила трения скольжения $R_y = -Nf < 0$ (f – коэффициент трения скольжения [1]).

[1] *Самсонов В.А.* Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“. 2001. 80 с.

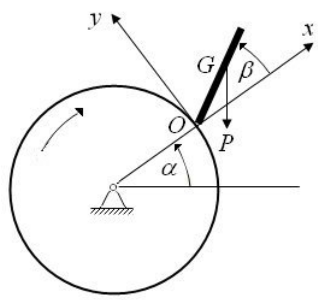

Рис.1. Точильный круг

Из уравнений равновесия стержня (момент сил подсчитан относительно точки O)

$$N - P\sin\alpha + F_x = 0, \qquad -Nf - P\cos\alpha + F_y = 0,$$
$$M - Pa\cos(\alpha+\beta) + \lambda a\,(F_y\cos\beta - F_x\sin\beta) = 0.$$

находим силу

$$N = \frac{\cos\gamma}{\lambda\sin(\gamma+\beta)}\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\cos(\alpha+\beta)\right], \qquad (1)$$

где $\gamma = \operatorname{arctg} f$ – угол трения.

Из полученной формулы следует, что с помощью подходящего силового момента M (и соответствующей сосредоточенной силы) стержень может быть уравновешен, поскольку условие $N > 0$ всегда может быть удовлетворено. Но из этой же формулы следует, что при *дополнительном* условии (полагаем, что $-\pi/2 < \alpha+\beta < \pi/2$, $-\pi/2 < \beta < \pi/2$)

$$\frac{1-\lambda}{\sin(\gamma+\beta)} > 0$$

стержень можно уравновесить только тремя сосредоточенными силами: реакцией со стороны точильного круга, весом стержня и приложенной к стержню силой точильщика. Именно: в случае $\lambda < 1$ (пальцы точильщика расположены близко к точильному кругу) сумма угла β и угла трения должна быть положительной, а в случае $\lambda > 1$ – отрицательной.

Ещё замечаем, что, когда $\beta \to -\gamma$, сила N неограниченно возрастает (впрочем, никогда опытный точильщик не держит инструмент навстречу набегающему точильному кругу).

Пусть к стержню приложен уравновешивающий силовой момент M и выполняется условие

$$-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P > 0. \tag{2}$$

Фиксируем значения параметров M и λ и зададимся вопросом: имеет ли сила давления N как функция переменных α и β экстремальные значения?

Первый дифференциал функции $q = \lambda N(\alpha, \beta)/\cos\gamma$ равен

$$dq = q'_\alpha\, d\alpha + q'_\beta\, d\beta\,,$$

$$q'_\alpha = \frac{(\lambda-1)P\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\beta)}\,,$$

$$q'_\beta = \frac{\dfrac{M}{a}\cos(\gamma+\beta) + (\lambda-1)P\cos(\gamma-\alpha)}{\sin^2(\gamma+\beta)}\,.$$

Критические точки функции определяются системой уравнений

$$q'_\alpha = 0, \qquad q'_\beta = 0.$$

Из первого уравнения находим, что $\alpha = -\beta$. Тогда второе уравнение $\cos(\gamma+\beta) = 0$ позволяет найти критическую точку (она оказывается единственной при тех ограничениях, которые были наложены выше на промежутки изменения углов):

$$\alpha = \gamma - \pi/2, \quad \beta = \pi/2 - \gamma\,, \tag{3}$$

т.е. β – угол, дополнительный к углу трения, α по знаку противоположен углу β.

В точке (3) в силу условия (2) правая часть (1) положительна, как и должно быть.

Второй дифференциал равен

$$d^2q = A(d\alpha)^2 + 2C\,d\alpha\,d\beta + B(d\beta)^2.$$

Здесь

$$A = \frac{(\lambda-1)P\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\beta)}\,, \quad C = \frac{(\lambda-1)P\sin(\gamma-\alpha)}{\sin^2(\gamma+\beta)}\,,$$

$$B = \frac{\dfrac{M}{a}\left[\sin^2(\gamma+\beta)-2\right] + 2(1-\lambda)P\cos(\gamma-\alpha)\cos(\gamma+\beta)}{\sin^3(\gamma+\beta)}\,.$$

В точке (3)

$$A = (\lambda-1)P\,, \quad B = -\frac{M}{a}\,, \quad C = (\lambda-1)P\,,$$

$$AB - C^2 = (\lambda-1)P\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\right].$$

В силу условия (2) знаки выражений A и $AB-C^2$ совпадают. Они имеют знак плюс только при условии, что $\lambda > 1$. Таким образом, если

$$\lambda > 1,$$

то локальный минимум функции $N(\alpha,\beta)$ достигается в точке (3), причем согласно выражению (1)

$$N_{min} = \frac{1}{\lambda\sqrt{1+f^2}}\left[-\frac{M}{a} + (1-\lambda)P\right]. \qquad (4)$$

В противном случае, если $\lambda \leq 1$, в найденной критической точке экстремума нет.

Заметим, что из (2) вытекает, что $P > M/a$, поэтому выражение (4) как функция параметра λ монотонно убывает. Если для всех значений $1 < \lambda \leq 2$ неравенство (2) выполняется, то $-0,5(M/a + P)\cos\gamma > 0$ – минимально возможное значение давления точильного круга на стержень. Если при некотором $1 < \lambda^* \leq 2$ выражение в левой части (2) обращается в нуль, то в случае $\lambda = \lambda^*$ точильщик удерживает в равновесии инструмент, не испытывая силового воздействия со стороны точильного круга (идеальный случай, потому что в силу знания лишь приближённо значения коэффициента f, следовательно, и угла трения γ „поймать“ точно это положение инструмента на практике невозможно).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-01-00536 и 12-08-00637).