УДК 531.36; 517.96

О ПРЕДЕЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В.С. Сергеев

В критическом случае пары чисто мнимых корней для интегродифференциального уравнения типа Вольтерра исследуется вопрос о существовании предельно периодических решений при условии, что частота периодической части предельно периодического малого возмущения в уравнении совпадает с собственной частотой линеаризованного однородного уравнения. Показывается, что интегродифференциальное уравнение допускает семейство предельно периодических решений, представимых степенными рядами по малому параметру, характеризующему величину возмущения, и по малым произвольным начальным значениям некритических переменных задачи. Указываются условия существования таких решений, выражаемые через величины, которые определяют постоянную Ляпунова g_3, вычисляемую по членам 3-го порядка уравнений.

Периодические решения интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последействием (с нижним пределом интегрирования $-\infty$ в интегральных членах) рассматривались в монографиях [1,2]. *Построение периодических решений для указанных уравнений специального вида, близких к системам уравнений 2-го порядка, возникающих в задачах механики, проводилось в работах* [3-5] *как в нерезонансном, так и в резонансном случаях. Сходимость последовательных приближений в построениях* [3-5] *базируется на методе мажорантных функций* [6,7].

Ключевые слова: интегродифференциальные уравнения типа Вольтерра, теория колебаний, критический случай пары чисто мнимых корней

1. Выделение критической подсистемы. Рассматривается интегродифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)x(s)ds + \mu f(t) + F(x,t), \tag{1.1}$$

$$x \in \mathbf{R^n}, \quad f = \mathrm{col}(f_1, ..., f_n), \quad F = \mathrm{col}(F_1, ..., F_n),$$

в котором $0 \leq \mu << 1,\ A = (a_{ij}) - (n \times n)$ - постоянная матрица, $K(t) = (K_{ij}(t)) \in \mathbf{C}$ при $t \in \mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R} : t \geq 0\}$ - $(n \times n)$ - матрица, удовлетворяющая условию

$$\|K(t)\| \leq C\exp(-\beta t), \qquad C, \beta = \mathrm{const} > 0, \tag{1.2}$$

$F(x,t)$ - аналитическая по x функция в некоторой окрестности **B** нуля без свободного и линейного членов; ее коэффициенты разложения в степенной ряд – непрерывные функции t, кспоненциально стремящиеся к постоянным, или постоянные величины. Функция $f(t) \in \mathbf{C^1}$.

В дальнейшем используются следующие

Определения ([8,9]). *Говорят, что непрерывная функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $e_1(\alpha)$, т.е. $\varphi(t) \in e_1(\alpha)$, если при $t \in \mathbf{R}^+$ выполняется неравенство*

$$\|\varphi(t)\| \leq C\exp(\alpha t), \qquad C, \alpha = const, \quad C > 0.$$

Говорят, что непрерывная на множестве $0 \leq s \leq t < +\infty$ функция $\Phi(t,s)$ принадлежит классу $e_2(\alpha)$, т.е. $\Phi(t,s) \in e_2(\alpha)$, если на этом множестве справедлива оценка

$$\|\Phi(t,s)\| \leq C\exp[\alpha(t-s)].$$

Непрерывную при $t \in \mathbf{R}^+$ функцию $f(t)$ называют экспоненциально предельно периодической, т.е. принадлежащей классу $\mathrm{lpe}(T,\alpha)$, *если*

$$f(t) = f_p(t) + f_e(t), \tag{1.3}$$

где $f_e(t) \in e_1(\alpha)\,(\alpha < 0)$ и непрерывная функция $f_p(t)$ является периодической с периодом T.

Движение системы, описываемое функцией вида (1.3), называют экспоненциально предельно периодическим.

Функция $F(x,t)$ в (1.1) как функция t для всех $x \in B$ принадлежит классу $e_1(-\gamma)$ для некоторого $\gamma > 0$.

Пусть для уравнения (1.1) характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0,$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для матрицы $K(t)$, имеет в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -\beta$ конечное число корней λ'_j $(j = 1,...,N; N \geq n)$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей, причем

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\lambda'_j < 0 \quad \lambda'_{N-1} = \mathrm{i}\omega, \quad \lambda'_N = -\mathrm{i}\omega, \\ j = 1,...,N-2, \quad \omega = \mathrm{const} > 0\,. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Старшие n корней считаются простыми.

Функция $f(t)$ в уравнении (1.1) предполагается принадлежащей классу $\mathrm{lpe}(T,-\alpha_1)$, где $\alpha_1 > 0$ и $T = 2\pi/\omega$, т.е. для нее справедливо представление (1.3), в котором $f_p(t)$ по предположению допускает непрерывную производную с ограниченным изменением и, следовательно, представляется абсолютно сходящимся рядом Фурье [10].

Рассмотрим сначала уравнение (1.1) при $\mu = 0$ и преобразуем это уравнение по схеме выделения в данном критическом случае устойчивости постоянной Ляпунова g_3 [8,11].

Пусть $X'(t) = (x'_{ij}(t))$ фундаментальная матрица решений линеаризованного уравнения, нормальная в смысле Ляпунова [12,13]. Тогда, если $x_j(t)$ – столбцы этой матрицы, то, принимая во внимание структуру общего решения линеаризованного уравнения, для характеристических показателей решений имеют место соотношения

$$\chi(x_j(t)) = \lambda_j,\ j = 1, 2, ..., n-2,\ \operatorname{Re}\lambda'_{N-n+j} = \lambda_j, \tag{1.5}$$

и, кроме того, фундаментальные решения $x_{n-1}(t), x_n(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} x'_{n-1}(t) &= 2(u_0\cos\omega t - v_0\sin\omega t) + x''_{n-1}(t), \\ x'_n(t) &= 2(v_0\cos\omega t + u_0\sin\omega t) + x''_n(t), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где u_0, v_0 – постоянные векторы и $x''_s(t) \in e_1(\lambda_{n-2})(s = n-1, n)$.

Пусть в предположении невырожденности матрицы $X'(t)$ [10] матрица $Y'(t) = (y'_{ij}(t))$ такая, что $Y'(t)X'(t) = E_n$. Тогда, поскольку линеаризованная однородная система (1.1) правильная [8,11], имеют место выражения

$$\begin{aligned} &y'_{ij}(t) = \exp(-\lambda'_i t)(c_{ij} + y''_{ij}(t)), \quad i = 1, 2, ..., n-2, \\ &y'_{n-1j}(t) = \delta_j(v_0)\cos\omega t + \delta_j(u_0)\sin\omega t + y''_{n-1j}(t), \\ &y'_{nj}(t) = -\delta_j(u_0)\cos\omega t + \delta_j(v_0)\sin\omega t + y''_{nj}(t), \end{aligned} \tag{1.7}$$

где c_{ij}, δ_j – постоянные и $y''_{kj}(t) \in e_1(-\gamma)$ $(k = n-1, n;\ j = 1, 2, ..., n;\ \gamma > 0)$.

Пусть

$$\begin{aligned} y_i &= x_i, \qquad i = 1, ..., n-2, \\ y_s &= \sum_{j=1}^{n} y'_{sj}(t)x_j, \qquad s = n-1, n \end{aligned} \tag{1.8}$$

- замена с непрерывными ограниченными при $t \in \mathbf{R}^+$ коэффициентами при условии, что

$$\begin{aligned}\delta(t) &= |y'_{n-1n-1}(t)y'_{nn}(t) - y'_{n-1n}(t)y'_{nn-1}(t)| = \\ &= |\delta_0 + \delta'_1(t)| \geq \delta'_0 > 0,\end{aligned}$$

где $\delta_0, \delta'_0 = \mathrm{const}$ и $\delta'_1 \in e_1(-\gamma)$ для $\gamma > 0$. Эта замена выделяет критические переменные.

Пусть

$$w_{n-1} = y_{n-1} + \mathrm{i}y_n, \qquad w_n = y_{n-1} - \mathrm{i}y_n. \tag{1.9}$$

- комплексно-сопряженные переменные. Преобразование (1.8), (1.9) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}&x_s = \sum_{k=n-1,n} W_{sk}(t)\exp(\pm\mathrm{i}\omega t)w_k + \sum_{j=1}^{n-2} Y_{sj}(t)y_j, \\ &W_{sk}(t) = W_{sk}^{(0)} + W_{sk}^{(1)}(t),\ Y_{sj}(t) = Y_{sj}^{(0)} + Y_{sj}^{(1)}(t), \\ &W_{sk}^{(0)}, Y_{sj}^{(0)} = \mathrm{const},\ \text{а}\ \ W_{sk}^{(1)}(t),\ Y_{sj}^{(1)}(t) \in e_1(-\gamma), \\ &s = n-1, n, \quad \gamma > 0.\end{aligned} \tag{1.10}$$

В формулах (1.10) знак плюс отвечает значению $s = n-1$, знак минус значению $s = n$.

Некритическую переменную $y = \mathrm{col}(y_1, ..., y_{n-2})$ преобразуем, полагая

$$z = \exp(\Lambda'_2 t)Y'_2(t)y, \quad \Lambda'_2 = \mathrm{diag}(\lambda'_{N-n+1}, ..., \lambda'_{N-2}), \tag{1.11}$$

где матрица $Y'_2(t)$ такова, что $Y'_2(t)X'_2(t) = E_{n-2}$, и $X'_2(t)$ - $(n-2) \times (n-2)$ - матрица решений линеаризованной однородной подсистемы для y, нормальная по Ляпунову.

2. Выделение постоянной $\mathbf{g_3}$. После замен (1.7) – (1.11) ввиду леммы [14], получаются уравнения ($k = n-1, n$)

$$\frac{dw_k}{dt} = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{n-1j}(t,s) \pm \mathrm{i}\varphi_{nj}(t,s))(F_j'(z(s), w(s), s) +$$
$$+\mu f_j(s))ds + \sum_{j=1}^{n} (y_{n-1j}'(t) \pm \mathrm{i} y_{nj}'(t))(F_j'(z,w,t) + \mu f_j(t)), \tag{2.1}$$

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda_2' z + \exp(\Lambda_2' t)\Big[\int\limits_0^t \varphi(t,s)\Theta(z(s), w(s), s)ds +$$
$$+Y_2'(t)\Theta(z,w,t)\Big], \tag{2.2}$$
$$w = \mathrm{col}(w_{n-1}, w_n), \quad \Theta(z,w,t) = \mathrm{col}(\Theta_1, ..., \Theta_{n-2}),$$

где верхний знак плюс в (2.1) берется при $k = n-1$, а знак минус берется при $k = n$, величины $F_j'(z,w,t)$ представляют собой функции $F_j(x,t)$, выраженные через переменные z, w, t, и

$$\Theta_j(z,w,t) = a_{jn-1}x_{n-1} + a_{jn}x_n + F_j'(z,w,t) + \mu f_j(t) +$$
$$+ \int_0^t (K_{jn-1}(t-s)x_{n-1}(s) + K_{jn}(t-s)x_n(s))\, ds\,,$$

причем в последней формуле переменные x_n, x_{n-1} связаны с w, z соотношениями (1.8) – (1.11).

Интегральные ядра уравнений (2.1) имеют следующую структуру [8]:

$$\varphi_{n-1j}(t,s) \pm \mathrm{i}\varphi_{nj}(t,s) = \exp(\pm \mathrm{i}\omega t)\Phi_j^{\pm}(t-s) + \tilde{\Phi}_j^{\pm}(t,s), \tag{2.3}$$

где одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки, функции $\Phi_j^{\pm}(t) \in e_1(-\gamma_1)$ и $\tilde{\Phi}_j^{\pm}(t,s)$ – сумма слагаемых вида $\varphi_1(t)\varphi_2(t,s)$, причем $\varphi_1(t) \in e_1(-\gamma_2)$, $\varphi_2(t,s) \in e_2(-\gamma_3)$ для некоторых $\gamma_k > 0\, (k = 1,2,3)$.

Кроме того, в этих уравнениях

$$\begin{aligned} &y'_{n-1j}(t) \pm \mathrm{i} y'_{nj}(t) = C_j^{\pm} \exp(\pm \mathrm{i}\omega t) + \tilde{y}'_j(t), \\ &C_j^{\pm} = \mathrm{const}, \quad \tilde{y}'_j(t) \in e_1(-\gamma), \quad \gamma > 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Далее проводится серия преобразований [8,11], сохраняющих свойство устойчивости и позволяющая по членам 3-го порядка правых частей критической подсистемы (2.1), не зависящих от параметра μ, определить постоянную Ляпунова g_3, и сами уравнения (2.1), (2.2) представить в следующей форме:

$$\begin{gathered} \frac{dw'_{n-1}}{dt} = h_{n-1} w'^2_{n-1} w'_n + W^{(2)}_{n-1}(u, w', t) + W^{(3)}_{n-1}(u, w', t) + \\ + \mu f'_{n-1}(t) + \mu W_{n-1}(u, w', t, \mu), \\ \frac{dw'_n}{dt} = h_n w'_{n-1} w'^2_n + W^{(2)}_n(u, w', t) + W^{(3)}_n(u, w', t) + \\ + \mu f'_n(t) + \mu W_n(u, w', t, \mu), \\ h_{n-1},\, h_n = \mathrm{const}, \qquad w' = \mathrm{col}(w'_{n-1}, w'_n), \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \frac{du}{dt} = \Lambda'_2 u + U^{(2)}(u, w', t) + U^{(3)}(u, w', t) + \mu f'(t) + \\ + \mu U(u, w', t, \mu), \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $W_j^{(2)}(u, w', t)$, $U^{(2)}(u, w', t)$ – квадратичные по u, w' члены, такие, что $W_j^{(2)}(0, w', t) \equiv 0$ $(j = n-1, n)$, $U^{(2)}(0, w', t) \equiv 0$, $W_j^{(3)}(u, w', t)$ – члены более 2-го порядка, не содержащие кубических членов, зависящих только от w'_{n-1}, w'_n. Разложения в степенные ряды по параметру ε для операторов $W_j^{(2)}(\varepsilon u, \varepsilon w', t, \mu)$, $U(\varepsilon u, \varepsilon w', t, \mu)$ могут содержать линейные члены. Функции $f'_k(t)$

$(k = n-1, n)$, $f'(t) = \mathrm{col}(f_1'(t), ..., f_{n-2}'(t))$ – предельно периодические, и их периодические части $f_{jp}'(t)$ разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Операторы $W_j(u, w', t, \mu)$, $U(u, w', t, \mu)$ появляются в уравнениях (2.5), (2.6) в результате преобразований, заключающихся в интегрировании по частям ряда интегральных членов, зависящих от критических переменных, и замены производной dw_k/dt правыми частями критической подсистемы (2.1) [8,11].

Уравнения (2.5) для $j = n-1, n$ являются комплексно-сопряженными.

3. Предельно периодическое решение. Предполагается, что вещественные постоянные

$$h_{n-1}h_n \neq 0. \tag{3.1}$$

Вводя в уравнения (2.5), (2.6) малый параметр ε с помощью замены

$$w_j' = \varepsilon v_j, \quad j = n-1, n, \qquad u = \varepsilon v, \qquad \mu = \varepsilon^3, \tag{3.2}$$

где $v = \mathrm{col}(v_1, ..., v_{n-2})$, можно построить предельно периодические решения этих уравнений в форме степенных рядов по ε, так что

$$v_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_i^{(k)}(t), \qquad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.3}$$

В первом приближении (при k=0), согласно (2.5), (2.6),

$$v_j^{(0)} = v_{0j} = \mathrm{const}, \qquad j = n-1, n,$$

$$v_s^{(0)}(t) = v_{0s}\exp(\lambda_s' t), \qquad s = 1, 2, ..., n-2,$$

где v_{0s} – произвольные начальные значения и постоянные v_{0j} $(j = n-1, n)$ подлежат определению из условий существования решения в искомом виде.

Во втором приближении, полагая

$$v_0' = \mathrm{col}(v_{0n-1}, v_{0n}), \qquad v^{(0)} = \mathrm{col}(v_1^{(0)}, ..., v_{n-2}^{(0)}),$$

можно найти, что при $j = n-1, n$

$$v_j^{(1)}(t) = \varepsilon^{-2} \int_0^t W_j^{(2)}(\varepsilon v_0', \varepsilon v^{(0)}(\tau), \tau) d\tau = v_{pj}^{(1)}(t) + v_{ej}(t), \quad (3.4)$$

где $v_{pj}^{(1)}(t)$ – периодическая функция периода T и $v_{ej}(t) \in e_1(-\gamma')$ ($\gamma' > 0$). Согласно (2.6), при $s = 1, ..., n-2$

$$v_s^{(1)}(t) = \varepsilon^{-2} \int_0^t \exp[-\lambda_s'(t-\tau)] U_s^{(2)}(\varepsilon v_0', \varepsilon v^{(0)}(\tau), \tau) d\tau, \qquad (3.5)$$

Функции $U_s^{(2)}(u, w', t)$ ограничены по t (при фиксированных w', u), а $U_s^{(2)}(0, w', t) \equiv 0$. Следовательно, имеют место включения $U_s^{(2)}(\varepsilon v_0', \varepsilon v^{(0)}(\tau), \tau) \in e_1(-\gamma_1)$ ($\gamma_1 > 0$), и поэтому

$$v_s^{(1)} \in e_1(-\gamma_s), \quad \gamma_s > 0. \qquad (3.6)$$

В уравнении (1.1) функция $f(t) \in \mathrm{lpe}(T, -\gamma)$, т.е. представима в виде (1.3), где вещественная функция $f_p(t) = \mathrm{col}(f_{p1}(t), \ldots, f_{pn}(t))$ обладает непрерывной производной с ограниченным изменением и задана рядом Фурье

$$f_{pj}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(j)} \exp(\mathrm{i}\, m\omega t), \;\; a_m^{(j)} = \bar{a}_{-m}^{(j)}, \;\; j = 1, ..., n \qquad (3.7)$$

с коэффициентами $a_m^{(j)} = \mathrm{O}(1/m^2)$ [10].

Для определения функций $v_i^{(2)}(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ нужно вычислить периодическую часть $f_p'(t) = \mathrm{col}(f_{p1}'(t), \ldots, f_{pn}'(t))$ функции $f'(t)$ в уравнениях (2.5), (2.6).

Согласно уравнениям (2.1), функции $f_k'(t)$ $(k = n-1, n)$ представляются в виде

$$f_k'(t) = \int\limits_0^t \sum_{j=1}^n (\varphi_{n-1j}(t,s) \pm \mathrm{i}\varphi_{nj}(t,s)) f_j(s) ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^n (y_{n-1j}'(t) \pm \mathrm{i} y_{nj}'(t)) f_j(t),$$

где знак плюс отвечает $k = n-1$. Поэтому, ввиду соотношений (2.3), (2.4), можно записать

$$f_k'(t) = \sum_{j=1}^n \left(\int\limits_0^t \Phi_j^{\pm}(t-s) f_j(s) ds + C_j^{\pm} f_j(t) \right) \exp(\pm \mathrm{i}\,\omega\, t) + f_k''(t),$$

где $f_k''(t) \in e_1(-\gamma)$, $\gamma > 0$. С учетом (3.7)

$$f_{pk}'(t) = \sum_{j=1}^n \exp(\mathrm{i}\,\omega t)(C_j^{\pm} f_{pj}(t) + \hat{\Phi}_j^{\pm}(t)),\ \ k = n-1, n, \qquad (3.8)$$

где

$$\hat{\Phi}_j^{\pm}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_j^{\pm}(m) a_m^{(j)} \exp(\mathrm{i}\, m\omega t),$$

$$b_j^{\pm}(m) = \int\limits_0^{\infty} \Phi_j^{\pm}(\tau) \exp(-\mathrm{i}\, m\omega\tau) d\tau.$$

Таким образом, функции $f_{n-1}'(t)$, $f_n'(t)$ в уравнениях (2.5) имеют постоянные члены, а именно:

$$\alpha_{n-1} = \sum_{j=1}^n a_{-1}^{(j)} (C_j^{+} + b_j^{+}(-1)) \qquad (3.9)$$

в уравнении для v_{n-1} и

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} a_1^{(j)}(C_j^- + b_j^-(1)) \qquad (3.10)$$

в уравнении для v_n. Постоянные α_{n-1}, α_n комплексно-сопряжены.

Пусть

$$\alpha_{n-1}\alpha_n \neq 0. \qquad (3.11)$$

Для того чтобы функции $v_{n-1}(t)$, $v_n(t)$ были предельно периодическими функциями времени, должны выполняться условия

$$h_{n-1}v_{0n-1}^2 v_{0n} + \alpha_{n-1} = 0, \qquad h_n v_{0n-1} v_{0n}^2 + \alpha_n = 0, \qquad (3.12)$$

которые служат уравнениями для определения постоянных v_{0n-1}, v_{0n} (в первом приближении). Начальные условия в дальнейшем рассматриваются как голоморфные функции параметра ε.

Из (3.12) можно найти, что

$$\begin{aligned} r_0^2 &= v_{0n-1}v_{0n} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_n}{h_{n-1}h_n}, \\ r_0^2(v_{0n-1} + v_{0n}) &= -\frac{\alpha_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{h_n}. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Начальные значения v_{0k} представляются в виде степенных рядов

$$v_{0k}(\varepsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} v_{0k}^{(p)}\varepsilon^p, \qquad k = n-1, n,$$

и в качестве $v_{0k}^{(0)}$ берется решение уравнений (3.12), т.е. согласно (3.13)

$$v_{0n-1} = v_{0n-1}^{(0)} = -\frac{\alpha_{n-1}}{r_0^2 h_{n-1}}, \; v_{0n} = v_{0n}^{(0)} = -\frac{\alpha_n}{r_0^2 h_n}, \qquad (3.14)$$

и, следовательно, $v_{0n-1}^{(0)}$ и $v_{0n}^{(0)}$ комплексно-сопряжены.

При определении $v_j^{(3)}(t)$ $(j = n-1, n)$ и последующих членов разложений (3.3) будут найдены постоянные $v_{0j}^{(k)}$ $(k = 1, 2, ...)$ из условия обращения в ноль секулярного члена (постоянного члена в подынтегральной функции в формуле, аналогичной формуле (3.4)). Это возможно ввиду выполнения неравенств (3.1), (3.11).

Для вычисления функций $v_s^{(2)}(t)$ $(s = 1, 2, ..., n-2)$ имеется интегральная формула, аналогичная формуле (3.5), на основании которой эти функции имеют следующую структуру:

$$v_s^{(2)}(t) = v_{0s}^{(2)} + v_{es}^{(2)}(t), \qquad s = 1, 2, ...n-2, \tag{3.15}$$

$v_{0s}^{(2)} = \mathrm{const}$ и $v_{es}^{(2)}(t) \in e_1(-\gamma)$ $(\gamma > 0)$.

При построении рядов следует учесть, что в уравнениях все интегральные ядра $\kappa(t,s) \in e_2(-\gamma_0)$, т.е. подчинены условию

$$\|\kappa(t,s)\| \le c\exp[-\gamma_0(t-s)], \qquad c, \gamma_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.16}$$

В связи с этим следует отметить, что, например, интегралы типа

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int\limits_0^t \kappa(t,\tau)\Big(v_{n-1}^{(p)}(\tau)\Big)^k\Big(v_n^{(q)}(\tau)\Big)^l\xi_{kl}(\tau)d\tau,\\
I_2(t) &= \int\limits_0^t \kappa(t,\tau)\Big(\xi_{n-1}(\tau)v_{n-1}^{(p)}(\tau)\Big)^k\Big(\xi_s(\tau)v_s^{(q)}(\tau)\Big)^l d\tau, \qquad (3.17)\\
I_3(t) &= \int\limits_0^t \Big(\xi_{n-1}(\tau)v_{n-1}^{(p)}(\tau)\Big)^k\Big(\xi_n(\tau)v_n^{(q)}(\tau)\Big)^l d\tau,
\end{aligned}$$

будут представляться экспоненциально предельно периодическими функциями. В формулах (3.17) функции $\xi_{kl}(t)$ имеют следующую структуру [8,11]:

$$\xi_{kl}(t) = \xi'_{kl}\exp[\mathrm{i}(l-k)\,\omega\,t] + \xi''_{kl}(t),$$

$$\xi'_{kl} = \mathrm{const},\ \ \xi''_{kl}(t) \in e_1(-\gamma),\ \ \gamma > 0,$$

и

$$\xi_j(t) = \xi^0_j\exp(\pm\,\mathrm{i}\,\omega\,t) + \xi'_j(t),\ \ \xi_s = \xi^0_s + \xi'_s(t),\ \ j = n-1, n,$$

$$\xi^0_j = \mathrm{const},\ \ \xi'_j(t) \in e_1(-\gamma),\ \ \gamma > 0,\ \ s = 1, 2, ..., n-2.$$

Интегральные ядра удовлетворяют соотношениям (1.2), (2.3) либо подчинены условию (3.16), а величины $v_i^{(k)}(t)$ ($i = 1, 2, ..., n$; $k = 1, 2, ...$) являются экспоненциально предельно периодическими функциями.

Вообще, поскольку интеграл от экспоненциально предельно периодической функции (с нулевым средним периодической части) и интеграл с ядром типа (3.16) от экспоненциально предельно периодической функции являются функциями одного и того же типа, структура функций $v_s^{(k)}(t)$ ($s = 1, 2, ..., n-2$; $k = 3, 4, ...$) будет такой же, как в соотношении (3.15), либо эти функции будут экспоненциально предельно периодическими. Аналогичную структуру будут иметь все функции $v_j^{(k)}(t)$ ($j = n-1, n$; $k = 3, 4, ...$).

Построенное семейство предельно периодических решений уравнений (2.5), (2.6) содержит $n-2$ произвольные постоянные и представляется степенным рядом по $n-2$ начальным значениям некритических переменных и малому параметру $\varepsilon = \mu^{1/3}$. Проведенные преобразования от переменной x в уравнении (1.1) к переменным w_j ($j = n-1, n$), и уравнений (2.5), (2.6) позволяют сделать вывод о существовании семейства предельно периодических решений уравнения (1.1).

4. Мажорирующие уравнения. Рассмотрим вопрос о сходимости полученных степенных рядов. Пусть

$$v_j(t) = v_j(0) + \hat{v}_j(t), \quad \hat{v}_j(0) = 0, \quad j = n-1, n,$$
$$\hat{v}(t) = \mathrm{col}(\hat{v}_{n-1},\, \hat{v}_n), \quad v_0 = \mathrm{col}(v_{n-1}(0),\, v_n(0)) \tag{4.1}$$

и для рядов v, $\hat{v}_j$, $v_j(0)$ соответствующие мажоранты v^*, $\hat{v}_j^*$, $v_j^*(0)$ строятся как функции параметра ε и $v_{0s}(s = 1, 2, ..., n-2)$, мажорирующие переменные $v(t)$, $v_j(t)$ и начальные значения $v_j(0)\,(j = n-1, n)$, т.е. степенные ряды с положительными постоянными коэффициентами, не меньшими, чем модули соответствующих мажорируемых коэффициентов.

На основании (2.5), (2.6), с учетом (3.2), (4.1) справедливы интегральные соотношения

$$\hat{v}_{n-1}(t) = \int_0^t \Big[\varepsilon^2 h_{n-1}(v_{n-1}(0) + \hat{v}_{n-1}(\tau))^2 (v_n(0) + \hat{v}_n(\tau)) +$$
$$+\tfrac{1}{\varepsilon}\left(W_{n-1}^{(2)}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau) + W_{n-1}^{(3)}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau)\right) +$$
$$+\varepsilon^2 f'_{n-1}(\tau) + \varepsilon^2 W_{n-1}(\varepsilon(v_0 + \hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau, \mu)\Big]\, d\tau,$$

$$\hat{v}_n(t) = \int_0^t \Big[\varepsilon^2 h_n(v_{n-1}(0) + \hat{v}_{n-1}(\tau))(v_n(0) + \hat{v}_n(\tau))^2 +$$
$$+\tfrac{1}{\varepsilon}\left(W_n^{(2)}(\varepsilon(v_0 + \hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau) + W_n^{(3)}(\varepsilon(v_0 + \hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau)\right) +$$
$$+\varepsilon^2 f'_n(\tau) + \varepsilon^2 W_n(\varepsilon(v_0 + \hat{v}(\tau)), \varepsilon v, \tau, \mu)\,\Big]\, d\tau, \tag{4.2}$$

$$v(t) = v(0)\exp(\Lambda'_2 t) + \int_0^t \exp[\Lambda'_2(t-\tau)]\left[\varepsilon^{-1}\left(U^{(2)}(\varepsilon(v_0 +\right.\right.$$

$$+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau)+U^{(3)}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau)\Big)+$$
$$+\varepsilon^2 f'(\tau)+\varepsilon^2 U(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau,\mu)\Big]\,d\tau. \tag{4.3}$$

Начальные значения $v_{n-1}(0)$, $v_n(0)$ как функции параметра ε (и начальных значений некритических переменных) определяются в виде степенных рядов из следующих соотношений:

$$h_{n-1}v_{n-1}^2(0)v_n(0)+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Big[\frac{1}{\varepsilon^3}W_{n-1}^{(3)}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau)+$$
$$+f'_{n-1}(\tau)+W_{n-1}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau,\mu)\Big]\,d\tau=0,$$
$$h_n v_{n-1}(0)v_n^2(0)+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Big[\frac{1}{\varepsilon^3}W_n^{(3)}(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau)+ \tag{4.4}$$
$$+f'_n(\tau)+W_n(\varepsilon(v_0+\hat{v}(\tau)),\varepsilon v,\tau,\mu)\Big]\,d\tau=0.$$

Функции $\hat{v}_{n-1}^{(k)}(t),\hat{v}_n^{(k)}(t),v^{(k)}(t)$ и постоянные $v_{n-1}^{(k)}(0)$, $v_n^{(k)}(0)$ определяются последовательно на основании соотношений (4.2) – (4.4). Каждая k–ая компонента функций будет представляться ограниченной экспоненциально предельно периодической функцией. Периодическая часть функции будет даваться абсолютно сходящимся рядом Фурье (с нулевым средним) и, следовательно, может почленно интегрироваться. Если $N_p=\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}|n_s|$ – тригонометрическая норма некоторой функции $\varphi_p(t)=$ $=\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}n_s\exp(\mathrm{i}\,\omega\,st)$, найденной на p - ом шаге, то после интегрирования от 0 до t при получении $p+1$- го члена степенного ряда по ε для переменной $\hat{v}_j(t)$ $(j=n-1,n)$ можно получить оценку нормы N_{p+1} такой функции в виде $2N_p/\omega$. Также, если экспоненциально стремящаяся к нулю часть подынтегральной функции, вычисленной на p-ом шаге, имеет оценку $C_p\exp(-\gamma t)$

(и мажоранту $C_p > 0$), то после интегрирования получается мажоранта $C_{p+1} = C_p/\gamma$ экспоненциально убывающей части функции на $p+1$- ом шаге. Таким способом для интегралов I_i $(i = 1, 2, 3)$ (3.17), ввиду (3.16), получены следующие мажоранты:

$$I_1^* = \frac{c}{\gamma_0}\xi_{kl}^*(v_{n-1}^{(p)*}(0) + \hat{v}_{n-1}^{(p)*})^k(v_n^{(q)*}(0) + \hat{v}_n^{(q)*})^l,$$

$$I_2^* = \frac{c}{\gamma_0}(\xi_{n-1}^*)^k(\xi_s^*)^l(v_{n-1}^{(p)*}(0) + \hat{v}_{n-1}^{(p)*})^k(v_s^*)^l,$$

$$I_3^* = \lambda_0^{-1}(\xi_{n-1}^*)^k(\xi_n^*)^l(v_{n-1}^{(p)*}(0) + \hat{v}_{n-1}^{(p)*})^k(v_n^{(q)*}(0) + \hat{v}_n^{(q)*})^l,$$

где $\hat{v}_j^{(r)*}$, $v_j^{(r)*}(0)$ $(j = n-1, n)$ – мажоранты для $\hat{v}_j^{(r)}(t)$, $v_j^{(r)}(0)$, соответственно, ξ_{kl}^*, ξ_s^* $(s = 1, 2, ..., n-2)$ – постоянные, такие, что $|\xi_{kl}(t)| \leq \xi_{kl}^*$, $|\xi_s(t)| \leq \xi_s^*$, и $\lambda_0 = \min(\omega/2,\ \gamma_0)$.

Обозначим мажоранты: $\hat{v}_j^* >> \hat{v}_j(t)$ $(j = n-1, n)$, $\hat{v}^* >> \hat{v}(t)$, $v^* >> v(t)$, $v_0^* >> v_0$. Мажорирующее уравнение, соответствующее уравнению (4.3), согласно указанной процедуре построения можно взять в виде

$$\begin{gathered} v^* = v(0) + \frac{\varepsilon}{l}U^{(2)*}(v_0^* + \hat{v}^*, v^*) + (\varepsilon l)^{-1}U^{(3)*}(\varepsilon(v_0^* + \\ +\hat{v}^*), \varepsilon v^*) + \varepsilon^2 f^* + \varepsilon^2 l^{-1}U^*(\varepsilon(v_0^* + \hat{v}^*), \varepsilon v^*, \varepsilon^3), \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $l = \min(\omega/2, \lambda_0, \beta)$, $\lambda_0 = |\operatorname{Re}\lambda_{n-2}|$, $U^{(2)*}$, $U^{(3)*}$, U^* – мажоранты соответствующих операторов, $f^* = \operatorname{col}(f_1^*, \ldots, f_{n-2}^*)$, причем

$$f_k^* \geq \left|\int_0^t \exp[\lambda_k'(t-\tau)]f_k'(\tau)d\tau\right| \geq \frac{1}{\lambda_0}f_k^0,\ k = 1, 2, ..., n-2,$$

$f_k^0 > 0$ – постоянная, такая,что $f_k^0 \geq |f_k'(t)|$.

На основании (4.1), (4.2) в качестве мажорирующего уравнения, отвечающего переменной $\hat{v}_{n-1}$, полагая $v_j^*(0) >> v_j(0)$ $(j = n-1, n)$, можно взять уравнение

$$\hat{v}_{n-1}^* = |h_{n-1}| \frac{2\varepsilon^2}{\omega} [(v_{n-1}^*(0) + \hat{v}_{n-1}^*)^2 \hat{v}_n^* + v_n^*(0)(2v_{n-1}^*(0) + \\ + \hat{v}_{n-1}^*)\hat{v}_{n-1}^*] + \frac{\varepsilon}{l} W_{n-1}^{(2)*}(v_0^* + \hat{v}^*, \varepsilon v^*) + (\varepsilon l)^{-1} W_{n-1}^{(3)*}(\varepsilon(v_0^* + \\ + \hat{v}^*), \varepsilon v^*) + \varepsilon^2 f_{n-1}^* + \varepsilon^2 W_{n-1}^*(\varepsilon(v_0^* + \hat{v}^*), \varepsilon v^*, \mu). \tag{4.6}$$

Уравнение для $\hat{v}_n$ аналогично и имеет вид

$$\hat{v}_n^* = |h_n| \frac{2\varepsilon^2}{\omega} [(v_n^*(0) + \hat{v}_n^*)^2 \hat{v}_{n-1}^* + v_{n-1}^*(0)(2v_n^*(0) + \\ + \hat{v}_n^*)\hat{v}_n^*] + \frac{\varepsilon}{l} W_n^{(2)*}(v_0^* + \hat{v}^*, \varepsilon v^*) + (\varepsilon l)^{-1} W_n^{(3)*}(\varepsilon(v_0^* + \\ + \hat{v}^*), \varepsilon v^*) + \varepsilon^2 f_n^* + \varepsilon^2 W_n^*(\varepsilon(v_0^* + \hat{v}^*), \varepsilon v^*, \mu). \tag{4.7}$$

В уравнениях (4.6) и (4.7) $W_j^{(2)*,}$ $W_j^{(3)*}$, W_j^*, $(j = n-1, n)$ – мажоранты для $W_j^{(2)}$, $W_j^{(3)}$, W_j, соответственно, $f_j^* = f_{pj}^* + f_{ej}^*$, где $f_{ej}^* \geq \left| \int_0^t f'_{ej}(\tau) d\tau \right|$ и $f'_{ej}(t)$ – экспоненциально стремящаяся к нулю часть функции f'_j и ввиду соотношений (3.7), (3.8)

$$f_{pn-1}^* = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq -1}}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} (C_j^+ + b_j^+(m)) a_m^{(j)} \right|,$$

$$f_{pn}^* = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 1}}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{n} (C_j^- + b_j^-(m)) a_m^{(j)} \right|.$$

Мажорирующие уравнения для $v_{n-1}^*(0)$, $v_n^*(0)$ строятся следующим образом. Пусть $v_j^*(0) = |v_{0j}| + \tilde{v}_j^*(0)$ $(j = n-1, n)$. Здесь и далее $v_{0j} = v_{0j}^{(0)}$ согласно (3.14). Вводя обозначение

$$\tilde{W}_j = l^{-1}[\varepsilon^{-3} W_j^{(3)*}(\varepsilon(v_0^* + \hat{v}^*), \varepsilon\hat{v}^*) + W_j^*(\varepsilon(v_0^* + \hat{v}^*), \varepsilon v^*, \mu)].$$

На основании соотношений (4.4) можно получить уравнения

$$\begin{aligned} &2|v_{0n-1}||v_{0n}|\tilde{v}_{n-1}^*(0) + v_{0n-1}^2\tilde{v}_n^*(0) = \tfrac{1}{|h_{n-1}|}[|v_{0n}|(\tilde{v}_{n-1}^*(0))^2 + \\ &\qquad +2|v_{0n-1}|\tilde{v}_{n-1}^*(0)\tilde{v}_n^*(0) + (\tilde{v}_{n-1}^*(0))^2\tilde{v}_n^*(0) + \tilde{W}_{n-1}], \\ &v_{0n}^2\tilde{v}_{n-1}^*(0) + 2|v_{0n}||v_{0n-1}|\tilde{v}_n^*(0) = \tfrac{1}{|h_n|}[|v_{0n-1}|(\tilde{v}_n^*(0))^2 + \\ &\qquad +2|v_{0n}|\tilde{v}_{n-1}^*(0)\tilde{v}_n^*(0) + \tilde{v}_{n-1}^*(0)(\tilde{v}_n^*(0))^2 + \tilde{W}_n]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Пусть $\tilde{W}_{n-1}^*, \tilde{W}_n^*$ – правые части уравнений (4.8). Определитель d' линейной части уравнений (4.8) отличен от нуля при выполнении условия (3.11), и, согласно (4.8), можно записать мажорирующие уравнения в виде

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{n-1}^*(0) &= (2|v_{0n}|\tilde{W}_{n-1}^* + |v_{0n-1}|\tilde{W}_n^*)/d', \\ \tilde{v}_n^*(0) &= (|v_{0n}|\tilde{W}_{n-1}^* + 2|v_{0n-1}|\tilde{W}_n^*)/d'. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Решение уравнений (4.5) – (4.7), (4.9) относительно мажорирующих функций существует (и оно единственно) [6,7] в форме степенных рядов относительно параметра ε и начальных значений некритических переменных, и, таким образом, построенные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Таким образом, полученный результат имеет вид

Теорема. Пусть для уравнения (1.1) с голоморфной по x функцией $F(x,t)$, непрерывным интегральным ядром $K(t)$ типа (1.2) и экспоненциально предельно периодической функцией $\mu f(t)$ $(\mu << 1)$, обладающей непрерывной производной с ограниченным изменением, характеристическое уравнение имеет в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > -\beta$ конечное число корней, среди которых пара чисто мнимых корней $\pm \mathrm{i}\omega$, остальные корни обладают отрицательными вещественными частями, и $n-2$ старших корней являются простыми.

Пусть периодическая часть функции $f(t)$ имеет период $T = 2\pi/\omega$.

Пусть выполнены условия, позволяющие выделить преобразованиями Ляпунова критические переменные и определить постоянную Ляпунова g_3 [8,11], и пусть справедливы неравенства (3.1) и (3.11).

Тогда

1) уравнение (1.1) допускает семейство экспоненциально предельно периодических решений, представимое абсолютно сходящимися степенными рядами по малому параметру $\mu^{1/3}$ и $n-2$ начальным значениям некритических переменных, причем периодические части этих решений задаются абсолютно сходящимися рядами Фурье;

2) начальные значения критических переменных в первом приближении задаются соотношениями (3.9), (3.10), (3.13), (3.14), которые определяют амплитуду колебаний в этом приближении.

Для дифференциальных уравнений (ядро $K(t) \equiv 0$ в уравнении (1.1)) теорема трансформируется в следствие о существовании в резонансном случае периодических решений, устанавливаемых по членам 3-го порядка.

Можно отметить, что вопрос о существовании периодических решений в резонансном случае для квазилинейнных дифференциальных уравнений при условии разрешимости амплитудного уравнения общей формы исследован И.Г. Малкиным [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков Я.В., Рузикулов Д.* Периодические решения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений и их асимптотики. Фрунзе: Изд-во «Илим». 1986. 281 с.

2. *Burton T.A.* Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.

3. *Рябов Ю.А., Хусанов Д.Х.* Периодические решения интегро - дифференциального уравнения второго порядка в нерезонансном случае // Укр. математ. журнал. 1982. Т.34. N 5. С. 644-647.

4. *Хусанов Д.Х.* Периодические решения квазилинейных интегро - дифференциальных уравнений второго порядка в резонансном случае // Докл. АН Уз. ССР. 1983. № 7. С. 8-11.

5. *Хусанов Д.Х.* К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Ташкент: Изд-во «Фан». 2002. 255 с.

6. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука. 1979. 431 с.

7. *Лика Д.К., Рябов Ю.А.* Методы итераций и мажорирующее уравнение Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца. 1974. 291 с.

8. *Сергеев В.С.* О неустойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней для одного класса систем с последействием // ПММ. 1998. Т.62. Вып.1. С.79-86.

9. *Сергеев В.С.* О предельно периодических движениях в некоторых системах с последействием // ПММ. 2004. Т.68. Вып. 5. С. 857-869.

10. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз. 1961. 936 с.

11. *Сергеев В.С.* О неустойчивости решений интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра в критическом случае пары чисто мнимых корней // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С.38-56.

12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т.2. М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1956. 473 с.

13. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. гос. ун-та. 1957. 327 с.

14. *Сергеев В.С.* Об устойчивости решений для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. Т.22. 1986. № 3. С.518-523.

15. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука. 1966. 530 с.

Limit periodic solutions of the Volterra integrodifferential equations

Sergeev V.S.

Abstract:

Systems described by Volterra integrodifferential equations with analitic non-linear parts and small periodic (limit periodic) perturbations, are investigated. The critical case of the pair of pure imaginary roots with resonance is considered. The question of the existence of limit periodic solutions, in form of power series with respect to the small parameter and initial data of the non-critical variables, is analyzed.

Keywords: integrodifferential equations of the Volterra type, oscillation theory, the critical case of a pair of pure imaginary roots