УДК 531.01

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НА ГЛАВНЫХ РАССЛОЕННЫХ ПУЧКАХ С ГАМИЛЬТОНОВОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Д.П. Шевалль́е*

Уравнения Пуанкаре - Четаева в рамках классической аналитической механики были предложены Н.Г.Четаевым [1] и В.В.Румянцевым [2–4]. В предыдущих публикациях автора [5] и [6] была изложена динамика механических систем по Пуанкаре - Четаеву, в том числе, существование действия группы Ли на конфигурационном пространстве $\mathbb{S}$ *и использование квазикоординат на касательном расслоении* $T\mathbb{S}$*.*

В настоящей работе в качестве отправной точки принимается дифференциальная геометрия, за основу берётся главный расслоенный пучок $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$*, оснащённый «динамической связностью». В этом контексте естественная механическая интерпретация такова (см. [6], разд. 1): многообразие* $\mathbb{S}$ *представляет собой конфигурационное пространство механической системы, группа Ли* $\mathbb{G}$ *описывает «правые» перемещения системы, многообразие* $\mathbb{X}$ *представляет собой «пространство форм», а отображение* π *ассоциирует некоторую форму с каждой конфигурацией. Можно выбрать связность, обладающую механическим смыслом (см. [6], разд. 3, теорема 3.1).*

Основная цель этих работ состоит в представлении картины динамики, основанном на расщеплении величин на две геометрически значимые составляющие: на их «вертикальную часть», связанную с действием группы $\mathbb{G}$ *и движениями*

*Ecole nationale des ponts et chaussées, Institut Navier, 6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, 77455 Marne-la-Vallée, France. e-mail: chevallier@lami.enpc.fr

системы, как твёрдого целого, и их «горизонтальную часть», связанную с проекцией на $\mathbb{X}$ *и деформацией системы.*

Транзитивные действия группы рассмотрены в [5], а нетранзитивные действия – в [6]. Обе публикации, главным образом, были посвящены лагранжевому подходу к описанию движения, то есть динамики для консервативных и неконсервативных систем, рассматриваемых как «динамические системы» первого порядка на касательном пространстве $T\mathbb{S}$ *пространства* $\mathbb{S}$*, полученные из вариационного принципа на* $T\mathbb{S}$.

В настоящей публикации мы обращаемся к гамильтонову подходу для описания движения консервативных систем, рассматриваемых как «динамические системы» первого порядка на кокасательном пространстве $T^*\mathbb{S}$ *пространства* $\mathbb{S}$.

Дифференциальная геометрия касательных и кокасательных пространств многообразий не так уж проста (см. [7], главы IX и X, включая приложения к механике оригинальных работ Ф.Клейна, цитируемых в [7]).

В настоящей работе рассматривается наиболее трудная ситуация, когда нужно принять во внимание структуру расслоенного пучка и расщепление касательного или кокасательного пространства на горизонтальное и вертикальное подпространства в соответствии с динамической связностью.

Публикация организована следующим образом. В разделе 1 элементарным образом, без ссылок на геометрическую структуру кокасательного пространства $T^*\mathbb{S}$*, указываются связи с [6].*

В разделе 2 мы выдвигаем на первый план естественные изоморфизмы пространств $T\mathbb{S}$ *и* $T^*\mathbb{S}$*, сочетая их с теми рамками главных связностей, которые будут использованы в дальнейших рассуждениях.*

В разделе 3, выдвигая на первый план замечательные выражения (3.1) и (3.2) лиувиллевой 1*-формы и симплектической формы Дарбу на кокасательном пространстве главного рассло-*

ения, оснащенного главной связностью, мы выводим соответствующие выражения для гамильтоновых векторных полей и, наконец, специальный вид уравнений Гамильтона, соответствующий нашим рамкам – см. (3.17).

В разделе 4 мы показываем, как упомянутые уравнения могут быть выведены из вариационного принципа, опирающегося на «интегральный инвариант Пуанкаре-Картана». Такой вывод уравнений сам по себе не является удивительным, однако примечательно, что в данном случае он осуществляется непосредственно и не требует a priori *тех ограничений вариаций, которые были необходимы для вывода уравнений Эйлера в [6].*

1. Уравнения Гамильтона. Теоретическая основа гамильтоновой динамики, опирающаяся на симплектические структуры, изложена в работах П.Либерманн и Ш.-М.Марля [8] и Ж.-М. Сурио [9]. В разделе 3.1 нами будут изучены симплектическая и пуассонова структуры на кокасательном расслоении, оснащенном главной связностью. Наконец, лишь в разделах 3 и 4 мы столкнёмся с гамильтоновой формой динамики на главных расслоениях в общем контексте дифференциальной геометрии.

Начиная отсюда мы будем пользоваться обозначениями из [6]. В этом разделе мы осуществим непосредственный и элементарный вывод уравнений Гамильтона с помощью результатов, изложенных в [6], раздел 2.4, соотношения (2.21) или (2.22), в консервативном случае приобретающих вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\,\partial_{\dot q}\mathbf{L} - \nabla_q \mathbf{L} + \partial_{\mathrm{v}}\mathbf{L} \circ \mathrm{Ad}\, g.\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{r}}(\dot q, .) = 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\,\partial_{\mathrm{v}}\mathbf{L} - \pounds_{\mathbb{G}}\mathbf{L} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Функция Лагранжа определена на касательном расслоении $T\mathbb{S}$. Здесь мы ссылаемся на локальную тривиализацию расслоения, описанную в [6], раздел 1.2, так что $q = (q_1, \ldots, q_d) \in \mathcal{Q}$, где $\mathcal{Q}$ – открытое подмножество в $\mathrm{E} = \mathbb{R}^d$, а $\mathbf{L}$ рассматривается как функция от $(s, \dot{q}, \mathbf{V})$, где $s = g.\mathrm{r}(q) = \varphi(q, g)$, или как функция от $(q, g, \dot{q}, \mathbf{V}) \in \mathcal{Q} \times \mathrm{E} \times \mathbb{G} \times \mathfrak{g}$ и, быть может, от времени t. Форма связности динамической связности и её кривизна обозначены $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}$ – поднятия этих форм с помощью $q \mapsto \mathrm{r}(q)$, т.е. поднятия дифференциальных форм на области $\mathcal{Q}$ с координатами q на открытое подмножество в $\mathbb{X}$. Величина $\partial_g^r \mathbf{L}$ обозначает частную производную по g в соответствии с теорией групп Ли, величина $\nabla_q \mathbf{L}$ – частная ковариантная производная в связности, такая, что $\nabla_q \mathbf{L}(\cdot)(\delta q) = \partial_q \mathbf{L}(\cdot)(\delta q) - \partial_g^r \mathbf{L}(\cdot) \circ \mathrm{Ad}\, g.\, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q, \delta q)$.

Положим
$$p = \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}, \quad \mathbf{P} = \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} \tag{1.2}$$
и предположим, что преобразование Лежандра $(s, \dot{q}, \mathbf{V}) \mapsto (s, p, \mathbf{P})$ регулярно и определяет функцию $\mathbf{H}(s, p, \mathbf{P})$ как

$$\mathbf{H}(s, p, \mathbf{P}) = \langle p, \dot{q} \rangle + \langle \mathbf{P}, \mathbf{V} \rangle - \mathbf{L}(s, \dot{q}, \mathbf{V}),$$

где мы предполагаем, что в правой части величины $\dot{q}$ и $\mathbf{V}$ заменены на функции от $(s, p, \mathbf{P})$. Тогда, обозначая через ι естественный изоморфизм из второго двойственного пространства в двойственное пространство для любого векторного пространства, определим $\nabla_q \mathbf{H}(\cdot)(\delta q) = \partial_q \mathbf{H}(\cdot)(\delta q) - \partial_g^r \mathbf{H}(\cdot) \big(\mathrm{Ad}\, g. \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q, \delta q) \big)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \iota\, \partial_p \mathbf{H} \,=\, \dot{q}, & \partial_g^r \mathbf{H} = -\partial_g^r \mathbf{L}, \\[2ex] \iota\, \partial_{\mathbf{P}} \mathbf{H} \,=\, \mathbf{V}, & \nabla_q \mathbf{H} = -\nabla_q \mathbf{L}. \end{array} \right. \tag{1.3}$$

$\square$ Вычисляя дифференциал от $\mathbf{H}$ и опираясь на (1.2), имеем

$$\begin{array}{rcl} d\mathbf{H} & = & \langle \delta p, \dot{q} \rangle + \langle p, \delta \dot{q} \rangle + \langle \delta \mathbf{P}, \mathbf{V} \rangle + \langle \mathbf{P}, \delta \mathbf{V} \rangle \\ & - & \langle \partial_s \mathbf{L}, \delta s \rangle - \langle \partial_{\dot{q}} \mathbf{L}, \delta \dot{q} \rangle - \langle \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L}, \delta \mathbf{V} \rangle \\ & = & \langle \delta p, \dot{q} \rangle + \langle \delta \mathbf{P}, \mathbf{V} \rangle - \langle \partial_s \mathbf{L}, \mathrm{vert}(\delta s) \rangle - \langle \partial_s \mathbf{L}, \mathrm{hor}(\delta s) \rangle. \end{array}$$

С другой стороны, последнее выражение должно быть равно

$$\langle \partial_p \mathbf{H}, \delta p \rangle + \langle \partial_{\mathbf{P}} \mathbf{H}, \delta \mathbf{P} \rangle + \langle \partial_s \mathbf{H}, \mathrm{vert}(\delta s) \rangle + \langle \partial_s \mathbf{H}, \mathrm{hor}(\delta s) \rangle$$

для любого выбора $\delta p \in E^*$, $\delta \mathbf{P} \in \mathfrak{g}^*$ и $\delta s \in T_s \mathbb{S}$. Полагая $\delta s = 0$, получим равенства в левой части (1.3). Считая вариацию δs вертикальной для формы $\delta s = \sigma_s^T(\mathbf{u})$ с $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$ и замечая, что

$$\langle \partial_s \mathbf{H}(.), \sigma_s^T(\mathbf{u}) \rangle = \partial_g^r \mathbf{H}(.)(\mathbf{u}), \quad \langle \partial_s \mathbf{L}(.), \sigma_s^T(\mathbf{u})) \rangle = \partial_g^r \mathbf{L}(.)(\mathbf{u}),$$

выводим равенство, стоящее справа в первой строке. (В выражении справа мы считаем, что $s = g.\mathrm{r}(q)$, а также что $\mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ – функции координат $(q, g, p, \mathbf{P})$ или $(q, g, \dot{q}, \mathbf{V})$).

Считая вариацию δs горизонтальной для формы $\delta s = \mathrm{hor}\, \partial_q (g.\mathrm{r}(q))(\delta q)$, получаем последнее равенство. ∎

Производная Ли для действий слева группы $\mathbb{G}$ на $T\mathbb{S}$ и на $T^*\mathbb{S}$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} \pounds_{\mathbb{G}} \mathbf{L} &= \quad \partial_g^r \mathbf{L} + \mathrm{ad}^* \mathbf{V}.\, \partial_{\mathbf{V}} \mathbf{L} = \\ &= -\partial_g^r \mathbf{H} + \mathrm{ad}^* (\iota\, \partial_{\mathbf{P}} \mathbf{H}).\, \mathbf{P} \; = \; -\pounds_{\mathbb{G}} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (1.1) эквивалентны уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\nabla_q \mathbf{H} - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g. \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}(\iota\, \partial_p \mathbf{H}, \cdot) \rangle, & \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = -\pounds_{\mathbb{G}} \mathbf{H}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \partial_p \mathbf{H}, \quad \boldsymbol{\omega} \left(\dfrac{ds}{dt} \right) = \iota\, \partial_{\mathbf{P}} \mathbf{H}. & \end{cases} \tag{1.4}$$

Заметим, что нётеровские первые интегралы, получающиеся из симметрии функции Гамильтона – немедленные следствия представления уравнений в таком виде (по тем же причинам, что и в [5]).

2. Естественные изоморфизмы. В дополнение к разделу 1 из [6], где связность была определена как 1 - форма на пространстве $\mathbb{S}$, принимающая значения из $\mathfrak{g}$, упомянем некоторые другие положения из теории связностей. Связность на $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$ альтернативным образом может быть введена как дифференцируемое отображение – «отображение Кристоффеля», $\Gamma\colon \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \to T\mathbb{S}$, обладающее следующими свойствами:

$$\begin{cases} \pi^T\Gamma(s, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \quad \text{и} \quad o_{\mathbb{S}}\Gamma(s, \boldsymbol{w}) = s, \\ \text{для всех фиксированных } s \in \mathbb{S} \\ \text{отображение } \boldsymbol{w} \mapsto \Gamma(s, \boldsymbol{w}) \text{ из } T_{\pi(s)}\mathbb{X} \text{ в } T_s\mathbb{S}, \text{ линейно} \\ \text{для всех } g \in \mathbb{G}\text{: } \Gamma(g.s, \boldsymbol{w}) = L_g^T\Gamma(s, \boldsymbol{w}). \end{cases} \tag{2.1}$$

Из этих свойств следует, что $\pi^T\big(\boldsymbol{v} - \Gamma(s, \pi^T(\boldsymbol{v}))\big) = \mathbf{0}$ для всех $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$, и поэтому вектор в скобках вертикален. Кроме того, существует единственным образом определённый вектор $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$, такой, что

$$\boldsymbol{v} - \Gamma(s, \pi^T(\boldsymbol{v})) = \sigma_s^T(\mathbf{u}).$$

В рамках (2.1) попутно доказано, что определённое таким образом отображение $\boldsymbol{v} \mapsto \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})$ представляет собой $\mathfrak{g}$-значную 1-форму на $\mathbb{S}$, которая обладает свойствами формы связности, как это установлено в [6]. По определению для всех $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$:

$$\boldsymbol{v} - \Gamma(s, \pi^T(\boldsymbol{v})) = \sigma_s^T(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})).$$

И наоборот, если форма связности задана свойствами из [6], то можно видеть, что отображение Γ определено этим соотношением, именно:

$$\Gamma(s, w) = \boldsymbol{v} - \sigma_s^T(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})) \text{ для } \boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S} \text{ такого, что } w = \pi^T(\boldsymbol{v})$$

удовлетворяет соотношению (2.1). (Заметим, что если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ таковы, что $\boldsymbol{v} - \sigma_s^T(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})) = \boldsymbol{v}' - \sigma_s^T(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}'))$, то $\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ вертикален и $\pi^T(\boldsymbol{v}) = \pi^T(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w}$, так что предыдущее соотношение полностью определяет $\Gamma(s,\boldsymbol{w})$). Отображение Γ – это не что иное как горизонтальное поднятие, ассоциированное со связностью, задаваемой величиной $\boldsymbol{\omega}$: Для $x=\pi(s)$ отображение Γ взаимно однозначно, и $\boldsymbol{w}\in T_x\mathbb{X}\to\Gamma(s,\boldsymbol{w})$ – линейный автоморфизм пространства $T_x\mathbb{X}$ на дополнительное пространство вертикального пространства пространства $T_s\mathbb{S}$, которое является горизонтальным подпространством пространства $T_s\mathbb{S}$ в соответствии со связностью. Горизонтальная и вертикальная проекции определены как

$$\operatorname{hor}(\boldsymbol{v})=\Gamma(s,\pi^T(\boldsymbol{v})),\quad \operatorname{vert}(\boldsymbol{v})=\sigma_s^T(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}))\ \text{ для }\ \boldsymbol{v}\in T_s\mathbb{S}. \quad (2.2)$$

2.1. Изоморфизмы касательного и кокасательного пучков пространства $\mathbb{S}$.

Рассмотрим нижнюю диаграмму на рис. 1, где прямоугольная часть определяет поднятие векторного пучка $(T\mathbb{X}\times\mathfrak{g},\mathbb{X},o_{\mathbb{X}}\circ\mathrm{pr}_1)$ с помощью отображения $\pi\colon\mathbb{S}\to\mathbb{X}$. Верхняя стрелка – это отображение $\boldsymbol{v}\mapsto\big(\pi^T(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})\big)$, морфизм векторного пучка над π, как мы можем видеть на левой диаграмме. В соответствии с основным свойством поднятия существует морфизм векторных пучков $i\colon T\mathbb{S}\to\mathbb{S}\times_{\mathbb{X}}T\mathbb{X}\times\mathfrak{g}$ над пространством $\mathbb{S}$, такой, что диаграмма коммутативна. На самом деле, i – *изоморфизм векторных пучков над* $\mathbb{S}$ и

$$i\colon\boldsymbol{v}\mapsto\big(o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}),\pi^T(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})\big),\quad i^{-1}\colon(s,\boldsymbol{w},\mathbf{u})\mapsto\Gamma(s,w)+\sigma_s^T(\mathbf{u}).$$

Рассмотрим

- отображение момента действия группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{S}$ – отображение $\mu\colon T^*\mathbb{S}\to\mathfrak{g}^*$, определенное соотношением

$$\langle\mu(\boldsymbol{z}),\mathbf{u}\rangle=\langle\boldsymbol{z},\sigma_s^T(\mathbf{u})\rangle\text{ для }\boldsymbol{z}\in T_s^*\mathbb{S},\ \mathbf{u}\in\mathfrak{g}, \quad (2.3)$$

(слева скобка выражает двойственность между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, справа – двойственность между $T\mathbb{S}$ и $T^*\mathbb{S}$.)

- Отображение $\chi\colon T^*\mathbb{S} \to T^*\mathbb{X}$, такое, что $\boldsymbol{z} \in T_s^*\mathbb{S}$, $\chi(\boldsymbol{z}) \in T_x^*\mathbb{X}$ с $x = \pi(s)$, определено как

$$\langle \chi(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{z}, \Gamma(s, \boldsymbol{w}) \rangle \ \text{ для } \boldsymbol{w} \in T_x\mathbb{X}, \tag{2.4}$$

(заметим, что в отличие от определения для μ, определение для χ требует связности на $\mathbb{S}$).

Более того, имеющее место для χ соотношение $\pi\circ \overset{*}{o}_{\mathbb{S}} = \overset{*}{o}_{\mathbb{X}} \circ \chi$ – это морфизм векторных пучков над π, изображённых на верхней коммутативной диаграмме рис. 2 и дифференцируемое отображение, в чём можно убедиться, рассматривая его локально. При действии группы $\mathbb{G}$ на $T^*\mathbb{S}$ имеют место следующие свойства эквивариантности: для $g \in \mathbb{G}$ и $\boldsymbol{z} \in T^*\mathbb{S}$

$$\mu(g.\boldsymbol{z}) = \mathrm{Ad}^* g.\mu(\boldsymbol{z}), \quad \chi(g.\boldsymbol{z}) = \chi(\boldsymbol{z}).$$

Теперь рассмотрим нижнюю диаграмму на рис. 2, где прямоугольная часть описывает поднятие векторного пучка $(T^*\mathbb{X}\times \mathfrak{g}, \mathbb{X}, \overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\circ \mathrm{pr}_1)$ с помощью отображения $\pi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{X}$. Верхней стрелке отвечает отображение $\boldsymbol{z} \mapsto \big(\chi(\boldsymbol{z}), \mu(\boldsymbol{z})\big)$ – морфизм векторного пучка над π, такой, что существует морфизм векторного пучка $\overset{*}{\imath}\colon T^*\mathbb{S} \to T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*$ над $\mathbb{S}$, приводящий к коммутативности диаграммы справа. На самом деле $\overset{*}{\imath}$ – *изоморфизм векторного пучка* и

$$\begin{aligned} \overset{*}{\imath} \quad &: \quad \boldsymbol{z} \mapsto \big(\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}), \chi(\boldsymbol{z}), \mu(\boldsymbol{z}) \big) = (s, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}), \\ \overset{*}{\imath}^{\,-1} \quad &: \quad (s, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (\boldsymbol{\eta} \circ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\xi} \circ \pi^T)|_{T_s\mathbb{S}}. \end{aligned}$$

На этом этапе мы делаем вывод о том, что касательное и кокасательное расслоения $\mathbb{S}$ изоморфны соответственно расслоениям $(\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \times \mathfrak{g}, \mathbb{X}, \mathrm{pr}_1)$ и $(\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*, \mathbb{X}, \mathrm{pr}_1)$, двойственным друг другу в соответствии со скобкой:

$$\langle (s, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}), (s, \boldsymbol{w}, \mathbf{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{u} \rangle$$

и если $\boldsymbol{z} \in T_s^*\mathbb{S}$, $\boldsymbol{v} \in T_s\mathbb{S}$, то используя $\boldsymbol{v} = \mathrm{hor}\boldsymbol{v} + \mathrm{vert}\boldsymbol{v}$ вместе с (2.2), (2.3) и (2.4), имеем

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \chi(\boldsymbol{z}), \pi^T(\boldsymbol{v}) \rangle + \langle \mu(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \overset{*}{i}(\boldsymbol{z}), i(\boldsymbol{v}) \rangle. \tag{2.5}$$

Напомним, что ковектор $\boldsymbol{z} \in T^*\mathbb{S}$ называют *горизонтальным (соотв. вертикальным)*, если $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ для всех *вертикальных (соотв. горизонтальных)* $\boldsymbol{v}$. Уравнение (2.5) означает, что в соответствии со связностью $\boldsymbol{z}$ расщеплено на горизонтальную составляющую $\chi(\boldsymbol{z}) \circ \pi^T$ и вертикальную составляющую $\mu(\boldsymbol{z}) \circ \boldsymbol{\omega}$.

2.2. Изоморфизмы касательного расслоения $T^*\mathbb{S}$ и расслоения $(T^*\mathbb{S}, \mathbb{S}, \overset{*}{o}_{\mathbb{S}})$. Взяв касательную к изоморфизму $\overset{*}{i}$ на рис. 2, мы получаем левую часть диаграммы на рис. 3.

С помощью результатов раздела 2.1 можно построить аналогичные изоморфизмы для $T(T^*\mathbb{S})$. Касательное пространство многообразия $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*$ изоморфно подмножеству $T\mathbb{S} \times T(T^*\mathbb{X}) \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$. На самом деле,

$$T\big(\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*\big) \sim T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) =$$

$$= \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \,|,\ \boldsymbol{v} \in T\mathbb{S},\ \boldsymbol{h} \in T(T^*\mathbb{X}),\ (\mathbf{z},\mathbf{w}) \in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*,\ \pi^T(\boldsymbol{v}) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\boldsymbol{h})\}.$$

Заметим, что если $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) \in T\mathbb{S} \times T(T^*\mathbb{X})$ – касательный вектор пространства $\mathbb{S} \times T^*\mathbb{X}$ в $(s, \boldsymbol{\xi})$, то из свойств касательных отображений для $\pi\colon \mathbb{S} \to \mathbb{X}$ и $\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\colon T^*\mathbb{X} \to \mathbb{X}$, а также из условия $\pi^T(\boldsymbol{v}) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\boldsymbol{h})$ следует, что

$$\pi(s) = \pi o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}) = o_{\mathbb{X}} \pi^T(\boldsymbol{v}) = o_{\mathbb{X}} \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\boldsymbol{h}) = \overset{*}{o}_{\mathbb{X}} o_{T^*\mathbb{X}}(\boldsymbol{h}) = \overset{*}{o}_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\xi}) \qquad (*)$$

Взяв касательную верхней диаграммы с рис. 2, мы получаем верхнюю часть диаграммы на рис. 4. Так как χ – морфизм векторных пучков над π, то выводим, что для $\boldsymbol{h} \in T(T^*\mathbb{S})$: $\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T} \chi^T(\boldsymbol{h}) = \pi^T \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\boldsymbol{h})$. Следовательно, очевидно, что прямоугольная диаграмма сверху коммутативна.

Можно сделать два вывода:

- Из единственного свойства $\pi^T(\boldsymbol{v}) = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})$ следует $\pi(s) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\xi})$ (с $s = o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{\xi} = o_{T^*\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})$),

- На рис. 4 средняя стрелка вниз на самом деле описывает отображение, принимающее значения в $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \times \mathfrak{g}$. Это обстоятельство, которое мы обозначили как $o_{\mathbb{S}} \times \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}} \times \boldsymbol{\omega} \circ \mathrm{pr}_1$, в точности совпадает с $(o_{\mathbb{S}} \circ \mathrm{pr}_1) \times (\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}} \circ \mathrm{pr}_2) \times (\boldsymbol{\omega} \circ \mathrm{pr}_1))$.

Чтобы определить отображение ν, рассмотрим отображение $\alpha \colon T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \to \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g}$, определенное как

$$\alpha \colon (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) \mapsto (o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})).$$

Так как, согласно $(*)$, из соотношения $\pi^T(\boldsymbol{v}) = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})$ следует $\pi(\, o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v})) = o_{\mathbb{X}}(\pi^T(\boldsymbol{v}))$ и $\pi(s) = o_{\mathbb{X}} \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})$, то отображение α на самом деле принимает значения в пространстве, определенном как

$$\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g} = \{(s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}) \mid \pi(s) = o_{\mathbb{X}} \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})\}.$$

Теперь определим отображение $\beta \colon \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g} \to T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X})$ как:

$$\beta \colon (s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}) \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) \;\text{ с }\; \boldsymbol{v} = \sigma^T_s(\mathbf{u}) + \Gamma(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})).$$

Так как $\pi^T(\boldsymbol{v}) = \pi^T \Gamma(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})) = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})$, то отображение β на самом деле принимает значения в $\mathfrak{g} \to T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X})$. Имеем $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$ и $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$, так что *$\alpha$ и β – взаимно обратные биективные отображения.*

$\square$ Если $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h})$ задано в пространстве $T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X})$, то имеем

$$\begin{aligned}
\beta \circ \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}) &= \beta(o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})) \\
&= \big(\sigma^T_s(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})) + \Gamma(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h})), \boldsymbol{h}\big) \\
&= \big(\sigma^T_s(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})) + \Gamma(s, \pi^T(\boldsymbol{v})), \boldsymbol{h}\big) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}).
\end{aligned}$$

Если $(s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u})$ задано в пространстве $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g}$, то имеем

$$\alpha \circ \beta(s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}) = \alpha\big(\sigma_s^T(\mathbf{u}) + \Gamma(s, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\boldsymbol{h})), \boldsymbol{h}\big) = (s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}),$$

потому что $\Gamma(s, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\boldsymbol{h}))$ горизонтально и $\boldsymbol{\omega}\big(\sigma_s^T(\mathbf{u})\big) = \mathbf{u}$. ∎

Наконец, с помощью соотношений

$$\nu\colon T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) \to \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g} \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)$$

$$\nu(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}, z, w) = (\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{h}), z, w), \;\; \nu^{-1}(s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}, z, w) = (\beta(s, \boldsymbol{h}, \mathbf{u}), z, w).$$

можно определить изоморфизм векторных пучков ν и убедиться в том, что диаграммы в правых треугольных частях рис. 3 и 4 коммутативны.

Изоморфизмы, оснащённые заданной связностью на $\mathbb{S}$, которые были выдвинуты на передний план в разделах 2.1 и 2.2 глобальны, однако они влекут за собой расслоенные произведения, которые нам будут неудобны для использования. В разделе 2.3 будут даны локальные, но более удобные изоморфизмы, опирающееся на обычные произведения.

2.3. Локальный вид пространства $T^*\mathbb{S}$. В дальнейшем воспользуемся двумя типами локальных представлений пространства $\mathbb{S}$ ([1]):

1. **Без координат:** Пусть $\mathcal{O}$ – открытое подмножество в $\mathbb{X}$, такое, что существует сечение $\mathrm{r}\colon \mathcal{O} \to \mathbb{S}$ этого расслоения. Тогда $\varphi\colon \mathcal{O} \times \mathbb{G} \to \mathbb{S}$ такое, что $\varphi(x, g) = g.\mathrm{r}(x)$ – диффеоморфизм на открытое подмножество $\mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$ of $\mathbb{S}$.

[1] Заметим, что под «картой» мы понимаем диффеоморфизм с областью в $\mathbb{R}^n$ и со значениями в многообразии, в то время как, строго говоря, это отображение обратно к такому диффеоморфизму, задающему карту. Из такого понимания не должно происходить ошибки.

2. **С координатами:** Пусть $\mathcal{Q}$ – открытое подмножество в $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ $(n = \dim \mathbb{X})$. Предположим, что $\gamma\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{O}$ – карта многообразия $\mathbb{X}$ и что $\mathrm{r}\colon \mathcal{Q} \to \pi^{-1}(\mathcal{O})$ $(= \mathcal{U})$ – поднятие γ в $\mathbb{S}$. Тогда $\varphi\colon \mathcal{Q} \times \mathbb{G} \to \mathcal{U}$, такое что $\varphi(q, g) = g.\mathrm{r}(q)$ – диффеоморфизм на открытое подмножество $\mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{O})$ пространства $\mathbb{S}$.

По определению главного расслоения, упомянутая выше окрестность любой точки пространства $\mathbb{X}$ такова, что локальные представления всегда существуют.

В общем случае представление 1 не может быть глобальным. Однако, как мы видели выше, глобальные представления вида 1 существуют для конфигурационного пространства аффинно-деформируемого тела. Из представления в виде 2 мы выводим представление в виде 1 с $\mathrm{r} \circ \gamma^{-1}$, $\mathcal{O} = \gamma(\mathcal{Q})$, но обратное в общем случае неверно.

Тогда $\mathcal{U}$ – открытое подмногообразие пространства $\mathbb{S}$, обладающее касательным и кокасательным пространствами

$$T\mathcal{U} = \{\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S} \mid o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{O}\}, \quad T^*\mathcal{U} = \{\boldsymbol{z} \in T^*\mathbb{S} \mid \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{O}\}.$$

В свою очередь, эти многообразия обладают касательными пространствами

$$\begin{aligned} T(T\mathcal{U}) &= \{\boldsymbol{h} \in T(T\mathbb{S}) \mid o_{T\mathbb{S}}(\boldsymbol{h}) \in T\mathcal{U}\} \\ &= \{\boldsymbol{h} \in T(T\mathbb{S}) \mid o_{\mathbb{S}} o_{T\mathbb{S}}(\boldsymbol{h}) \in \mathcal{U}\}, \\ T(T^*\mathcal{U}) &= \{\boldsymbol{k} \in T(T^*\mathbb{S}) \mid \overset{*}{o}_{T^*\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}) \in T^*\mathcal{U}\} \\ &= \{\boldsymbol{k} \in T(T^*\mathbb{S}) \mid \overset{*}{o}_{\mathbb{S}} \overset{*}{o}_{T^*\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

В рамках предположения 1 существует диффеоморфизм ϕ многообразия $\mathbb{G} \times T^*\mathcal{O}$ на $\mathcal{U} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathcal{O}$, открытое подмногообразие пространства $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X}$, такое, что

$$\phi\colon (g, \boldsymbol{\eta}) \mapsto \big(g.\mathrm{r}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}} \boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\eta}\big), \quad \phi^{-1}\colon (s, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (g, \boldsymbol{\eta})$$

$$\text{с } g, \text{ таким, что } s = g.\mathrm{r}(\pi(s)),$$

(отображение ϕ^{-1} дифференцируемо, так как отображение $s \mapsto g$ – не что иное, как $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi^{-1}$). Согласно результатам из разделов 2.1 и 2.2, отображения в нижней рис. 3 и 4 позволяет построить диффеоморфизмы пространств $\mathbb{G} \times T\mathcal{O} \times \mathfrak{g}$ и $\mathbb{G} \times^* \mathcal{O} \times \mathfrak{g}^*$ с открытым подмногообразием $T\mathcal{U}$ пространства $T\mathbb{S}$ и с открытым подмногообразием $T^*\mathcal{U}$ пространства $T^*\mathbb{S}$. Они определены, соответственно, как

$$(g, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{U}) \mapsto \boldsymbol{v} \in T\mathcal{U}, \tag{2.6}$$

такое, что $o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}) = g.\mathrm{r}(o_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\xi})) \equiv s$ и $\boldsymbol{v} = \sigma_s^T(\mathbf{U}) + \Gamma(s, \boldsymbol{\xi})$

$$\psi \colon (g, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P}) \mapsto \boldsymbol{z} \in T^*\mathcal{U} \tag{2.7}$$

такое что $\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) = g.\mathrm{r}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\boldsymbol{\eta})$ и $\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\eta}, \pi^T(\boldsymbol{v}) \rangle + \langle \mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) \rangle$.

Наоборот, если дано $\boldsymbol{v} \in T\mathcal{U}$ (соотв. $\boldsymbol{z} \in T^*\mathcal{U}$), то $(g, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})$ (соотв. $(g, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P})$) записывается как

$$\pi^T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{U}, \quad o_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{v}) = g.\mathrm{r}(o_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\xi})) = s,$$

$$\chi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\eta}, \quad \mu(\boldsymbol{z}) = \mathbf{P}, \quad \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) = g.\mathrm{r}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\eta})) = s,$$

что позволяет выразить обратные отображения и доказать их дифференцируемость. Например,

$$\psi^{-1}(\boldsymbol{z}) = (g, \chi(\boldsymbol{z}), \mu(\boldsymbol{z})) \ \text{ с } g = \mathrm{pr}_2 \varphi^{-1}(\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z})).$$

Теперь изоморфизм, появляющийся в верхней части рис. 3, задает диффеоморфизм

$$\psi^T \colon T(\mathbb{G} \times T^*\mathcal{O} \times \mathfrak{g}^*) \to T(T^*\mathcal{U})\big(\subset T(T^*\mathbb{S})\big) \colon (\delta g, \delta\boldsymbol{\eta}, \delta\mathbf{P}) \mapsto \delta\boldsymbol{z}$$

(заметим, что δg – касательный вектор к $\mathbb{G}$ с началом в g, $\delta\boldsymbol{\eta}$ – касательный вектор $T^*\mathbb{X}$ с началом в $\boldsymbol{\eta}$ и так далее). Более того, правая параллелизация $T\mathbb{G}\simeq\mathbb{G}\times\mathfrak{g}\colon\delta g\mapsto(g,\vartheta_r(\delta g))$ приводит к другому изоморфизму, который удовлетворяет многим соотношениям, таким как

$$T(\mathbb{G}\times T^*\mathcal{O}\times\mathfrak{g}^*)\simeq\mathbb{G}\times T(T^*\mathcal{O})\times\mathfrak{g}\times(\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*).$$

Перенесем естественные операции в $T(T^*\mathbb{S})$ на их образ с помощью представленных выше диффеоморфизмов: если величина $\delta\boldsymbol{z}=\psi^T(\delta g,\delta\boldsymbol{\eta},\delta\mathbf{P})$ задана в $T(T^*\mathcal{U})\subset T(T^*\mathbb{S})$, то существуют g, $\boldsymbol{\eta}$, $\mathbf{P}$ такие, что $\boldsymbol{z}=o_{T^*\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z})=\psi(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})$. Положим

$$s=\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}),\quad x=\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\eta}),$$

таким образом, что с этими сокращениями $x=\pi(s)$ (потому что $\pi\circ\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}=\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\circ\chi$) и

$$\begin{cases}\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z})=g.\mathrm{r}(x),\quad\chi^T(\delta\boldsymbol{z})=\delta\boldsymbol{\eta},\quad\mu^T(\delta\boldsymbol{z})=\delta\mathbf{P},\\[2ex] \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z})=\vartheta_r(\delta g).s+L_g^T\mathrm{r}^T(\delta x)\equiv\delta s\text{ с }\ \delta x=\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\in T\mathbb{X},\\[2ex] \boldsymbol{\omega}(\delta s)=\vartheta_r(\delta g)+\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}\big(\delta x\big),\quad\pi^T(\delta s)=\delta x.\end{cases}\tag{2.8}$$

Имеем следующие эквивалентности (для связности, определенной на $\mathbb{S}$):

$$\delta s\ \text{горизонтален}\quad\Longleftrightarrow$$

$$\delta g=-L_g^T\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\delta x)\ (\in T\mathbb{G})\Rightarrow\delta\boldsymbol{z}\sim\big(g,\delta\boldsymbol{\eta},-\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\delta x),\delta\mathbf{P}\big),$$

δs вертикален $\Longleftrightarrow$ $\delta\boldsymbol{\eta}$ вертикален к касательному расслоению с

$$\tau^*(\mathbb{X})=(T^*\mathbb{X},\mathbb{X},\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}).$$

□ Чтобы доказать формулу для $\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z})$ заметим, что величина $\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}$ ${}^T\big(\psi^T(\delta\boldsymbol{z},\delta\boldsymbol{\eta},\delta\mathbf{P})\big)$ – значение касательного отображения величины

$$\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}\circ\psi\colon(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})\mapsto g.\mathrm{r}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\boldsymbol{\eta})=s.$$

Первая эквивалентность очевидна. Из соотношения $\pi\circ \overset{*}{o}_{\mathbb{S}} = \overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\circ\chi$ следует, что $\pi^T(\delta s) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^T(\delta\boldsymbol{\eta}) = \delta x$, и последняя эквивалентность также справедлива. ∎

Лемма 1 *Если* $\boldsymbol{z}\in T^*\mathbb{S}$, $s = \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z})$, δs *– произвольный заданный* вертикальный *вектор в* $T_s\mathbb{S}$, $\delta\mathbf{P}$ *– данный элемент из* $\mathfrak{g}^*$ *и* $\delta\boldsymbol{\eta}$ *задано в* $T_{\boldsymbol{\eta}}(T^*\mathbb{X})$, *то существует* $\delta\boldsymbol{z}\in T_{\boldsymbol{z}}(T^*\mathbb{S})$ *такое, что в обозначениях из* (2.8):

$$\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^T(\delta\boldsymbol{z}) = \delta s, \quad \chi^T(\delta\boldsymbol{z}) = \delta\boldsymbol{\eta}, \quad d\mu(\delta\boldsymbol{z}) = \delta\mathbf{P}.$$

□ Любой элемент $\boldsymbol{z}$ из $T^*\mathbb{S}$ принадлежит, как и выше, открытому подмногообразию $T^*\mathcal{U}$, и мы можем предположить, что $\boldsymbol{z} = \psi(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})$ и $\delta\boldsymbol{z}$ должно иметь вид $\delta\boldsymbol{z} = \psi^T(\delta g,\delta\boldsymbol{\eta},\delta\mathbf{P})$. Так как $T_{(g,\eta,\mathbf{P})}(\mathbb{G}\times T^*\mathcal{O}\times\mathfrak{g}^*)\simeq T_g\mathbb{G}\times T_{\eta}(T^*\mathcal{O})\times(\mathbf{P}\times\mathfrak{g}^*))$, то обычное произведение, произвольные касательные векторы δg, $\delta\boldsymbol{\eta}$ и $\delta\mathbf{P}$ с началами соответственно в g, $\boldsymbol{\eta}$ и $\mathbf{P}$ допустимы в конструкции для $\delta\boldsymbol{z}$.

Второе и третье условия определяют $\delta\boldsymbol{\eta}$ и $\delta\mathbf{P}$, в результате чего имеем $\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^T(\delta\boldsymbol{z}) = \vartheta_r(\delta g).s$. Так как для вертикального векторы из $T\mathbb{S}$, имеем $\delta s = \boldsymbol{\omega}(\delta s).s$, то достаточно взять $\delta g = R_g^T(\boldsymbol{\omega}(\delta s))$, чтобы выполнялось соотношение $\vartheta_r(\delta g) = \boldsymbol{\omega}(\delta s)$. ∎

3. Гамильтоновы системы на $T^*\mathbb{S}$.

3.1. Лиувиллева форма и симплектическая форма $T^*\mathbb{S}$.

Лиувиллевы формы и связанные с ними симплектические структуры, определенные 2-формами Дарбу, на $T^*\mathbb{S}$ и на $T^*\mathbb{X}$ задаются как

$$\ell_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}) = \langle o_{T^*\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^T(\boldsymbol{k})\rangle = \langle \boldsymbol{z}, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^T(\boldsymbol{k})\rangle \ \text{ для } \ \boldsymbol{k}\in T_{\boldsymbol{z}}(T^*\mathbb{S}),$$

$$\ell_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{h}) = \langle o_{T^*\mathbb{X}}(\boldsymbol{h}), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^T(\boldsymbol{h})\rangle = \langle \boldsymbol{\eta}, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^T(\boldsymbol{h})\rangle \ \text{ для } \ \boldsymbol{h}\in T_{\boldsymbol{\eta}}(T^*\mathbb{X}),$$

$$\gamma_{\mathbb{S}} = d\ell_{\mathbb{S}}, \quad \gamma_{\mathbb{X}} = d\ell_{\mathbb{X}} \text{ (внешние дифференциалы).}$$

Скобка двойственности между $T^*\mathbb{S}$ и $T\mathbb{S}$ удовлетворяет соотношению (2.5) таковы, что $\pi^T \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}) = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}\chi^T(\boldsymbol{k})$, причем

$$\begin{aligned}\ell_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{k}) &= \langle \chi(\boldsymbol{z}), \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}\chi^T(\boldsymbol{k})\rangle + \langle \mu(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\omega}\big(\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{k})\big)\rangle = \\ &= \ell_{\mathbb{X}}\big(\chi^T(\boldsymbol{k})\big) + \langle \mu(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{\omega}\big(\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{k})\big)\rangle.\end{aligned}$$

Эта формула означает, что

$$\ell_{\mathbb{S}} = \chi^*\ell_{\mathbb{X}} + \langle \mu, o^*_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\omega}\rangle \tag{3.1}$$

где $\chi^*\ell_{\mathbb{X}}$ – поднятие формы Лиувилля в $\mathbb{X}$ с помощью $\chi\colon T^*\mathbb{S} \to T^*\mathbb{X}$ и $o^*_{\mathbb{X}}\boldsymbol{\omega}$ – поднятие формы $\boldsymbol{\omega}$ с помощью отображения $\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}\colon T^*\mathbb{S} \to \mathbb{S}$. Исходя из этого равенства, нетрудно вычислить связанные с ними симплектические формы и таким образом найти

$$\gamma_{\mathbb{S}} = \chi^*\gamma_{\mathbb{X}} + \langle d\mu \wedge o^*_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle \mu, o^*_{\mathbb{S}}d\boldsymbol{\omega}\rangle.$$

Внешний дифференциал формы связности и кривизна Ω связности связаны с помощью уравнения Картана вида $d\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] + \boldsymbol{\Omega}$ (для действия слева), и окончательно

$$\gamma_{\mathbb{S}} = \chi^*\gamma_{\mathbb{X}} + \langle d\mu \wedge o^*_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\omega}\rangle + \langle \mu, [o^*_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\omega}, o^*_{\mathbb{S}}\boldsymbol{\omega}] + o^*_{\mathbb{S}}\Omega\,\rangle. \tag{3.2}$$

Чтобы получить в явном виде более развернутые формы соотношений (3.2), воспользуемся обозначениями, употребляемыми физиками, и обозначим как $\delta\boldsymbol{z}$ элемент пространства $T_{\boldsymbol{z}}(T^*\mathbb{S})$. Тогда

$$s = o^*_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) \in \mathbb{S}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \chi(\boldsymbol{z}) \in T^*\mathbb{X}, \qquad \mathbf{P} = \mu(o_{T^*\mathbb{S}}(\boldsymbol{z})) \in \mathfrak{g}^*,$$

$$\delta s = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z}) \in T_s\mathbb{S}, \quad \delta\boldsymbol{\eta} = \chi^T(\delta\boldsymbol{z}) \in T_{\boldsymbol{\eta}}(T^*\mathbb{X}), \quad \delta\mathbf{P} = d\mu(\delta\boldsymbol{z}) \in \mathfrak{g}^*,$$

и всегда могут быть проверены следующие эквивалентные условия

$$\pi^T(\delta s) = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}) \Longleftrightarrow \mathrm{hor}(\delta s) = \Gamma\big(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big). \tag{3.3}$$

Таким образом, для касательных векторов $\delta\boldsymbol{z}$ и $\delta'\boldsymbol{z}$, принадлежащих пространству $T_{\boldsymbol{z}}(T^*\mathbb{S})$:

$$\ell_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z}) = \ell_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}) + \langle\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle,$$

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{S}}(\delta'\boldsymbol{z}, \delta\boldsymbol{z}) = {} & \gamma_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta}) + \langle\delta'\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle - \langle\delta\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta' s)\rangle + \\ & + \langle\mathbf{P}, [\boldsymbol{\omega}(\delta' s), \boldsymbol{\omega}(\delta s)] + \boldsymbol{\Omega}(\delta' s, \delta s)\rangle = \\ & = \gamma_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta}) + \langle\mathbf{P}, \overline{\boldsymbol{\Omega}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta})\rangle + \langle\delta'\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle - \\ & - \langle\delta\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta' s)\rangle + \langle\mathbf{P}, [\boldsymbol{\omega}(\delta' s), \boldsymbol{\omega}(\delta s)]\rangle\end{aligned} \tag{3.4}$$

с (3.3) (и потому, что $\boldsymbol{\Omega}(\delta' s, \delta s) = \boldsymbol{\Omega}(\operatorname{hor}\delta' s, \operatorname{hor}\delta s)$):

$$\boldsymbol{\Omega}(\delta' s, \delta s) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\Omega}\Big(\Gamma\big(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta})\big), \Gamma\big(s, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big)\Big).$$

Теперь обратимся к обозначениям раздела 2.3. Если $s = g.\mathrm{r}(x)$, то векторы δs и $L_g^T \mathrm{r}^T \pi^T(\delta s)$ принадлежат $T_s\mathbb{S}$ и обладают одинаковыми проекциями на $T_x\mathbb{X}$. Тогда $\operatorname{hor}\delta s = \operatorname{hor} L_g^T \mathrm{r}^T \pi^T(\delta s) = L_g^T \operatorname{hor}\mathrm{r}^T \pi^T(\delta s) = L_g^T \operatorname{hor}\mathrm{r}^T\, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})$ (см. (3.3)) и

$$\boldsymbol{\Omega}(\delta' s, \delta s) = \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}), \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big).$$

Поэтому формула (3.4) позволяет определить $\mathfrak{g}$-значную 2-форму («зависящую от параметров $\mathbf{P}$ и g, а на самом деле – лишь от параметра $\operatorname{Ad}^* g^{-1}.\mathbf{P}$» – точки коприсоединенной орбиты $\mathbf{P}$) такую что

$$\bar{\gamma}_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta}) = \gamma_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}, \delta\boldsymbol{\eta}) + \langle\mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\, \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta'\boldsymbol{\eta}), \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big).$$

Лемма 2 *Для фиксированного значения* $\operatorname{Ad}^* g^{-1}.\mathbf{P}$ $\bar{\gamma}_{\mathbb{X}}$ *– почти симплектическая структура на* $T^*\mathbb{X}$*.*

Логично упомянуть об этом свойстве именно здесь. Оно может быть легко доказано с помощью координат на $\mathbb{X}$ (необходимые вычисления приведены, в основном, в доказательстве соотношения (3.16), данном ниже). Заметим, что эта модификация канонической симплектической структуры на $T^*\mathbb{X}$ сама по себе не является симплектической структурой, так как не является замкнутой 2-формой для второй части с $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}$.

3.2. Гамильтоново векторное поле. Начиная отсюда, вернемся к обозначениям раздела 2.3. Пусть $F\colon T^*\mathbb{S}\to\mathbb{R}$ - дифференцируемая функция и $\mathcal{F}=F\circ\psi\colon \mathbb{G}\times T^*\mathcal{O}\times\mathfrak{g}^*\to\mathbb{R}$ – ее локальное выражение на $T^*\mathcal{U}$. Тогда

$$dF(\delta\boldsymbol{z})=\partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)(\vartheta_r(\delta g))+\partial_\eta\mathcal{F}(\cdot)(\delta\boldsymbol{\eta})+\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)(\delta\mathbf{P})= \tag{3.5}$$

$$=\partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)(\boldsymbol{\omega}(\delta s))+\partial_\eta\mathcal{F}(\cdot)(\delta\boldsymbol{\eta})-\partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)\big(\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}))\big)+\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)(\delta\mathbf{P}),$$

где $(\cdot)$ означает $(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})$. Например, $\partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)\,(:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*)$ – это правая производная отображения $g\mapsto\mathcal{F}(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})$ для фиксированных $\boldsymbol{\eta}$ и $\mathbf{P}$, а $\partial_\eta\mathcal{F}(\cdot)\,(:T_\eta(T^*\mathbb{X})\to\mathbb{R})$ – касательное отображение отображения $\boldsymbol{\eta}\mapsto\mathcal{F}(g,\boldsymbol{\eta},\mathbf{P})$ для фиксированных g и $\mathbf{P}$. Формула (3.5) интересна тем, что она дает значения $dF(\delta\boldsymbol{z})$ в тех частных случаях, когда $\delta\boldsymbol{z}$ обладает соответствующими геометрическими свойствами (например, когда $\delta s=\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z})$ будет горизонтальным в соответствии со связностью, определенной величиной $\boldsymbol{\omega}$).

Лемма 3 *Пусть $Y\colon T^*\mathbb{S}\to T(T^*\mathbb{S})$ – векторное поле на $T^*\mathbb{S}$. Положим*

$$\begin{cases} X=\chi^T\circ Y\colon T^*\mathbb{S}\to T(T^*\mathbb{X}),\\[2ex] U=\boldsymbol{\omega}\circ\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}\circ Y\colon T^*\mathbb{S}\to\mathfrak{g},\\[2ex] W=d\mu\circ Y\colon T^*\mathbb{S}\to\mathfrak{g}^*.\end{cases}$$

Тогда для естественной симплектической структуры на $T^*\mathbb{S}$

$$\gamma_{\mathbb{S}}(Y(\boldsymbol{z}),\delta\boldsymbol{z})=\gamma_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}),\delta\boldsymbol{\eta})+\langle\mathbf{P},\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z})),\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big)\rangle+$$
$$+\langle W(\boldsymbol{z})-\mathrm{ad}^*U(\boldsymbol{z}).\mathbf{P},\boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle-\langle\delta\mathbf{P},U(\boldsymbol{z})\rangle, \tag{3.6}$$

где, как и выше, $\delta s=\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}(\delta\boldsymbol{z})$, $\delta\boldsymbol{\eta}=\chi^T(\delta\boldsymbol{z})$, $\delta\mathbf{P}=d\mu(\delta\boldsymbol{z})$.

$\square$ Применяя (3.2) или более развернутый вид (3.4) для симплектической структуры на $T^*\mathbb{S}$, имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbb{S}}(Y(\boldsymbol{z}),\delta\boldsymbol{z}) &= \gamma_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}),\delta\boldsymbol{\eta}) + \langle W(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle - \langle\delta\mathbf{P},U(\boldsymbol{z})\rangle \\ &+ \langle\mathbf{P},[U(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{\omega}(\delta s)] + \boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(Y(\boldsymbol{z})),\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z})\big)\rangle \qquad (\star)\end{aligned}$$

Преобразуем слагаемое, содержащее $\boldsymbol{\Omega}$. Так как $\pi^T\circ\ \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{\,T} = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}$ ${}^T\circ\chi^T$, то

$$\pi^T\,\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(Y(\boldsymbol{z})) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}\,(X(\boldsymbol{z})), \quad \pi^T\,\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z}) = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}\,(\delta\boldsymbol{\eta}).$$

Если $\boldsymbol{v}\in T_s\mathbb{S}$ $(s = g.\mathrm{r}(x))$ и $\boldsymbol{w} = \pi^T(\boldsymbol{v})$, то $\boldsymbol{v}$ и $L_g^T\mathrm{r}^T(\boldsymbol{w})$ имеет такую же проекцию на $T_x\mathbb{X}$. Поэтому они также имеют одинаковые горизонтальные компоненты, равные

$$\mathrm{hor}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{hor}\,L_g^T\mathrm{r}^T(\boldsymbol{w}) \equiv L_g^T\big(\mathrm{hor}\,\mathrm{r}^T(\boldsymbol{w})\big).$$

Применим это свойство вместе $\boldsymbol{v} = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{\,T}(Y(\boldsymbol{z}))$ и $\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{\,T}(X(\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{w}$ или вместе $\boldsymbol{v}' = \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{\,T}(\delta\boldsymbol{z})$ и $\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{\,T}(\delta\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{w}'$. Так как $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{hor}\,\boldsymbol{v},\mathrm{hor}\,\boldsymbol{v}')$, то находим

$$\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(Y(\boldsymbol{z})),\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z})\big) = \mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}\big(\mathrm{hor}\,\mathrm{r}^T\ \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(X(\boldsymbol{z})),\mathrm{hor}\,\mathrm{r}^T\ \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta})\big) =$$

$$= \mathrm{Ad}\,g.\Omega\big(\mathrm{r}^T\,\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(X(\boldsymbol{z})),\mathrm{r}^T\,\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta})\big) = \mathrm{Ad}\,g.\Omega_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(X(\boldsymbol{z})),\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta})\big).$$

В итоге соотношение (3.6) следует из $(\star)$. $\blacksquare$

Лемма 4 *Для того, чтобы Y было бы гамильтоновым векторным полем, связанным с функцией Гамильтона F на $T^*\mathbb{S}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$U(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}Y(\boldsymbol{z})\big) = \iota\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \tag{3.7}$$

$$W(\boldsymbol{z}) = -\,\partial_g^r\mathcal{F}(\cdot) + \mathrm{ad}^*\big(\iota\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)\big).\mathbf{P}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\forall\,\delta\boldsymbol{\eta}\ :\ \ &\gamma_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}),\delta\boldsymbol{\eta}) + \langle\mathbf{P},\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(X(\boldsymbol{z})),\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta})\big)\rangle = \\ &= -\partial_{\eta}\mathcal{F}(\cdot)(\delta\boldsymbol{\eta}) + \partial_g^r\mathcal{F}(\cdot)\big(\mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta}))\big),\end{aligned} \tag{3.9}$$

(где ι обозначает естественный изоморфизм $\mathfrak{g}^{**}$ на $\mathfrak{g}$ и $\mathcal{F} = F \circ \psi$).

Условие (3.9) определяет проекции $Y(\boldsymbol{z})$ на $T^*\mathbb{X}$ и выглядит подобно определению гамильтоновой системы с модифицированной симплектической структурой на $T^*\mathbb{X}$. Однако $X \colon T^*\mathbb{S} \to T^*\mathbb{X}$ не является векторным полем на $T^*\mathbb{X}$ – оно является «векторным полем, зависящим от g и $\mathbf{P}$». Более того, 2-форма $\gamma_{\mathbb{X}} + \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}\big)\rangle$, зависящая от параметров g и $\mathbf{P}$, незамкнута.

$\square$ Гамильтоново векторное поле Y определено как

$$\forall\, \delta \boldsymbol{z} \in T(T^*\mathbb{S}) : \gamma_{\mathbb{S}}\big((Y(\boldsymbol{z}), \delta \boldsymbol{z}\big) = -dF(\delta \boldsymbol{z}). \tag{3.10}$$

Принимая во внимание (3.6), можно сказать, что это эквивалентно тому, что $\forall\, \delta s, \delta \boldsymbol{\eta}, \delta \mathbf{P}$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}), \delta \boldsymbol{\eta}) + \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(X(\boldsymbol{z})), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta \boldsymbol{\eta})\big)\rangle + \\
&+ \langle W(\boldsymbol{z}) - \mathrm{ad}^{*} U(\boldsymbol{z}).\mathbf{P} + \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot), \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle - \\
&- \langle \delta \mathbf{P}, U(\boldsymbol{z}) - \iota \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot)\rangle = \\
&= -\, \partial_{\eta} \mathcal{F}(\cdot)(\delta \boldsymbol{\eta}) + \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot)\big(\mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta \boldsymbol{\eta}))\big).
\end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

Прежде всего мы обратимся к лемме 1 и выберем $\delta \boldsymbol{z}$ таким, что $\delta s = \mathbf{0}_{s}$, $\delta \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}_{\eta}$ (так что $\vartheta_r(\delta g) = \mathbf{0}$ с (2.8)) и $\delta \mathbf{P}$ – произвольный элемент $\mathfrak{g}^*$. Из ($\star\star$) выводим условие

$$\forall\, \delta \mathbf{P} \in \mathfrak{g}^* : \langle \delta \mathbf{P}, U(\boldsymbol{z}) - \iota \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot)\big)\rangle = 0,$$

которое эквивалентно соотношению (3.7). Далее, согласно лемме 1, выберем $\delta \boldsymbol{z}$ таким, что вариация δs вертикальна и $\boldsymbol{\omega}(\delta s)$ – произвольный элемент $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$, $\delta \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}_{\eta}$ и $\delta \mathbf{P} = \mathbf{0}$. С помощью (3.6) мы выводим условие

$$\forall\, \mathbf{u} \in \mathfrak{g} \colon \langle W(\boldsymbol{z}) - \mathrm{ad}^{*} U(\boldsymbol{z}).\mathbf{P} + \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot), \mathbf{u}\rangle = 0,$$

которое дает (3.8). На этом шаге из соотношения (3.10) следуют соотношения (3.7), (3.8) и (3.9). И наоборот, очевидно, что из (3.7), (3.8) и (3.9) следует ($\star\star$), что эквивалентно соотношению (3.10). ∎

Движение в фазовом пространстве $T^*\mathbb{S}$ будет определено отображением $t \mapsto \boldsymbol{z}(t) = \psi(g(t), \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{P}(t))$ с $\boldsymbol{\eta}(t) = \chi(\boldsymbol{z}(t))$ и $\mathbf{P}(t) = \mu(\boldsymbol{z}(t))$ и динамическими уравнениями, связанными с функцией Гамильтона F на $T^*\mathbb{S}$, и имеющими вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = X(\cdot), \quad \boldsymbol{\omega}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \iota\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \\ &\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\partial_g^r\mathcal{F}(\cdot) + \operatorname{ad}^*\big(\iota\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)\big).\mathbf{P}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

и уравнением (3.9), которое определяет проекцию $X(\boldsymbol{z})$ вектора $Y(\boldsymbol{z})$ на $T^*\mathbb{X}$. Вычислим $X(\boldsymbol{z})$ в предположениях 2 раздела 2.3 в координатах $q = (q_1, \dots q_n) \in \mathcal{Q}$ на $\mathcal{O}$, таких что $T^*\mathcal{O} \simeq \mathcal{Q} \times \mathrm{E}^*$. Теперь $\boldsymbol{\eta} \sim (q,p)$ с $\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}(\boldsymbol{\eta}) \sim q$, $p \in \mathrm{E}^*$ и отображение ψ принимает вид

$$\psi\colon (q, g, p, \mathbf{P}) \mapsto z \text{ такое, что } \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) = g.\mathrm{r}(q)$$

и для $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{S}$:

$$\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle p, w\rangle + \langle \mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})\rangle,$$

где $w \in \mathrm{E}$ – вектор координат на $\pi^T(\boldsymbol{v})$ $(\gamma^T(w) = \pi^T(\boldsymbol{v}))$.

Перенесем естественные операции в $T(T^*\mathbb{S})$ на их образ с помощью предыдущих диффеоморфизмов. Тогда $\delta\boldsymbol{\eta} \sim$ $((q,p),(\delta q, \delta p))$ и, если $\delta\boldsymbol{z} = \psi^T(q, g, p, \mathbf{P}, \delta q, \delta g, \delta p, \delta\mathbf{P})$ заданы в $T(T^*\mathcal{U}) \subset T(T^*\mathbb{S})$, то вместо (2.8) имеем

$$s = g.\mathrm{r}(q), \quad x = \gamma(q)$$

$$\begin{cases} \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{z}) \;= g.\mathrm{r}(q),\ \chi^T(\delta\boldsymbol{z}) = ((q,p),(\delta q, \delta p)),\ \mu^T(\delta\boldsymbol{z}) = \delta\mathbf{P}, \\ \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z}) = \vartheta_r(\delta g).s + L_g^T \mathrm{r}^T(q, \delta q) \equiv \delta s, \\ \boldsymbol{\omega}(\delta s) \;= \vartheta_r(\delta g) + \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}\big(q, \delta q\big), \quad \pi^T(\delta s) = \gamma^T(q, \delta q). \end{cases} \tag{3.12}$$

Если мы вновь обозначим $\mathcal{F} = F \circ \psi$, тогда $\delta\boldsymbol{\eta} \sim ((q,p),(\delta q,\delta p))$ и, если $(\cdot)$ теперь означает $(q,g,p,\mathbf{P})$:

$$dF(\delta \boldsymbol{z}) = \partial_q \mathcal{F}(\cdot)(\delta q) + \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot)(\vartheta_r(\delta g)) + \partial_p \mathcal{F}(\cdot)(\delta p) + \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot)(\delta \mathbf{P}),$$

так что вместо (3.5), получилось бы

$$dF(\delta \boldsymbol{z}) = \nabla_q \mathcal{F}(\cdot)(\delta q) + \partial_g^r \mathcal{F}(.)(\boldsymbol{\omega}(\delta s)) + \partial_p \mathcal{F}(\cdot)(\delta p) + \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot)(\delta \mathbf{P}) \quad (3.13)$$

где *частная* ковариантная производная F в связности определена как

$$\nabla_q \mathcal{F}(\cdot)(\delta q) = \partial_q \mathcal{F}(\cdot)(\delta q) - \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot)\big(\operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q,\delta q)\big). \quad (3.14)$$

Отметим, что, если мы рассмотрим отображение $(q,g) \mapsto \mathcal{F}(q,g,p,\mathbf{P})$ для фиксированных p и $\mathbf{P}$ как локальное представление отображения $s \mapsto f(s) = \mathcal{F}(q,g,p,\mathbf{P})$, определенного для $s \in \mathcal{U}$, то $\partial_g^r \mathcal{F}(\cdot) \in \mathfrak{g}^*$ и $\nabla_q \mathcal{F}(\cdot) \in \mathrm{E}^*$ – производная Ли и ковариантная производная f, согласно [6] раздел 1.3, формулы (1.6) и (1.7) (и также своего рода *частная* производная Ли и ковариантная производная F, зависящая от локальной тривиализации пучка). Напомним, что $\mathbb{G}$ действует на функции F на $T^*\mathbb{S}$ как $F(h.\boldsymbol{z}) = \mathcal{F}(q, h.g, p, \operatorname{Ad}^* h.\mathbf{P})$ и соответствующая вещественная (и «полная») производная Ли функции F, которая была вычислена выше и будет использована ниже, отлична от $\partial_g^r \mathcal{F}(.)$, но

$$\pounds_{\mathbb{G}} F(\boldsymbol{z}) = \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot) - \operatorname{ad}^*\big(\iota \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot)\big).\mathbf{P}. \quad (3.15)$$

«Векторное поле» X может быть описано отображением $\mathcal{Q} \times \mathbb{G} \times \mathrm{E}^* \times \mathfrak{g}^* \to \mathcal{Q} \times \mathrm{E}^* \times \mathrm{E} \times \mathrm{E}^*$

$(p,q) \mapsto (q,p,X_q(\cdot),X_p(\cdot))$, где $X_q(q,p) = dq(X(\cdot)) \in \mathrm{E}$ и $X_p(\cdot) = dp(X(\cdot)) \in \mathrm{E}^*$.

Тогда $\overset{*}{o}{}^{T}_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z})) \sim (q, X_q(\cdot))$, и $\chi_{\mathbb{X}} \sim dp \wedge dq$, так что

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}), \delta\boldsymbol{\eta}) &= \langle X_p(\cdot), \delta q\rangle - \langle \delta p, X_q(\cdot)\rangle, \\ \langle \mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\overset{*}{o}{}^{T}_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z})), \overset{*}{o}{}^{T}_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta})\big)\rangle &= \langle \mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(X_q(\cdot), \delta q\big)\rangle. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (3.9) записывается для всех $\delta q \in \mathrm{E}$ и всех $\delta p \in \mathrm{E}^*$:

$$\langle X_p(\cdot), \delta q\rangle - \langle \delta p, X_q(\cdot)\rangle + \langle \mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(X_q(q,p), \delta q\big)\rangle =$$

$$= -\langle \nabla_q \mathcal{F}(\cdot), \delta q\rangle - \langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \delta p\rangle$$

Тогда

$$\begin{aligned} &X_q(\cdot) = \iota\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \\ &X_p(\cdot) = -\nabla_q\mathcal{F}(\cdot) - \langle \mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\partial_p\mathcal{F}(\cdot), .\big)\rangle, \end{aligned} \tag{3.16}$$

где ι обозначает изоморфизм $\mathfrak{g}^{**} \to \mathfrak{g}$ также как и изоморфизм $\mathrm{E}^{**} \to \mathrm{E}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\partial_p\mathcal{F}(\cdot), .\big)$ обозначает отображение $\delta q \mapsto \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \delta q\big)$ из E в $\mathfrak{g}$.

Мы можем сделать вывод о том, что уравнения динамики механических систем с конфигурационным пространством, представляющим собой главное расслоение $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$, оснащенное главной динамической связностью, гамильтониан которых – функция H на $T^*\mathbb{S}$, имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\nabla_q\mathcal{H}(\cdot) - \langle \mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\partial_p\mathcal{H}(\cdot), .\big)\rangle, \ \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = -\pounds_{\mathbb{G}}\mathcal{H}(\cdot), \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = \iota\partial_p\mathcal{H}(\cdot), \quad \boldsymbol{\omega}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = \iota\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{H}(\cdot), \end{cases} \tag{3.17}$$

где $\mathcal{H} = H \circ \psi$.

3.3. Скобка Пуассона. Скобка Пуассона двух функций F и G на $T^*\mathbb{S}$ определена как $\{F,G\} = X_{F}.G = dG\,(X_{F})$. Принимая во внимание (3.13), примененное к G и $\mathcal{G} = G\circ\psi$:

$$
\begin{aligned}
dG\,(\delta \boldsymbol{z}) &= \nabla_q\mathcal{G}(\cdot)(\delta q) + \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot)(\boldsymbol{\omega}(\delta s)) + \partial_p\mathcal{G}(\cdot)(\delta p) + \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)(\delta\mathbf{P}) = \\
&= \nabla_q\mathcal{G}(\cdot)(\delta q) + \langle \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot), \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle + \langle \delta p, \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\rangle + \langle \delta\mathbf{P}, \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)\rangle.
\end{aligned}
$$

Нам надо применить эту формулу с

$$
\begin{aligned}
\delta q &= X_q(\cdot) = \quad \iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \\
\delta p &= X_p(\cdot) = -\nabla_q\mathcal{F}(\cdot) - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}(\iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot),\cdot)\rangle, \\
\boldsymbol{\omega}(\delta s) &= U(\boldsymbol{z}) = \quad \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \\
\delta\mathbf{P} &= W(\boldsymbol{z}) = -\partial^r_g\mathcal{F}(\cdot) + \mathrm{ad}^*\big(\iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)\big).\mathbf{P} \equiv \pounds_{\mathbb{G}}F(\boldsymbol{z}),
\end{aligned}
$$

(см. (3.15)) и затем

$$
\begin{aligned}
&\nabla_q\mathcal{G}(\cdot)(\delta q) = \nabla_q\mathcal{G}(\cdot)(\iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot)) = \langle \partial_p\mathcal{F}(\cdot)), \nabla_q\mathcal{G}(\cdot)\rangle, \\
&\langle \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot), \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle = \langle \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot)\rangle = \langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot)\rangle \equiv \\
&\equiv \langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \pounds_{\mathbb{G}}\mathcal{G}(\cdot)\rangle + \langle \mathbf{P}, [\iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)]\rangle, \\
&\langle \delta p, \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\rangle = -\langle \nabla_q\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle = \\
&= -\langle \partial_p\mathcal{G}(\cdot), \nabla_q\mathcal{F}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle, \\
&\langle \delta\mathbf{P}, \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)\rangle = -\langle \partial^r_g\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, [\iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)]\rangle = \\
&= -\langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot), \partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, [\iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)]\rangle \equiv -\langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot), \pounds_{\mathbb{G}}\mathcal{F}(\cdot)\rangle.
\end{aligned}
$$

Наконец, в области координат $q, g, p, \mathbf{P}$, локальные выражения для скобки Пуассона на $T^*\mathbb{S}$ могут принимать две эквивалентные формы (3.18) и (3.19), приведенные ниже

$$
\begin{aligned}
&\{F,G\} = \langle \partial_p\mathcal{F}(\cdot), \nabla_q\mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_p\mathcal{G}(\cdot), \nabla_q\mathcal{F}(\cdot)\rangle - \\
&-\langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\,g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\,\partial_p\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_p\mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle + \langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \partial^r_g\mathcal{G}(\cdot)\rangle - \\
&-\langle \partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot), \partial^r_g\mathcal{F}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, [\iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{F}(\cdot), \iota\,\partial_{\mathbf{P}}\mathcal{G}(\cdot)]\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$\{F,G\} = \langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \nabla_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_p \mathcal{G}(\cdot), \nabla_q \mathcal{F}(\cdot)\rangle -$$
$$-\langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\, \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \iota\, \partial_p \mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle + \langle \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot), \pounds_{\mathbb{G}} \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \qquad (3.19)$$
$$-\langle \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{G}(\cdot), \pounds_{\mathbb{G}} \mathcal{F}(\cdot)\rangle + \langle \mathbf{P}, [\iota\, \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{F}(\cdot), \iota\, \partial_{\mathbf{P}} \mathcal{G}(\cdot)]\rangle.$$

Замечание. Используя соотношения (3.14) для G, находим, например, что

$$\begin{aligned}\langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \nabla_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle &= \langle \nabla_q \mathcal{G}(\cdot), \iota\partial_p \mathcal{F}(\cdot)\rangle \\ &= \langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \partial_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_g^r \mathcal{G}(\cdot), \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q, \iota\partial_p \mathcal{F}(\cdot))\rangle\end{aligned}$$

и первая строка в (3.18) или (3.19) имеет вид

$$\begin{aligned}&\langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \nabla_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_p \mathcal{G}(\cdot), \nabla_q \mathcal{F}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\, \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \iota\, \partial_p \mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle = \\ &= \langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \partial_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_p \mathcal{G}(\cdot), \partial_q \mathcal{F}(\cdot)\rangle + \langle \partial_g^r \mathcal{F}(\cdot), \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q, \iota\partial_p \mathcal{G}(\cdot))\rangle - \\ &- \langle \partial_g^r \mathcal{G}(\cdot), \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(q, \iota\partial_p \mathcal{F}(\cdot))\rangle - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\, \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \iota\, \partial_p \mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle\end{aligned}$$

Слагаемые

$$\langle \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \nabla_q \mathcal{G}(\cdot)\rangle - \langle \partial_p \mathcal{G}(\cdot), \nabla_q \mathcal{F}(\cdot)\rangle - \langle \mathbf{P}, \mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{r}}\big(\iota\, \partial_p \mathcal{F}(\cdot), \iota\, \partial_p \mathcal{G}(\cdot)\big)\rangle$$

в (3.18) и (3.19) представляют скобку Пуассона «на базе» расслоения, модифицированного за счет присутствия производной ∇ с формой связности и со слагаемым, связанным с кривизной. Оставшиеся слагаемые – скобки Пуассона «на слоях» и выглядят как скобки Пуассона, появляющиеся в [5], раздел 7.

Скобка Пуассона, определенная как (3.18), инвариантна под естественным действием слева $\mathbb{G}$ на $T^*\mathbb{S}$.

Изоморфизм $\overset{*}{i}$ из раздела 2.1 преобразует левое действие группы $\mathbb{G}$ на $T^*\mathbb{S}$ в действие группы $\mathbb{G}$ на $\mathbb{S} \times T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*$, определенное как $a.(s, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{u}) = (a.s, \boldsymbol{\xi}, \mathrm{Ad}^* a.\mathbf{u})$, для $a \in \mathbb{G}$. В переменных $(q, g, p, \mathbf{P})$ получаем $a.(q, g, p, \mathbf{P}) = (q, a.g, p, \mathrm{Ad}^* a.\mathbf{P})$, так что группа $\mathbb{G}$ действует на функции, определенные на $T^*\mathbb{S}$ как

$$a.\mathcal{F}(q, g, p, \mathbf{P}) = \mathcal{F}(q, a^{-1}.g, p, \mathrm{Ad}^* a^{-1}.\mathbf{P}).$$

Вычисления, необходимые для доказательства инвариантности, представляют собой упражнение из дифференциального исчисления. Достаточно положить $\overline{\mathcal{F}} = a.\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{G}} = a.\mathcal{G}$ для фиксированных $a \in \mathbb{G}$ и проверить слагаемое за слагаемым соотношения $\overline{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}} = \{\overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{G}}\}$.

4. Вывод уравнений Гамильтона из вариационного принципа. Теперь давайте рассмотрим конфигурационное пространство - время $T^*\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, зависящую от времени дифференцируемую функцию Гамильтона $H\colon T^*\mathbb{S} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и дифференциальную форму на $T^*\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, определенную как

$$\alpha = \mathrm{pr}_1^* \ell_{\mathbb{S}} - H(\boldsymbol{z}, t)\, dt$$

где pr_1 – проекция $T^*\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ на $T^*\mathbb{S}$.

Эта форма, известная как «интегральный инвариант Пуанкаре - Картана», не что иное как контактная форма на конфигурационном пространстве «пространство - время». Динамические уравнения для зависящих от времени гамильтоновых систем определены ассоциированным векторным полем на $T^*\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, которое характеризуется величиной $\alpha(Z) = 1$ и $\mathrm{i}_Z(d\alpha) = 0$ – см., например, [7], глава VII или [8].

Начиная отсюда будем использовать обозначения, применяемые механиками, и будем считать, что движение механической системы определено отображением $t\,(\in I) \mapsto \boldsymbol{z}(t)\,(\in T^*\mathbb{S})$, где $I \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал. Проекция $t \mapsto s(t) = \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}\, \boldsymbol{z}(t)$ на $\mathbb{S}$ описывает положение системы во время движения.

Вариация этого движения с фиксированными концами на интервале $[t_o, t_1] \subset I$ будет определена дифференцируемым, например, класса $\mathcal{C}^2$, отображением $t \mapsto \boldsymbol{z}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{z}(t, \varepsilon)$, определенным на $t \in [t_o, t_1]$ и ε в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}$, скажем,

$-1 < \varepsilon < +1$, так что

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_o(t) = \boldsymbol{z}(t) \ \text{ для всех } t \in [t_o, t_1], \\ \\ \boldsymbol{z}_\varepsilon(t_o) = \boldsymbol{z}(t_o) \ \ \text{для } -1 < \varepsilon < +1, \\ \\ \boldsymbol{z}_\varepsilon(t_1) = \boldsymbol{z}(t_1) \ \ \text{для } -1 < \varepsilon < +1. \end{cases}$$

Тогда обозначим $t \mapsto s_\varepsilon(t) = s(t, \varepsilon) = \overset{*}{o}_{\mathbb{S}}\, \boldsymbol{z}(t, \varepsilon)$ вариацию проекции на $\mathbb{S}$.

С любой вариацией свяжем поднятие движения на $T(T^*\mathbb{S})$: $t \mapsto \delta\boldsymbol{z}(t) \in T_{\boldsymbol{z}(t)}(T^*\mathbb{S})$ и поднятие $\delta s(t) \in T_{s(t)}\mathbb{S}$, определенное для $t \in [t_o, t_1]$ как

$$\delta\boldsymbol{z}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, \boldsymbol{z}(t, \varepsilon)\right]_{\varepsilon=0}, \qquad \delta s(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, s(t, \varepsilon)\right]_{\varepsilon=0}.$$

Если $\boldsymbol{z}(t)$ располагается в области $T^*\mathcal{U}$, описанной диффеоморфизмом ψ в разделе 2.3, формула (2.7) (скажем, когда $t \in [\tau_o, \tau_1]$), то существуют дифференцируемые отображения $t \mapsto g(t) \in \mathbb{G}$, $t \mapsto \boldsymbol{\eta}(t) \in T^*\mathbb{X}$, и $t \mapsto \mathbf{P}(t) \in \mathfrak{g}^*$, определенные для $t \in [\tau_o, \tau_1]$, такие что

$$\boldsymbol{z}(t) = \psi\big(g(t), \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{P}(t)\big).$$

Из вариации мы можем вывести отображения $t \mapsto g_\varepsilon(t) \in \mathbb{G}$, $t \mapsto \boldsymbol{\eta}_\varepsilon(t) \in T^*\mathbb{X}$ и $t \mapsto \mathbf{P}_\varepsilon(t) \in \mathfrak{g}^*$, хорошо определенные для $t \in [\tau_o, \tau_1]$ и ε в некоторой окрестности нуля, и положить

$$\delta g(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, g_\varepsilon(t)\right]_{\varepsilon=0}, \ \delta\boldsymbol{\eta}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon(t)\right]_{\varepsilon=0}, \ \delta\mathbf{P}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, \mathbf{P}_\varepsilon(t)\right]_{\varepsilon=0},$$

так что $\delta g(t) \in T_{g(t)}\mathbb{G}$, $\delta\boldsymbol{\eta}(t) = \chi^T(\delta\boldsymbol{z}(t)) \in T_{\eta(t)}\big(T^*\mathbb{X}\big)$, $\delta\mathbf{P}(t) = d\mu(\delta\boldsymbol{z}(t)) \in \mathfrak{g}^*$).

Для всякого движения и любого интервала $[t_o, t_1]$ действие на интервале будет определено как

$$\mathcal{S}_{t_1}^{t_0}(\boldsymbol{z}) = \int_{t_o}^{t_1} \Big(\ell_{\mathbb{S}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}(t)\big) - H\big(\boldsymbol{z}(t), t\big)\Big)\, dt,$$

причем каждой вариации соответствует вариация действия

$$\mathcal{S}_{t_1}^{t_0}(\boldsymbol{z}, \varepsilon) = \int_{t_o}^{t_1} \Big(\ell_{\mathbb{S}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t)\big) - H\big(\boldsymbol{z}_\varepsilon(t), t\big)\Big)\, dt, \qquad -1 < \varepsilon < +1.$$

Доказательство основного результата этого раздела опирается на следующую техническую лемму, которая доказывается в приложении:

Лемма 5 *Пусть $\mathbb{M}$ – многообразие и β – 1-форма на $\mathbb{M}$, принадлежащая классу $\mathcal{C}^\infty$. Со всякой дифференцируемой кривой $t \mapsto c(t)$ в $\mathbb{M}$, определенной на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$, и со всяким интервалом $[t_o, t_1] \subset I$ на $\mathbb{M}$ свяжем действие*

$$\mathcal{J}_{t_o}^{t_1}(c) = \int_{t_o}^{t_1} \beta(\dot{c}(t))\, dt.$$

Тогда для всех дифференцируемых вариаций $t \mapsto c_\varepsilon(t)$ на интервале $[t_o, t_1] \subset I$ имеем

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\, \mathcal{J}_{t_o}^{t_1}(c_\varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} = \int_{t_o}^{t_1} d\,\beta\big(\delta c(t), \dot{c}(t)\big)\, dt + \beta(\delta c(t_1)) - \beta(\delta c(t_o)),$$

где

$$\delta c(t) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\, c_\varepsilon(t)\right]_{\varepsilon=0}.$$

Теорема 4.1 *Уравнения динамики (3.17) консервативной механической системы, конфигурационное пространство которой является главным расслоением $(\mathbb{S}, \mathbb{X}, \pi, \mathbb{G})$, оснащенным* *связностью, и для которой функция Гамильтона равна H, может быть выведено из вариационного принципа*

$$\delta \int_{t_o}^{t_1} \Big(\ell_{\mathbb{S}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}(t)\big) - H\big(\boldsymbol{z}(t), t\big)\Big)\, dt = 0,$$

точный смысл которого таков: Для всех вариаций с фиксированными концами движения $t \mapsto \boldsymbol{z}(t)$:

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\, \mathcal{S}_{t_1}^{t_0}(\boldsymbol{z}, \varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

□ Нам надо вычислить производную

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_o}^{t_1}\Big(\ell_{\mathbb{S}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t)\big) - H\big(\boldsymbol{z}_\varepsilon(t), t\big)\Big)dt = \int_{t_o}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\Big(\ell_{\mathbb{S}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t)\big) - H\big(\boldsymbol{z}_\varepsilon(t), t\big)\Big)\right]dt$$

при $\varepsilon = 0$ (если мы предположим, что все функции дифференцируемы и принадлежат, скажем, как минимум классу $\mathcal{C}^1$, то можно внести операцию дифференцирования под знак интеграла). Достаточно доказать теорему в предположении о том, что $\boldsymbol{z}(t) \in T^*\mathcal{U}$ для $t \in [t_0, t_1]$, и воспользоваться формулой (3.1) :

$$\ell_{\mathbb{S}} = \chi^*\ell_{\mathbb{X}} + \langle \mathbf{P}, o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}\rangle.$$

Прежде всего из леммы 5, примененной к кривой $t \mapsto \boldsymbol{z}(t)$ и к $\beta = \chi^*\ell_{\mathbb{X}}$, мы выводим, что

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{d\varepsilon}\int_{t_o}^{t_1} \chi^*\ell_{\mathbb{X}}\big(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t)\, dt\right]_{\varepsilon=0} &= \int_{t_o}^{t_1} \chi^* d\ell_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{z}(t), \dot{\boldsymbol{z}}(t)\, dt = \\ &= \int_{t_o}^{t_1} d\ell_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}(t), \dot{\boldsymbol{\eta}}(t))\, dt.\end{aligned}$$

Далее, принимая во внимание $(\cdot) = (g(t), \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{P}(t))$, имеем

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{d\varepsilon}\, H\big(\boldsymbol{z}_\varepsilon(t)\big)\right]_{\varepsilon=0} &= \partial_g^r H(\cdot)\big(\boldsymbol{\omega}(\delta s)\big) + \partial_{\boldsymbol{\eta}} H(\cdot)(\delta\boldsymbol{\eta}) - \\ &\quad -\partial_g^r H(\cdot)\big(\mathrm{Ad}\, g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\,\delta\boldsymbol{\eta})\big) + \partial_{\mathbf{P}} H(\cdot)(\delta\mathbf{P}).\end{aligned}$$

Положим $\alpha = o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}$ (прообраз $\boldsymbol{\omega}$ под действием отображения $\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}$ [2], так что α – $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на $T^*\mathbb{S}$). Тогда из уравнения Картана для кривизны следует, что

$$d\,\alpha = [\alpha, \alpha] + o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\Omega}.$$

Пусть $\zeta\colon [t_0, t_1]\times]-1, +1[\to T^*\mathbb{S}$ – отображение, такое что $\zeta(t, \varepsilon) = \boldsymbol{z}_\varepsilon(t)$. Из предыдущего соотношения мы выводим

$$d\,\zeta^*\alpha = [\zeta^*\alpha, \zeta^*\alpha] + \zeta^* o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\Omega},$$

и вычисление коэффициентов выражения $d\varepsilon \wedge dt$ приводит к

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\alpha\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\,\alpha\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\varepsilon}\Big) = \Big[\alpha\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial\varepsilon}\Big), \alpha\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Big)\Big] + \boldsymbol{\Omega}\Big(\,\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}\frac{\partial\zeta}{\partial\varepsilon}, \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\Big)$$

Если мы преобразуем в точке $(t, 0)$ соотношение

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{z}}(t))\right]_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\,o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\delta\boldsymbol{z}(t)) +$$

$$+\big[o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\delta\boldsymbol{z}(t)), o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{z}}(t))\big] + \boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z}(t)), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\dot{\boldsymbol{z}}(t))\big),$$

то таким же вычислением, что и в лемме 3, получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\delta\boldsymbol{z}(t)), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{S}}^{T}(\dot{\boldsymbol{z}}(t))\big) &= \boldsymbol{\Omega}\big(\delta s(t), \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t))\big) = \\ &= \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta}(t)), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\dot{\boldsymbol{\eta}}(t))\big)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\big[\tfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\,o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t))\big]_{\varepsilon=0} = \tfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)) + \big[\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)), \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t))\big] + \boldsymbol{\Omega}\big(\delta s(t), \dot{s}(t)\big),$$

$$\big[\tfrac{\partial}{\partial\varepsilon}\langle\mu(\boldsymbol{z}_\varepsilon(t)),\ o_{\mathbb{S}}^*\boldsymbol{\omega}(\dot{\boldsymbol{z}}_\varepsilon(t))\rangle\big]_{\varepsilon=0} = \langle\mathbf{P}, \tfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)) + \big[\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)), \dot{s}(t)\big]\rangle +$$

$$+\,\langle\mathbf{P}, \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta}(t)), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\dot{\boldsymbol{\eta}}(t))\big)\rangle + \langle\delta\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t))\rangle,$$

[2] Абсолютно корректное отображение требует двух звездочек! (Примеч. автора)

так как согласно вычислениям, аналогичным вычислениям из леммы 3

$$\boldsymbol{\Omega}\big(\delta s(t), \dot{s}(t)\big) = \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta}(t)), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\dot{\boldsymbol{\eta}}(t))\big).$$

Выполним теперь интегрирование по частям

$$\int_{t_o}^{t_1} \langle \mathbf{P}, \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle\, dt = -\int_{t_o}^{t_1} \langle \frac{d}{dt}\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle\, dt,$$

после чего условие теоремы принимает вид: Для всех вариаций на интервале $[t_o, t_1]$

$$\int_{t_o}^{t_1} \Big[\langle \delta\mathbf{P}, \boldsymbol{\omega}(\dot{s}(t))\rangle - \langle \partial_{\mathrm{P}} H(\cdot), \delta\mathbf{P}\rangle\Big]\, dt =$$

$$+\int_{t_o}^{t_1} \Big[-\langle \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \boldsymbol{\omega}(\delta s)\rangle + \langle \mathbf{P}, [\boldsymbol{\omega}(\delta s), \boldsymbol{\omega}(\dot{s})]\rangle - \partial_g^r H(\cdot)\big(\boldsymbol{\omega}(\delta s)\big)\Big]\, dt +$$

$$+\int_{t_o}^{t_1} \Big[d\ell_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \langle \operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\Omega}\big(\overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\delta\boldsymbol{\eta}), \overset{*}{o}{}_{\mathbb{X}}^{T}(\dot{\boldsymbol{\eta}})\big)\rangle - \partial_{\boldsymbol{\eta}} H(\cdot)(\delta\boldsymbol{\eta}) +$$

$$+\partial_g^r H(\cdot)\big(\operatorname{Ad} g.\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}\, \delta\boldsymbol{\eta})\big)\Big]\, dt = 0$$

Если мы последовательно возьмем вариации, такие что

- для $t \in [t_o, t_1]$, $\boldsymbol{\omega}(\delta s(t)) = 0$, $\delta\boldsymbol{\eta}(t) = 0$ и $\delta\mathbf{P}(t)$ – произвольная функция, принимающая значения в $\mathfrak{g}^*$,
- для $t \in [t_o, t_1]$, $\delta\mathbf{P}(t) = 0$, $\delta\boldsymbol{\eta}(t) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(\delta s(t))$ – произвольная функция, принимающая значения в $\mathfrak{g}$,

то мы выведем два последних уравнения (3.11). Поэтому вариационный принцип эквивалентен этим двум уравнениям вместе с обращением в нуль последнего интеграла для всех $\delta\boldsymbol{\eta}(t)$. Если мы определим «векторное поле» X как в (3.9), то последнее условие эквивалентно следующему: для всех $\delta\boldsymbol{\eta}(t)$

$$\int_{t_o}^{t_1} \Big[\bar{\gamma}_{\mathbb{X}}(\delta\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \bar{\gamma}_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}), \delta\boldsymbol{\eta})\Big]\, dt = \int_{t_o}^{t_1} \bar{\gamma}_{\mathbb{X}}(X(\boldsymbol{z}) - \dot{\boldsymbol{\eta}}, \delta\boldsymbol{\eta})\, dt = 0.$$

В силу свойства из леммы 2 и того, что $\delta\boldsymbol{\eta}$ может быть любой дифференцируемой функцией, заданной на $]t_o, t_1[$, из предыдущего условия следует, что $X(\boldsymbol{z}) - \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0$. ∎

Примечательно, что в отличие от вывода уравнений Эйлера (1.1) для вариационного принципа Гамильтона, изложенного в [6], раздел 2.1, доказательство этого результата не требует дифференциальных ограничений, связывающих вариации $\delta\boldsymbol{z}$.

5. Приложение. Доказательств леммы 5.

□ Прежде всего предположим, что для $t \in [a, b]$ точка $c(t)$ принадлежит области U с координатами x^i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда часть кривой c для $a \leq t \leq b$ будет определена с помощью отображения $t \mapsto x(t) (\in \mathbb{R}^m)$. Локальные выражения для β, $d\beta$ и $\mathcal{J}_a^b(c)$ в U имеют вид

$$\beta|_U = \sum_{j=1}^{m} A_j(x)\, dx^j, \quad d\beta|_U = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}(x)\right) dx^i \wedge dx^j,$$

$$\mathcal{J}_a^b(c) = \int_a^b \sum_{j=1}^{m} A_j(x(t))\, \dot{x}^j(t)\, dt.$$

Пусть $c_\varepsilon(t)$ – дифференцируемая, скажем, класса $\mathcal{C}^2$, вариация $c(t)$, определенная для значений ε в малой окрестности нуля в $\mathbb{R}$, скажем, для $-1 < \varepsilon < +1$. Так как $c\big([a, b]\big)$ – компакт, то нетрудно доказать, что при $t \in [a, b]$, кривая $c_\varepsilon(t)$ также располагается в U для ε из некоторой окрестности нуля. Поэтому всегда имеет смысл вычисление производной функции

$$\mathcal{J}_a^b(c_\varepsilon) = \int_a^b \sum_{j=1}^m A_j(x_\varepsilon(t))\, \dot{x}_\varepsilon^j(t)\, dt, \qquad (\star)$$

и простым вычислением доказывается, что

$$\Big[\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \sum_{j=1}^m A_j(x_\varepsilon(t))\, \dot{x}_\varepsilon^j(t)\Big]_{\varepsilon=0} = d\beta\big(\delta c(t), \dot{c}(t)\big) + \frac{d}{dt}\,\beta(\delta c(t))$$

для $t \in [a,b]$. Вычисляя производную по ε под интегралом $(\star)$, мы выводим, что

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\,\mathcal{J}_a^b(c_\varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} = \int_a^b d\beta\big(\delta c(t), \dot{c}(t)\big)\, dt + \beta(\delta c(b)) - \beta(\delta c(a)).$$

Для доказательства леммы в общем виде заметим, что так как кривая $c\big([t_o, t_1]\big)$ компактна, то её можно накрыть конечным числом областей U_ν с системами координат на многообразии $\mathbb{M}$ и можно построить конечную последовательность $a_o = t_o < a_1 < a_2 \cdots < a_p < t_1 = a_{p+1}$, такую что

$$\forall\, i = 1, \dots p,\ \exists\, \nu = \nu(i)\colon c\big([a_i, a_{i+1}]\big) \subset U_{\nu(i)}.$$

Если мы рассмотрим вариацию $c_\varepsilon(t)$, то для значений ε из окрестности нуля имеем $c_\varepsilon\big([a_i, a_{i+1}]\big) \subset U_{\nu(i)}$ для $i = 0, \dots, p$, и мы можем применить предыдущие результаты к каждому из интервалов, чтобы найти

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{t_o}^{t_1}(c_\varepsilon) &= \int_{t_o}^{t_1} \beta(\dot{c}_\varepsilon(t))\, dt = \sum_{k=0}^p \int_{a_k}^{a_{k+1}} \beta(\dot{c}_\varepsilon(t))\, dt, \\
\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{J}_{t_o}^{t_1}(c_\varepsilon)\right]_{\varepsilon=0} &=
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} d\beta(\delta c(t), \dot{c}(t))\, dt + \beta(\delta c(a_{k+1})) - \beta(\delta c(a_k)) \right) =$$

$$= \int_{t_o}^{t_1} d\beta(\delta c(t), \dot{c}_\varepsilon(t))\, dt + \beta(\delta c(t_1)) - \beta(\delta c(t_o)). \ \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т.5. Вып.2. С.253 – 262.

2. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Пуанкаре-Четаева // ПММ. Т. 58. Вып. 3. С. 3 – 16.

3. *Румянцев В.В.* Общие уравнения аналитической динамики // ПММ. Т. 60. Вып. 6. С. 917–928.

4. *Румянцев В.В.* О формах принципа Гамильтона в квазикоординатах // ПММ. Т. 63. Вып. 2. С. 172–178.

5. *Шеваллье Д.П.* Динамика с Эйлеровой и Лагранжевой точек зрения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. Т.2. М.: ВЦ РАН. 2000. С. 40 – 68.

6. *Шеваллье Д.П.* Динамика с Эйлеровой и Лагранжевой точек зрения. Продолжение: нетранзитивные действия групп // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 2007. С.19 – 71.

7. *Годбийон К.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир. 1973. 188 с.

8. *Libermann P., Marle C.-M.* Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique. Paris: Publications de l'Université de Paris VII, **21** Univ. Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, 1986-87.

9. *Souriau J.M.* La structure des systèmes dynamiques. Paris: Dunod. 1969. 414 p.

$$
\begin{tikzcd}
T\mathbb{S} \arrow[r, "\pi^T"] \arrow[d, "o_{\mathbb{S}}"] & T\mathbb{X} \arrow[d, "o_{\mathbb{X}}"] \\
\mathbb{S} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T\mathbb{S} \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, "\pi^T \times \boldsymbol{\omega}"] \arrow[ddr, "o_{\mathbb{S}}"'] & & \\
 & \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \times \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_3"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & T\mathbb{X} \times \mathfrak{g} \arrow[d, "o_{\mathbb{X}} \circ \mathrm{pr}_1"'] \\
 & \mathbb{S} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 1: Изоморфизм i из $T\mathbb{S}$ на $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \times \mathfrak{g}$

$$
\begin{tikzcd}
T^*\mathbb{S} \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}"] & T^*\mathbb{X} \arrow[d, "\overset{*}{o}_{\mathbb{X}}"] \\
\mathbb{S} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
T^*\mathbb{S} \arrow[dr, "\overset{*}{\imath}"] \arrow[drr, "\chi \times \mu"] \arrow[ddr, "\overset{*}{o}_{\mathbb{S}}"'] & & \\
& \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^* \arrow[r, "\mathrm{pr}_2 \times \mathrm{pr}_3"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^* \arrow[d, "\overset{*}{o}_{\mathbb{X}} \circ \mathrm{pr}_1"'] \\
& \mathbb{S} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{X}
\end{tikzcd}
$$

Рис. 2: Изоморфизм $\overset{*}{\imath}$ из $T^*\mathbb{S}$ на $\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^*$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g} \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)} \arrow[d, leftrightarrow] \\
T(T^*\mathbb{S}) \arrow[r, "\overset{*}{i}{}^T"] \arrow[d, "o_{T^*\mathbb{X}}"] & T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "o_{\mathbb{S}} \times o_{T^*\mathbb{X}} \times \mathrm{pr}_3"] & \square \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1 \times (o_{T^*\mathbb{X}} \circ \mathrm{pr}_2) \times \mathrm{pr}_4"] \\
T^*\mathbb{S} \arrow[r, "\overset{*}{i}"] & \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T^*\mathbb{X} \times \mathfrak{g}^* &
\end{tikzcd}
$$

$$\overset{*}{i} = \overset{*}{o}_{\mathbb{S}} \times \chi \times \mu$$

Рис. 3: Касательное расслоение многообразия $T^*\mathbb{S}$

$$\overset{*}{i}{}^T = \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}} \times \chi^T \times \mu^T$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times \mathfrak{g} \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)} \arrow[d, leftrightarrow] \\
T(T^*\mathbb{S}) \arrow[r, "\overset{*}{i}{}^T"] \arrow[d, "\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{S}}"] & T\mathbb{S} \times_{T\mathbb{X}} T(T^*\mathbb{X}) \times (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "o_{\mathbb{S}} \times \overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}} \times \boldsymbol{\omega} \circ \mathrm{pr}_1"] & \square \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1 \times (\overset{*}{o}{}^T_{\mathbb{X}} \circ \mathrm{pr}_2) \times \mathrm{pr}_3"] \\
T\mathbb{S} \arrow[r, "i"] & \mathbb{S} \times_{\mathbb{X}} T\mathbb{X} \times \mathfrak{g} &
\end{tikzcd}
$$

$$i = o_{\mathbb{S}} \times \pi^T \times \boldsymbol{\omega}$$

Рис. 4: Касательный пучок к пучку $(T^*\mathbb{S}, \mathbb{S}, \overset{*}{o}_{\mathbb{S}})$