В.А. Бойков, Ж.В. Самохвалова,
А.С. Сумбатов, А.С. Хворостьянов

ПЯТЬ
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД
ОДИНЦОВСКОГО ГУМАНИТАРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Одинцово
2009

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ………………………………………………………….. 4

Задачи экономико-математических
олимпиад (ЭМО) 2005-2009 годов ..……………………………….. 7

Решения задач ………………………………………………………. 15

Победители олимпиад ……………………………………………… 42

Благодарности ………………………………………………………. 44

В В Е Д Е Н И Е

Одинцовский гуманитарный университет (с 2008 г. институт) открылся в 2004 году. Первостепенный вопрос организации любого учебного процесса: кого учить и чему учить. Было ясно, что главный континент учащихся составят выпускники средних учебных заведений Одинцовского района, в первую очередь, выпускники общеобразовательных школ, гимназий и лицеев. В деле привлечения в вуз наиболее способной молодежи важную роль играют олимпиады школьников по конкурсным предметам.

Коллектив организаторов экономико-математических олимпиад в ОГУ сложился стихийно. Сошлись энтузиасты нового дела – молодые преподаватели и умудренные опытом ведущие профессора и доценты факультета экономики и менеджмента. Много сил было потрачено на споры, тщательный отбор задач. При этом были учтены следующие обстоятельства.

Преподаватели вузов, работающие на экономических факультетах, зачастую сталкиваются с ситуацией, когда часть студентов, поступивших на первый курс, с удивлением для себя узнаёт, что экономика, как, например, и физика в школе, это сложно и непонятно. Оказывается, по экономическим дисциплинам тоже надо решать задачи, которые по сложности выходят далеко за рамки школьной арифметики.

Познакомившись с физикой, химией, биологией и другими естественнонаучными предметами в школе, такие учащиеся не стали поступать на физфак, химфак и другие факультеты, потому, что для себя решили, что это не их науки. А вот на экономический факультет, решили, идти стоит, потому что на нем готовят специалистов «хлебных» и престижных профессий: финансистов, экономистов, менеджеров. Но главное: экономика вроде бы является гуманитарным предметом, и, значит, освоить соответствующие науки будет проще. По-видимому, так в действительности в России и было в самом начале 90-х, до того момента, пока из развитых капиталистических стран не «приехали», так называемая «экономикс», экономическая теория, микроэкономика, макроэкономика, эконометрика и другие *точные* экономические науки.

Студенты, не готовые воспринимать строгую теорию, решать прикладные экономические задачи, оказались в сложной ситуации. Сложность эта связана и с отсутствием у вчерашних школьников экономического образа мышления, который быстро не формируется.

Нобелевский лауреат по физике 1925 года Джеймс Франк (1882-1964), будучи молодым человеком, в 1901 году поступил в Гейдельбергский университет изучать экономику и право. Однако, быстро сориентировавшись, что в экономике ему многое непонятно, через год перешел в Берлинский университет изучать физику. По-видимому, не обладая экономическим образом мышления, он принял верное решение. Впоследствии Джеймс Франк стал одним из крупнейших физиков XX века. В 1927 году он был избран иностранным членом-корреспондентом АН СССР, а в годы второй мировой войны принимал участие в знаменитом Манхэттенском проекте.

Сложность ситуации, в которую попадают многие студенты, усугубляется ещё и тем, что предмет «экономика» в школе носит факультативный характер, и учителей школ с дипломами экономических специальностей остро не хватает.

Читателям-школьникам и студентам настоящей книги рекомендуем прочесть труд[1] об экономическом образе мышления, выдержавший десять изданий.

Понимая все эти проблемы, авторы сборника попытались предложить школьникам такие задачи с экономическим содержанием,

[1] Пол Хейнэ, Питер Боуттке, Дэвид Притичко. «Экономический образ мышления». Издательство: Вильямс. 2007.

которые школьники могли бы решить без специальной подготовки, т.е. независимо от того, изучали они предмет «экономика» в школе или нет.

На наш взгляд предлагаемые задачи позволят, уважаемый читатель, понять, насколько Вам близок так называемый экономический образ мышления. Конечно, способность их решить в данный момент, к сожалению, не поставит Вас сразу в разряд выдающихся ученых (Нобелевская премия по экономике безусловно ждет Вас еще далеко впереди!). Однако и возможные затруднения не означают для Вас неспособность учиться экономическим специальностям. Решение собранных в данной книжке задач – это лишь один из способов проконтролировать себя, и, самое главное, понять, интересны ли Вам экономические науки.

По математике было решено отказаться от задач математического анализа на том уровне, на котором эта дисциплина внедрена в учебную программу средней школы, а сосредоточиться на задачах из традиционного курса школьной математики по дисциплинам: арифметика, алгебра, геометрия (стереометрия) и тригонометрия. При этом ряд задач был придуман специально для олимпиад ОГУ и является оригинальным.

При составлении, отборе и модификации олимпиадных задач в первую очередь использовались следующие источники:

1. Абчук В.А. 250 занимательных задач по менеджменту и маркетингу. – М.: Вита-Пресс, 1997.

2. М.И. Шабунин. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2000.

3. В.Л. Шагин. Вступительные экзамены по математике в Высшей школе экономики. Варианты. – М.: Вита-Пресс, 1997.

4. http://nauka.ssu.samara.ru/MATH/OLIMP/RUS/XIV/xiv.html - Об XIV Московской экономико-математической олимпиаде для школьников 9-11 классов.

Задачи Экономико-математических олимпиад (ЭМО) 2005-2009 годов

Задачи I ЭМО ОГУ 2005 года

2005.1. Специалист по рекламе утверждает, что он может, задав 13 вопросов относительно расположения наименования товара в каталоге, отгадать наименование любого товара, который вы ему собираетесь предложить. Предложите алгоритм «отгадывания» товара, если на вопросы можно отвечать только «да» или «нет». Когда этот алгоритм не сработает за 13 вопросов?

2005.2. В период либерализации цен (в начале «перестройки») цена на некоторый товар за 4 года увеличилась в 180 раз. При этом за 1-й год она увеличилась в $\boldsymbol{x}$ раз; за 2-й год – в $(\boldsymbol{x+1})$ раз по сравнению с 1-м годом; за 3-й год – в $(\boldsymbol{x+3})$ раза по сравнению со 2-м годом; за 4-й год – в $(\boldsymbol{x+4})$ раза по сравнению с 3-м годом.

На сколько процентов увеличилась цена товара за первые два года?

2005.3. Клиент коммерческого банка положил некоторую сумму денег на депозитный счет сроком на один год под $\boldsymbol{P\%}$ годовых. По условиям вклада он имеет право снять свою наращенную сумму раньше срока с начислением процентов пропорционально сроку вклада (по, так называемой, схеме простых процентов).

В момент времени t $(0<t<1)$ вкладчик решил снять свои деньги вместе с процентами. Сняв деньги со счета, он тут же передумал и всю сумму денег положил в тот же банк под те же $\boldsymbol{P\%}$ годовых до конца года.

Дает ли эта процедура (*реинвестирование*) положительную добавку к наращенной сумме денег по сравнению с гарантированной банком наращенной суммой без процедуры реинвестирования? Если «да», то в какой момент времени клиент должен произвести реинвестирование, чтобы эта добавка была максимальной?

2005.4. Докажите, что не существует простых чисел p и q таких, что числа $pq^3 - 1$ и $pq^3 + 1$ тоже простые.

2005.5. Вычислить объем тетраэдра, три вершины которого являются серединами трех попарно скрещивающихся ребер куба, а четвертая вершина является вершиной куба, в которой сходятся другие три ребра куба. Длина ребра куба равна 1.

2005.6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

Задачи II ЭМО ОГУ 2006 года

2006.1. Несмотря на некоторое увеличение размера пенсии, из-за инфляции покупательная способность пенсии в 2005 году уменьшилась на 10% по сравнению с 2004 годом. Исключив из рациона более дорогие продукты питания, пенсионеры увеличили потребление молочных продуктов и макаронных изделий в 2005 году на 8 %. Сколько процентов от пенсии составили в 2005 году траты на молочные продукты и макаронные изделия, если еще год назад эти траты составляли 24% ?

2006.2. Годовая сумма аренды замка на Емелиной горе составляет $150.000. Ставка банковского процента – 5 % годовых. Один Горыныч задумался, выгодно ли ему приобрести этот замок, если цена замка составляет $2.000.000. А как Вы думаете?

2006.3. Автомобильный салон «Капулетти-Motors» при продаже автомобиля типа α-Ромео имеет прибыль €1.000; при продаже автомобиля типа β -Джульетта – €2.100. Спрос на эти автомобили таков, что в неделю всего продается от 10 до 12 автомобилей. Расходы на содержание в салоне одного автомобиля типа α составляют €25 в неделю; на содержание одного автомобиля типа β – €50 в неделю. Автосалон планирует расходовать на содержание автомобилей не более €300 в неделю. Какое количество автомобилей каждого типа необходимо заказать со склада «Монтекки-Cars», чтобы автосалон, продав их, получил максимальную прибыль?

2006.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2 - x^2 + xy + 4 = 0 \\ 3x^2y^2 - 2x^2 - 3xy - 6 = 0. \end{cases}$

2006.5. Из середины M высоты SO пирамиды $SABC$, у которой все ребра равны, опущен перпендикуляр MF на боковую грань SAB, равный $\boldsymbol{a}$. Найти объём пирамиды.

2006.6. В 2005 году на I Экономико-математическую олимпиаду ОГУ пришло 129 школьников Одинцовского района и Москвы. Им предложили 6 задач. За каждую задачу ставилась одна из оценок 1 или 0 (решил или не решил). Доказать, что среди участников прошлой олимпиады было не менее трех школьников с одинаковыми оценками по всем задачам.

Задачи III ЭМО ОГУ 2007 года

2007.1. Вы прочли, что расходование средств из стабилизационного фонда России выгоднее, чем дальнейшее накопление фонда. Как бы Вы отнеслись к подобному мнению? Объясните.

2007.2. Уровень инфляции можно определить как отношение стоимости потребительской корзины в текущем году к её стоимости в базисном году.

В потребительской корзине 2 товара: хлеб и молоко, при этом стоимость хлеба в корзине в базисном году была в 2 раза меньше стоимости молока. За период после базисного года молоко подорожало в два раза, а хлеб в три. Найдите уровень инфляции.

2007.3. В некотором царстве, в некотором государстве монетный двор чеканит в год 1000 золотых монет весом 10 граммов каждая. За год каждая монета стирается на 5 процентов от первоначального веса. В тяжелый год после затяжной войны царь собрал лишь 6000 монет налога. Предполагается, что все эти монеты были выпущены в течение последних шести лет. Полученных денег, вместе с той тысячей монет, что царь мог отчеканить, ему не хватало. Чтобы выплатить жалованье войску, царь решил всех обмануть и переплавить эти монеты с 25-ой процентной добавкой меди. Сколько может выиграть царь на этой операции?

2007.4. Бригада землекопов, обладающих одинаковой производительностью, в состоянии вырыть канаву за 24 часа, когда все работают вместе от начала до конца. Получилось, однако, так, что землекопы смогли приступить к работе только один за другим через равные промежутки времени, а затем каждый копал до окончания всей работы. Известно, что четвертый землекоп, приступивший к работе, проработал в 2 раза дольше, чем последний, а второй – в 4 раза дольше, чем последний. Сколько рабочих было в бригаде? Какую часть всей работы выполняет один землекоп за один час? Сколько времени они рыли канаву?

2007.5. Основанием треугольной пирамиды SABC является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB=\sqrt{2}$. Боковое ребро SC равно 2 и перпендикулярно основанию. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

2007.6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} log_{2007}\left(a x^2 y + x y^2\right) - log_{1/2007}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{y}\right) = 1 \\ log_x \dfrac{x y}{2007} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задачи IV ЭМО ОГУ 2008 года

2008.1. В г. Одинцово были проведены два опроса населения по поводу эффективности социальных выплат пенсионерам:

а) *800* человек опросили с *8* до *9* утра на перекрёстке Ново-Спортивной улицы и Подушкинского шоссе;

б) из телефонного справочника наугад выбрали *600* номеров и задали те же вопросы по телефону.

Как вы думаете, результаты, какого из опросов наиболее точно отражают мнение жителей г. Одинцово? Аргументируйте свой ответ.

2008.2. Имеются следующие данные по торговому холдингу, который состоит из трех магазинов:

Название магазина	Общая выручка от реализации товаров (*тыс.руб.*)	Затраты магазина, связанные с реализацией товаров в расчёте на одного продавца (*тыс.руб.)*	Выручка, приходящаяся на одного продавца (*тыс. руб.)*
Кит	*840*	*8*	*28*
Два кита	*900*	*11*	*36*
Три кита	*500*	*10*	*25*

По торговому холдингу в целом найти:

а) среднюю выручку, приходящуюся на одного продавца;

б) средние затраты, приходящиеся на одного продавца.

2008.3. Для выпуска единицы продукции надо потратить *0,2* кг сырья и *3* часа времени. На складе лежат *100* кг сырья стоимостью *100* руб. за кг, а один час труда рабочих стоит *20* рублей.

а) Выгодно ли продавать продукцию по *120* руб. за единицу, если затраты на заработную плату администрации, аренду, обслуживание оборудования и прочее составляют *10 000* рублей?

б) Выгодно ли принять заказ на дополнительный выпуск *300* единиц продукции, если сырьё придётся докупать по *120* руб. за килограмм, а цена единицы товара нового выпуска составит *110* рублей?

2008.4. Чему равняется произведение *13*-ти последовательных членов геометрической прогрессии, если седьмой член в этой прогрессии равен $2008^{1/13}$.

2008.5. Решить уравнение $x^2+8x\cdot\cos(ax)+16=0$ при всех значениях параметра a.

2008.6. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центры шара и основания призмы.

Задачи V ЭМО ОГИ 2009 года

2009.1. Для каждой из стран A и $Б$ известны функции спроса и предложения на рынке товара X.

В стране A функция спроса имеет вид $Q_A^d=100-0,25P$ (Q_A^d - объём спроса на товар X в стране A в тыс. шт.; P – цена единицы товара

X в условных денежных единицах); функция предложения имеет вид $Q_A^s = -10 + 0,25P$.

В стране $Б$ функция спроса имеет вид: $Q_Б^d = 299 - P$ ($Q_Б^d$ - объём спроса на товар X в стране $Б$ в тыс. шт.; P – цена единицы товара X в условных денежных единицах); функция предложения имеет вид $Q_Б^s = -50 + 0,2P$.

Страны $А$ и $Б$ образуют экономический союз, благодаря которому рынок двух стран становится единым. Найдите равновесное количество товара и равновесную цену на едином рынке. Равновесная цена – цена, при которой объём спроса равен объему предложения.

2009.2. Предприниматель подрядился на строительство дома, для чего нанял рабочих-строителей, выполняющих работы по кирпичной кладке. Заработная плата рабочего за день составляет 5000 рублей. Предприниматель получает прибыль за каждый кубический метр кладки без учета материалов по 1000 рублей. Первый рабочий за день может уложить 10 кубометров кирпича, производительность каждого следующего нанятого рабочего в силу особенностей технологии сокращается на один кубометр в день. Какое количество рабочих целесообразно нанять предпринимателю? Почему?

2009.3. С 1 января за одиннадцать месяцев цены выросли на 40%. Начиная со следующего года, цены за 10 месяцев выросли вдвое. При этом сохранялись декабрьские темпы роста цен. На сколько процентов выросли цены за первый год?

2009.4. Решить уравнение

$$\frac{x^2 - 6x - 9}{x^2 - 4x - 9} = \frac{x}{x^2 - 6x - 9}.$$

2009.5. Корыто полуцилиндрической формы наполнено водой. Сколько процентов воды вытечет, если корыто наклонить перекатыванием на 60°?

2009.6. Решить уравнение для всех значений параметра a

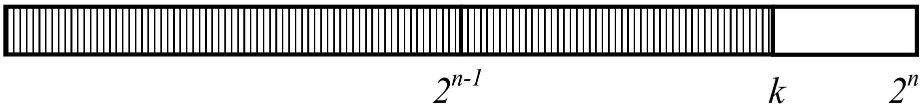
$$\sin^4(a+x)+2\sqrt{2008}\,x+\cos^4(a+x)=x^2+2009.$$

Решения задач

2005.1. Специалист по рекламе, усердно изучавший в университете математику, мог бы предложить следующий алгоритм, который называется методом деления пополам.

Пусть количество наименований товаров в каталоге равно k. Найдём такое минимальное n, чтобы выполнялось неравенство $2^{n-1} < k \leq 2^{n}$.

См. рисунок



На первом шаге разобьём список на две части, состоящие из 2^{n-1} и оставшихся $\left(k-2^{n-1}\right) \leq 2^{n-1}$ наименований.

Теперь вопрос специалиста: «Находится ли в первой части списка наименование искомого товара?»

Если ответ «да», то искомое наименование товара находится в части, состоящей, вообще говоря, из большего количества наименований, а именно, в части, содержащей 2^{n-1} наименований. При этом, однако, список наименований уже уменьшился вдвое. Если ответ на вопрос был «нет», то заново находим n_1 из условия, что n_1 – минимальное целое, такое что выполняется неравенство $2^{n_1-1} < k-2^{n-1} \leq 2^{n_1}$.

На втором и последующих шагах список, в котором ищется искомый товар, делится пополам (длина списка на каждом шаге уменьшается вдвое), а специалист по рекламе задаёт один тот же вопрос.

На последнем n-ом шаге в списке останется одно наименование товара, про которое известно, что оно наименование искомого товара, либо может случиться, что число шагов будет меньше n.

При $n = 13$ получаем, что, если список состоит из числа k наименований, удовлетворяющему неравенству $2^{12} < k \le 2^{13}$, то изложенный алгоритм позволит найти товар не более чем за 13 шагов. При $k > 2^{13}$ может потребоваться в общем случае более 13 шагов.

2005.2. Обозначим через P цену товара на начало первого года. Тогда: Px - цена товара в конце первого года;

$Px(x+1)$ - цена товара в конце второго года;

$Px(x+1)(x+3)$ - цена товара в конце третьего года;

$Px(x+1)(x+3)(x+4)$ - цена товара в конце четвёртого года.

Условие задачи записывается в виде алгебраического уравнения четвёртой степени относительно x

$$Px(x+1)(x+3)(x+4) = 180P.$$

Для решения этого уравнения введём новую переменную $t = x + 2$.

В результате такой замены, получим:

$$x = t - 2, \quad x + 4 = t + 2, \quad x(x+4) = t^2 - 2^2 = t^2 - 4,$$
$$x + 1 = t - 1, \quad x + 3 = t + 1, \quad (x+1)(x+3) = t^2 - 1^2 = t^2 - 1.$$

Уравнение относительно переменной t является биквадратным

$$(t^2 - 1)(t^2 - 4) = 180 \quad \text{или} \quad t^4 - 5t^2 - 176 = 0.$$

Обозначим через $y = t^2, y > 0$. Квадратное уравнение $y^2 - 5y - 176 = 0$ относительно y имеет положительный корень $y = 16$. Отсюда $t_{1,2} = \pm 4$, соответственно: $x_1 = t_1 - 2 = 2$, $x_2 = t_2 - 2 = -6$. По условию задачи x должен быть положительным.

Итак, в конце второго года цена стала равной $Px(x+1) = P \cdot 2 \cdot 3 = 6P$, т.е. за первые два года цена увеличилась на 500%.

2005.3. Опишем процесс наращения денежной суммы на депозитном счёте в банке.

Введем следующие обозначения:

S_0 – первоначальная сумма денег, вложенная на депозитный счет;

$(0, T)$ – интервал начисления (наращения) процентов;

T – длина временного интервала наращения (обычно $T = 1$ году);

P – ставка наращения, выраженная в процентах за время T;

D_T – сумма денег, которую выплатит банк сверх первоначальной суммы S_0, т.е. доход за время T;

S_T – наращенная сумма или сумма в конце срока, (интервала начисления);

t – текущий момент времени, число t удовлетворяет двойному неравенству $0 \le t \le T$.

Процентные деньги D_T запишем по отношению к величине начальной суммы S_0

$$D_T = S_0 \cdot \frac{P}{100\%} = S_0 \cdot p,$$

где p – безразмерная величина ставки наращения (ставки процента). Отсюда имеем $S_T = S_0 + S_0 \cdot p = S_0 \cdot (1 + p)$.

Обычно полагают, что доход за время t вычисляется пропорционально времени $D(t) = S_0 \cdot p \cdot \dfrac{t}{T}$. Тогда за единицу времени $t = T$ доход составит $D(T) = S_0 \cdot \pi = D_T$.

Таким образом, наращенная сумма за время t может быть вычислена по формуле

$$S(t) = S_0 + D(t) = S_0 + S_0 \cdot \frac{P}{100\,\%} \cdot \frac{t}{T},$$

или

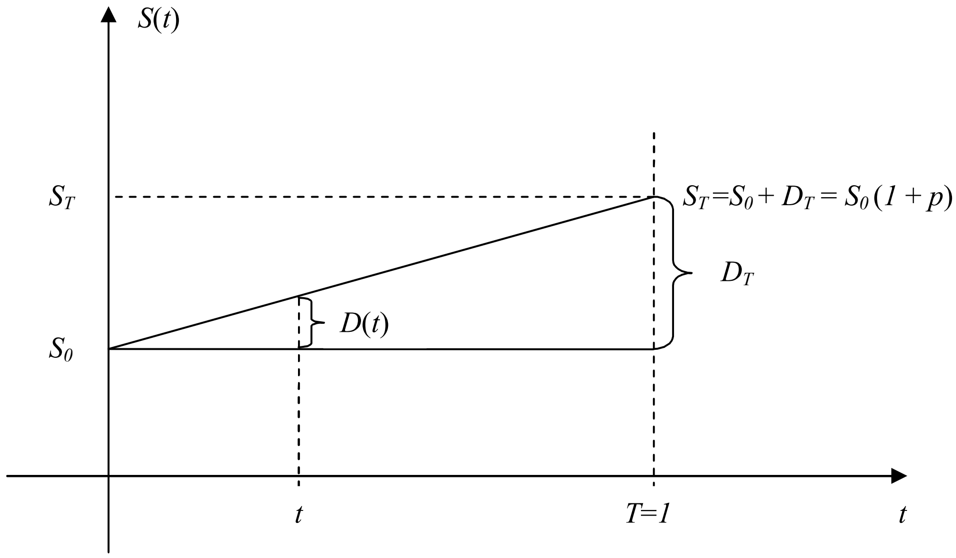
$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{P}{100\,\%} \cdot \frac{t}{T} \right) = S_0 \cdot (1 + p \cdot \tau),$$

где $\tau = \dfrac{t}{T}$ – безразмерное время $\left(0 \le \tau \le 1, \quad \text{если} \quad 0 \le t \le T \right)$.

Последняя формула называется ***формулой наращения по схеме простых процентов***.

В частности, при $t = T$ формула дает $S_T = S_0 \cdot (1 + p)$.

Графически наращенная сумма $S(t)$ изображается наклонной прямой



Выведем формулу, выражающую разницу наращенной суммы $\tilde{S}_T$ с процедурой реинвестирования, произведённой в произвольный момент времени $t \left(0 \le t \le T \right)$, и наращенной суммой S_T за время T, вычисленной без процедуры реинвестирования.

Последовательно вычислим величины:

$$S_T = S_0 \left(1 + p \right); \qquad S_\tau = S_0 \left(1 + p \cdot \tau \right);$$

$$\tilde{S}_T = S_\tau \cdot \left(1 + p \left(1 - \tau \right) \right) = S_0 \cdot \left(1 + p\,\tau \right) \cdot \left(1 + p \left(1 - \tau \right) \right) =$$

$$= S_0 \cdot \left(1 + p\,\tau \right) \cdot \left(1 + p \right) - S_0 \cdot \left(1 + p\,\tau \right) \cdot p\,\tau =$$

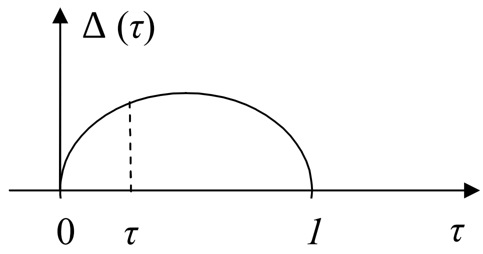
$$= S_0 \cdot \left(1 + p \right) + S_0 \cdot \left(1 + p \right) \cdot p\,\tau - S_0 \cdot \left(1 + p\,\tau \right) \cdot p\,\tau =$$

$$= S_T + S_0\, p\,\tau \cdot \left(1 + p - 1 - p\,\tau \right) = S_T + S_0\, p^2\, \tau \cdot \left(1 - \tau \right).$$

Отсюда получаем, что интересующая нас разность равна

$$\Delta\left(\tau \right) \overset{def}{=} \tilde{S}_T - S_T = S_0\, p^2\, \tau \cdot \left(1 - \tau \right).$$

Графически эта зависимость изображается параболой



Таким образом получили, что ***реинвестирование*** в любой момент времени $0 < t < T$ ($0 < \tau < 1$) ***приводит к превышению*** наращенной суммы $\tilde{S}_T$ над S_T на величину $\Delta(\tau) > 0$.

Чтобы получить максимальную прибавку, необходимо найти максимум квадратного трёхчлена $\Delta(\tau)$. Для этого достаточно воспользоваться формулой $\tau_{\max} = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2}$, где $\tau_1 = 0, \tau_2 = 1$ - корни квадратного трёхчлена $\Delta(\tau)$. Отсюда получаем ответ: $\tau_{\max} = \dfrac{1}{2}$.

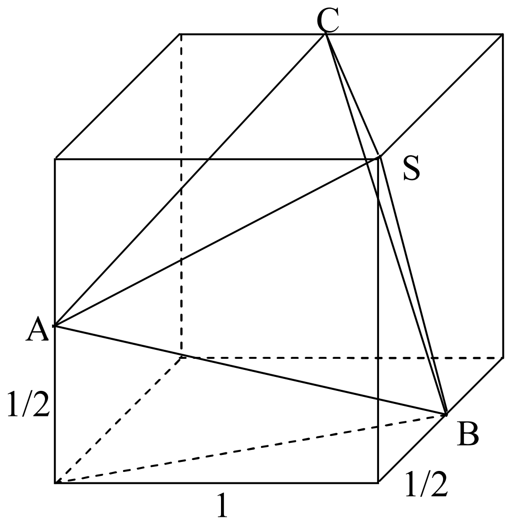
2005.4. Допустим противное: такие *простые* числа p и q существуют. Тогда эти числа соответственно имеют вид $3k \pm 1$ и $3n \pm 1$. Возможны 4 комбинации:

$$(3k-1, 3n-1), \quad (3k+1, 3n-1), \quad (3k-1, 3n+1), \quad (3k+1, 3n+1).$$

Однако при каждой такой комбинации одно из чисел $pq^3 + 1$ или $pq^3 - 1$ является составным. Пусть, например, $p = 3k-1$, $q = 3n-1$. Число $pq^3 - 1 = (3k-1)(3n-1)^3 - 1$, очевидно, делится на 3. Противоречие.

Оставшиеся три случая проверить самостоятельно.

2005.5. Объём пирамиды $SABC$ равен площади равностороннего треугольника ABC, умноженной на треть высоты h, опущенной из вершины S пирамиды на плоскость ABC. Но по симметрии, очевидно, эта высота равняется половине длины диагонали куба: $h = \sqrt{3}/2$. А так как по теореме Пифагора, примененной дважды,



$$AB = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

то искомый объём пирамиды равен $\frac{1}{3}hS_{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{16} = 0{,}1875$. Ответ: 0,1875.

2005.6. Обозначив $u = x + y$, $v = xy$, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} u = 4, \\ (u^2 - 2v)(u^3 - 3uv) = 280. \end{cases}$$

Второе уравнение приводится к квадратному относительно v

$$3v^2 - 40v + 93 = 0.$$

Его корнями являются числа 3 и $31/3$. Исходная система распадается на две стандартные

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 31/3. \end{cases}$$

Решения имеет только первая система уравнений: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

Ответ: (1; 3), (3; 1).

2006.1. Решим задачу с применением условных единиц. Пусть пенсия в 2004 году была 100 у.е. Наличие годовой инфляции 10% равносильно тому, что при сохранении цен на товары размер пенсии уменьшился бы в 2005 году до 90 у.е. По условию задачи пенсионер тратил в 2004 году 24 у.е. на молочные продукты и макаронные изделия. Траты на эти продукты в 2005 году увеличились на 8%, т.е. от пенсии 2004 года тратилось бы $24\cdot 1,08=25,92$ у.е., что составляет $(25,92/90)\cdot 100\%=28,8\%$ от пенсии 2005 года.

2006.2. Данная задача на экономический образ мышления. Решается путем сопоставления выгод от двух альтернативных вариантов использования имеющихся ресурсов. Если предположить, что у Один Горыныча есть в наличии $2.000.000, то, разместив их в качестве вклада в банке он получит за год $100.000. Но, приобретя замок, Один Горыныч экономит $150.000 ежегодной аренды. Таким образом, приобретение замка выгоднее, чем банковский вклад. В данной задаче принципиально важно рассматривать экономию как выгоду.

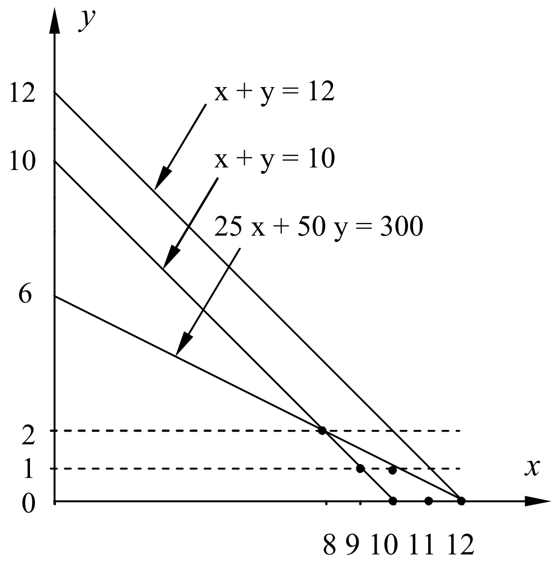
Вместе с тем объяснить целесообразность покупки замка можно и с точки зрения предпринимательской выгоды: сдавая замок в аренду, Один Горыныч получит больший доход, нежели принесут проценты банковского вклада.

2006.3. Обозначим через x – количество автомобилей α–Ромео, y – количество автомобилей β–Джульетта, которое необходимо заказать со склада. Условия задачи запишем в виде системы неравенств

$$\begin{cases} 10\le x+y\le 12, \\ 25x+30y\le 300 \end{cases}$$

с дополнительными условиями: $x\ge 0,\, y\ge 0,\quad x,\, y -$ целые числа.

Нарисуем на плоскости OXY точки, координаты, которых удовлетворяют перечисленным условиям.



Существует 6 точек, координаты которых удовлетворяют системе ограничений. Для каждой из этих точек, координаты которых есть количества автомобилей α–Ромео и β–Джульетта, вычислим прибыль по формуле $1000x + 2100y$. Вычисления запишем в таблицу

Количества автомобилей (α–Ромео, β–Джульетта)	Прибыль для каждой комбинации автомобилей
(12,0)	12
(11,0)	11
(10,0)	10
(10,1)	12,1
(9,1)	11,1
(8,2)	12,2

Таким образом, максимальную прибыль €12.200 даёт комбинация, состоящая из 8 автомобилей α–Ромео и 2 автомобилей β–Джульетта.

2006.4. Если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 2, то получится квадратное уравнение относительно $v = x\,y$

$$v^2 - 5v - 14 = 0,$$

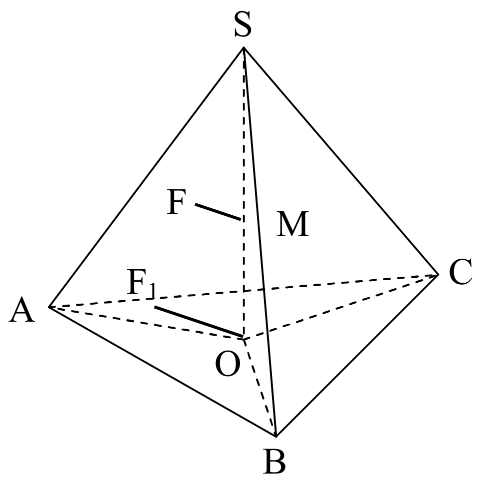
которое имеет два корня 7 и -2. Исходная система распадается на две простых

$$\begin{cases} x^2 = 60, \\ x\,y = 7 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 = 6, \\ x\,y = -2, \end{cases}$$

каждая из которых легко решается.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, $y_{1,2} = \mp\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\quad x_{3,4} = \pm 2\sqrt{15}$, $y_{3,4} = \pm\dfrac{7}{2\sqrt{15}}$.

2006.5. Опустим перпендикуляр OF_1 на грань SAB, $OF_1 = 2MF = 2a$ (основания перпендикуляров MF, OF_1 принадлежат плоскости SAB).



Объём треугольной пирамиды, все ребра которой равны b, как известно, равен $\dfrac{b^3\sqrt{2}}{12}$. С другой стороны, этот же объём равен сумме объёмов трёх равных (и, следовательно, равновеликих) пирамид $SABO$, $SBCO$ и $SACO$, т.е. равен

$$3V_1 = 3\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle SAB}\cdot OF_1 = \frac{a\,b^2\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим $b = 6a\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ и получаем ответ.

Ответ: $27\sqrt{3}\,a^3$.

2006.6. Занумеруем (упорядочим) 6 задач, предлагавшихся на олимпиаде натуральными, числами от 1 до 6. Если i – ая задача решена, то в i –ую позицию 6–значного двоичного числа ставим 1, если не решена – 0. Тогда все 6–значные записи двоичных чисел от

$$(000000)_2 = 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 0 \quad \text{до}$$

$$(111111)_2 = 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 2^6 - 1 = 63$$

взаимно однозначно соответствуют результатам (оценкам) решённых задач.

Например, двоичная запись $(101011)_2$ означает, что решены 1-ая, 2-ая, 4-ая, 6-ая задачи, а 3-я и 5-ая задачи не решены.

Пусть теперь имеется $2^6 = 64$ школьника имеющие не совпадающие во всех позициях оценки. Их результаты могут быть записаны в следующую таблицу

№№ школьников	№№ задач	Комментарий
	6 5 4 3 2 1	
1	0 0 0 0 0 0	Все задачи не решены
2	0 0 0 0 0 1	Решена только первая задача
3	0 0 0 0 1 0	Решена только вторая задача
4	0 0 0 0 1 1	Решены только первая и вторая задачи
…	**…**	**…**
$2^6 = 64$	1 1 1 1 1 1	Решены все задачи

Рассмотрим результат участия в олимпиаде 65-го школьника. Очевидно, что двоичное число, выражающее его результат, в точности совпадает с одним из чисел, записанных в таблице. Запишем это число в новую строку, расположенную ниже той, где оно уже было написано.

Аналогично поступим с результатами 66-го, 67-го, … и, наконец, 128-го школьника. В результате либо мы найдем троих, кто достиг идентичного результата, либо получится таблица с 128-ю строками, в которой каждая строка встречается ровно в двух экземплярах.

Результаты 129-го школьника, очевидно, необходимо записать в таблицу в какое-то место *третьей* строкой.

Таким образом, ***всегда*** из 129 участников олимпиады будет не менее трёх школьников, которые получили совпадающие результаты по всем задачам.

2007.1. Однозначно ответить на этот вопрос не могут даже профессиональные экономисты. Более того, для грамотного ответа на данный вопрос следует проанализировать массу статистических данных.

Перед участниками олимпиады ставилась задача выстроить четкую логику рассуждений. Принципиально важным моментом при ответе на этот вопрос является используемая аргументация.

Так, накопление значительных финансовых ресурсов означает их отвлечение из оборота. Сокращение расходов означает, что часть финансовых ресурсов не будет потрачена на покупку товаров и услуг. Как следствие производители не смогут реализовать определенный объём товаров, а, значит, и не получат доходов, необходимых для финансирования производства новых товаров. В связи с этим было бы целесообразно сократить накопления и потратить часть средств. Однако возрастание расходов приведёт к инфляции из-за увеличения количества денег в обращении, при неизменном количестве товаров.

Вместе с тем, само название «стабилизационный фонд» подразумевает, что использоваться его средства должны для стабилизации экономической ситуации при наличии негативных процессов. Вероятность возникновения таких процессов в 2007 году казалась невысокой, однако события последнего времени, в текущем 2009 году, доказали обратное.

При выставлении оценки за данное задание учитывался не сам ответ, а его аргументация.

2007.2. Условие задачи сформулировано так, чтобы участники олимпиады, не знакомые с методикой оценки инфляции смогли справиться с заданием.

Определим стоимость потребительской корзины в базисном году и в текущем. Предположим, что в базисном периоде хлеб стоил x денежных единиц, тогда стоимость молока будет *2x*. Таким образом, стоимость потребительской корзины в базисном году составит $x + 2x = 3x$.

В текущем году стоимость молока в два раза выше и теперь оно стоит $2 \cdot 2x = 4x$, при этом хлеб подорожал в три раза, и его стоимость составила *3x*. Таким образом, стоимость потребительской корзины в текущем году составила $4x + 3x = 7x$. Таким образом, уровень инфляции составил: $7x / 3x \approx 2{,}33$ или 133%.

2007.3. При решении этой задачи необходимо определить общий вес монет, собранных в качестве налога монетами, которые были выпущены за последние шесть лет.

Год выпуска монет	Потеря веса монет (в процентах)	Потеря веса 1000 монет (в граммах)	Остаток веса каждой 1000 монет года выпуска, указанного в первом столбце (в граммах)
6 лет назад	30%	3 000	7 000
5 лет назад	25%	2 500	7 500
4 года назад	20%	2 000	8 000

3 года назад	15%	1 500	8 500
2 года назад	10%	1 000	9 000
1 год назад	5%	500	9 500
Итого: масса 6000 монет налога			49 500

Если к полученному объему добавить 25% меди, то объём полученного сплава будет весить $49500 \cdot 1,25 = 61875$ (г). Из этого объёма можно выплавить 6187 монет (половинка не в счёт). Таким образом, максимальный выигрыш царя составит 187 монет.

2007.4. *Арифметическое решение.*

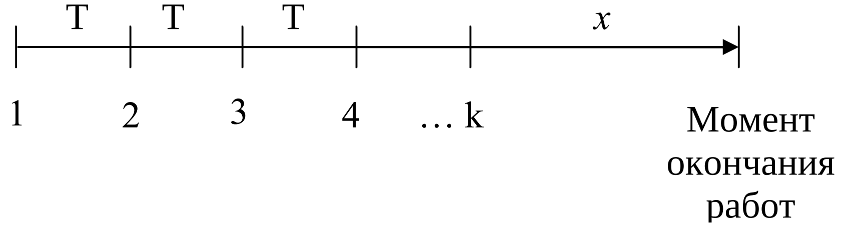
Если T – промежуток времени, через который начинает работу очередной землекоп после начала работы его предшественником, а x – время работы самого последнего землекопа, то $x = T$, так как по условию задачи время $2T + 2x$ работы второго землекопа в 4 раза превышает время x работы последнего. Но тогда землекопов в бригаде было пятеро, так как четвертый землекоп, по условию, всего проработал $2T$ часов. Часовая производительность каждого землекопа равна $1/120$ доли всей работы. Следовательно, с учетом величины трудового вклада каждого из пяти землекопов имеем

$$5T/120 + 4T/120 + 3T/120 + 2T/120 + T/120 = 1,$$

откуда $T = 8$ часам. Значит, начавший работу первым землекоп закончил ее вместе со всей бригадой через 40 часов.

Алгебраическое решение.

Промежутки времени работы каждого землекопа изобразим на оси



Нижние числа (под осью): i – момент начала работы i –го землекопа $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots, k\}$;

T – промежуток времени, через который начинает работу очередной землекоп после начала работы его предшественником;

x – время работы самого последнего (k -го) землекопа.

В наших обозначениях время работы первого землекопа равно $(k-1)T+x$. Соответственно время работы второго и четвёртого землекопов равно $(k-2)T+x$, $(k-4)T+x$.

Условия задачи запишем системой уравнений

$$\begin{cases} (k-2)T+x=4x, \\ (k-4)T+x=2x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-2)T=3x, \\ (k-4)T=x. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение последней системы на второе, получим $k=5$. Подставив значение $k=5$ в первое уравнение второй системы, получим соотношение $T=x$.

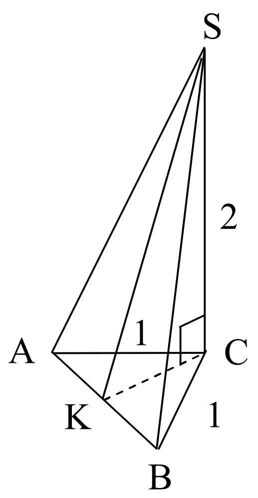
Таким образом, рабочих было пятеро. Из первого условия задачи следует, что 5 землекопов, работая вместе, выполнят всю работу за 24 часа. Следовательно, один землекоп всю работу мог бы выполнить за 120 часов. Отсюда получаем, что часовая производительность каждого землекопа равна $1/120$ доли всей работы. Следовательно, с учётом величины трудового вклада каждого из пяти землекопов имеем

$$5T/120 + 4T/120 + 3T/120 + 2T/120 + T/120 = 1.$$

Отсюда $T=8$ часам. Значит, начавший работу первым землекоп работал $5T=40$ часов.

Ответ: 5 рабочих; производительность каждого землекопа равна $1/120$ доли всей работы; 40 часов – время работы землекопа, приступившего к работе первым.

2007.5. Задача просто решается, если воспользоваться формулой для объёма пирамиды $V=\frac{1}{3}rS_{полн}$, где r - радиус вписанного в пирамиду шара, а $S_{полн}$- площадь полной поверхности пирамиды (эта формула является пространственным аналогом известной в планиметрии формулы для площади треугольника $S=\frac{1}{2}Pr$, вычисляемой через величину P периметра треугольника и радиус r вписанной окружности). Основание пирамиды равнобедренный прямоугольный $\triangle ABC$ с катетами 1 и площадью $\frac{1}{2}$. Боковые грани SBC и SAC - равные прямоугольные треугольники с площадью 1 каждый. Третья боковая грань SAB пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием $AB=\sqrt{2}$ и высотой



$SK=\sqrt{(KC)^2+(SC)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. Следовательно, его площадь равна $\frac{3}{2}$.

Таким образом, $S_{полн}=4$, а так как объём пирамиды равен $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SC=\frac{1}{3}$, то находим величину радиуса шара, вписанного в пирамиду.

Ответ: $r=1/4$.

2007.6. Запишем ограничения на входящие в систему параметры (ОДЗ)

$$\begin{cases} x>0,\, x\neq 1,\, y>0, \\ ax+y>0. \end{cases}$$

По свойствам логарифмов исходная система примет следующий вид

$$\begin{cases} (y + ax)^2 = 2007, \\ xy = 2007. \end{cases}$$

С учетом ОДЗ, имеем систему

$$\begin{cases} y + ax = \sqrt{2007}, \\ xy = 2007. \end{cases}$$

Из неё получается квадратное уравнение $ax^2 - \sqrt{2007}\,x + 2007 = 0$.

Если $a = 0$, то $x = \sqrt{2007}$, $y = \sqrt{2007}$ - единственное решение системы.

Если $a \neq 0$, то получаем квадратное уравнение. В последнем случае получаем три варианта ответа в зависимости от значения дискриминанта $D = 2007 - 4a \cdot 2007$.

При $D < 0$ $\left(a > \frac{1}{4}\right)$ уравнение и система не имеют решений.

При $D > 0$ $\left(a < \frac{1}{4},\quad a \neq 0\right)$ уравнение и система имеют два решения.

При $D = 0$ $\left(a = {}^1\!/_4\right)$ уравнение и система имеет единственное решение $x = 2\sqrt{2007}$, $y = {}^{\sqrt{2007}}\!/_2$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \text{при} \quad a = 0 \quad x = \sqrt{2007},\ y = \sqrt{2007}; \\ \text{при} \quad a = {}^1\!/_4 \quad x = 2\sqrt{2007},\ y = {}^{\sqrt{2007}}\!/_2. \end{array}\right.$

2008.1. Во втором случае результаты опроса будут более точными, потому что в выборке равновероятно будут представлены представители всех возрастных групп, в том числе люди среднего и старшего поколения, которых интересует эффективность социальных выплат нынешним и будущим пенсионерам. В первом случае результаты опроса будут содержать систематическую ошибку, потому что в данное время в данном месте представители всех возрастных групп не будут представлены с равной вероятностью. Очевидно, что среди опрашиваемых будут преобладать студенты ОГУ, которые в силу своего возраста пока ещё не задумываются о пенсионной системе и её эффективности. Следует отметить, что даже увеличение объёма выборки на 200 человек не сделает результаты опроса на перекрёстке Ново-Спортивной улицы и Подушкинского шоссе (месторасположение Одинцовского гуманитарного института) более точными.

2008.2. а) Средняя выручка на одного продавца по холдингу ($X_{\text{сред.}}$) находится по формуле: $X_{\text{сред}} = \dfrac{\text{Общая выручка по холдингу}}{\text{Число продавцов холдинга}}$.

Чтобы найти число продавцов в каждом магазине, нужно общую выручку (w_i) от реализации в i -ом магазине разделить на выручку, приходящуюся на одного продавца (x_i), тогда :

число продавцов в магазине «Кит» равно $l_1 = \dfrac{w_1}{x_1} = \dfrac{840}{28} = 30$ чел.;

число продавцов в магазине «Два кита» равно $l_2 = \dfrac{w_2}{x_2} = \dfrac{900}{36} = 25$ чел.;

число продавцов в магазине «Три кита» равно $l_3 = \dfrac{w_3}{x_3} = \dfrac{500}{25} = 20$ чел.

Средняя выручка по холдингу на одного продавца находится по приведённой выше формуле, которая дает следующее числовое значение

$$X_{\text{сред}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} w_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{840+900+500}{30+25+20} = 29{,}87 \text{ руб.}$$

б) Средние затраты, приходящиеся на одного продавца, находятся по формуле: $X_{\text{сред}} = \dfrac{\text{Общие затраты холдинга}}{\text{Число продавцов холдинга}}$.

Обозначим теперь z_i - затраты, связанные с реализацией товаров, в расчёте на одного продавца в i-м магазине. Средние затраты на одного продавца находятся по формуле

$$X_{\text{сред}} = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_i \cdot l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{8\cdot 30 + 11\cdot 25 + 10\cdot 20}{30+25+20} = 9{,}53 \text{ руб.}$$

2008.3. Решить эту задачу можно сопоставлением затрат на производство с доходом.

а) Объём сырья на складе позволяет выпустить 500 единиц продукции $\left(100\,\text{кг} \Big/ 0{,}2\,\dfrac{\text{кг}}{\text{ед.}} = 500\,\text{ед.} \right)$.

Таким образом, общие затраты составят суммы, состоящие из

- затрат на сырье: $100\,\text{кг} \cdot 100\,\dfrac{\text{руб.}}{\text{кг}} = 10000\,\text{руб.}$;

- затрат на оплату труда: $500\,\text{ед.} \cdot 3\,\dfrac{\text{час.}}{\text{ед.}} \cdot 20\,\dfrac{\text{руб.}}{\text{час.}} = 30000\,\text{руб.}$;

- затрат на заработную плату администрации, аренду, обслуживание оборудования и пр.: 10000 руб.

Таким образом, общие затраты составят:

10000 + 30000 + 10000 = 50000 руб.

Общий доход от реализации составит $500\,\text{ед.}\cdot 120\dfrac{\text{руб.}}{\text{ед.}} = 60\,000\,\text{руб.}$

Прибыль от реализации 60000 руб. – 50000 руб. = 10000 руб.

б) дополнительный выпуск приведет к возрастанию затрат

- на материалы: $300\,\text{ед.}\cdot 0,2\dfrac{\text{кг}}{\text{ед.}}\cdot 120\dfrac{\text{руб.}}{\text{кг}} = 7\,200\,\text{руб.}$;

- на оплату труда: $300\,\text{ед.}\cdot 3\dfrac{\text{час.}}{\text{ед.}}\cdot 20\dfrac{\text{руб.}}{\text{час.}} = 18\,000\,\text{руб.}$

Общие издержки, таким образом, составят:

50000 + 7200 + 18000 = 75200 руб.

Общий доход вырос на $300\,\text{ед.}\cdot 110\,\text{руб.} = 33000\,\text{руб.}$ и составил

60000 + 33000 = 93000 руб.

Итоговая прибыль 93000 – 75200 = 17800 (руб.) оказывается больше, чем ранее полученная. Таким образом, несмотря на возросшие затраты на материалы, прибыль выросла, поскольку затраты на аренду, заработную плату администрации, обслуживание оборудования в расчете на единицу продукции сократились.

2008.4. Обозначим через b, q соответственно первый из рассматриваемых членов геометрической прогрессии и знаменатель этой прогрессии. Тогда для седьмого члена прогрессии имеем равенство $bq^6 = 2008^{1/13}$. Произведение 13 последовательных членов прогрессии можно записать следующим образом

$$b\cdot(bq)\cdot(bq^2)\cdot\ldots\cdot(bq^{12}) = b^{13}q^{1+2+\ldots+12} = b^{13}q^{6\cdot 13} = (bq^6)^{13} = 2008.$$

2008.5. Введём обозначение $t = \cos(ax)$. Тогда квадратное уравнение с параметром t примет вид $x^2 + 8x\cdot t + 16 = 0$. Решение квадратного уравнения существует, если дискриминант удовлетворяет условию $D = 64t^2 - 64 \geq 0$, или $|t| \geq 1$. С учётом свойств косинуса, получаем, что $t = \pm 1$.

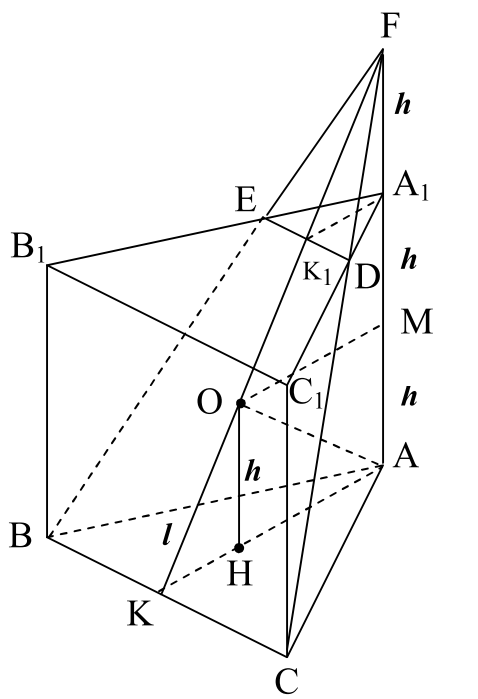
Таким образом, возможны два случая, для которых выписываются две системы уравнений (k – произвольное целое число):

$$\begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 0, \\ \cos(ax) = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ \cos(-4a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ при } a = -\frac{\pi k}{2} \text{ имеем } x = -4;$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 = 0, \\ \cos(ax) = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ \cos(4a) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ при } a = \frac{\pi(2k+1)}{4} \text{ имеем } x = 4.$$

При других значениях параметра a исходное уравнение решений не имеет.

2008.6. Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, со стороной основания a, вписанную в сферу с центром О радиуса R. Здесь $OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$. Медиана AK правильного треугольника ABC равна $\frac{a\sqrt{3}}{2} \overset{def}{=} m$.



Точка H - точка пересечения медиан их делит в отношении $2:1$, считая от вершины. Из прямоугольного треугольника AOH по теореме Пифагора получим

$$h^2 = R^2 - \left(\frac{2}{3}m\right)^2 = R^2 - \frac{a^2}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника KOH по теореме Пифагора получим

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Откуда следует, что $l = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Обозначим $\angle HKO \overset{def}{=} \alpha$ - общий угол подобных треугольников FKA и OKH. Тогда имеем пропорцию

$$\frac{OK}{KH} = \frac{FK}{KA} \Rightarrow \frac{l}{\frac{1}{3}m} = \frac{FK}{m} \Rightarrow FK = 3l.$$

Поэтому площадь треугольника FBC равна

$$S_{\Delta FBC} = \frac{1}{2}FK \cdot BC = \frac{1}{2}3l \cdot a = \frac{3a}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Далее, из треугольника KOH имеем $tg\,\alpha = \frac{h}{m/3}$. Кроме того $AM = MA_1 = h, \quad \angle MOF = \alpha$. Отсюда получим цепочку равенств

$$tg\,\alpha = \frac{FM}{OM} \Rightarrow FM = OM \cdot tg\,\alpha = \frac{2}{3}m \cdot \frac{h}{m/3} \Rightarrow FM = 2h, \quad A_1F = h.$$

Прямоугольные треугольники FK_1A_1 и OKH равны (по сторонам $FA_1 = h = OH$ и углам $\angle OKH = \alpha = \angle FK_1A_1$). Тогда $FK_1 = OK = l$. Треугольник FED подобен треугольнику FBC, поэтому

$$\frac{ED}{BC} = \frac{FK_1}{FK} \quad \text{или} \quad \frac{ED}{a} = \frac{l}{3l} \Rightarrow ED = \frac{a}{3}.$$

Площадь треугольника FED равна $S_{\Delta FED} = \frac{1}{2}FK_1 \cdot ED = \frac{1}{2}l \cdot \frac{a}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Тогда площадь сечения пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью FBC , проходящей через центр O сферы, описанной вокруг неё, вычисляется как разность

$$S_{сеч} = S_{BCDE} = S_{\Delta FBC} - S_{\Delta FDE} = \frac{3a}{2}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{6}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{4a}{3}\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

2009.1. Параметры равновесия на изолированных рынках двух стран в 2007 году можно найти, приравняв объёмы спроса и предложения.

В стране А: $Q_A^d = 100 - 0,25P = -10 + 0,25P = Q_A^s$. Равновесная цена $P_A = 220$ усл. ден. ед., равновесное количество товара $Q_A = 45$ тыс.шт.

В стране Б: $Q_Б^d = 297 - P = -50 + 0,2P = Q_Б^s$. Равновесная цена $P_Б = 289$ усл. ден. ед., равновесное количество товара $Q_Б = 8$ тыс.шт.

Можно предположить, что в условиях свободной торговли товар X будет импортироваться в страну Б из страны А, и постепенно произойдет выравнивание цен на рынках двух стран.

На объединенном рынке двух стран равновесие формируется в результате взаимодействия суммарного спроса и суммарного предложения.

Функция суммарного спроса будет иметь вид:

$$Q_{Общ}^d = \left(100 - 0,25P\right) + \left(297 - P\right) = 397 - 1,25P.$$

Аналогично функция суммарного предложения будет иметь вид:

$$Q_{Общ}^s = \left(-10 + 0,25P\right) + \left(-50 + 0,2P\right) = -60 + 0,45P.$$

Тогда равновесная цена объединенного рынка составит $P_{Общ}$ = 269 усл. ден. ед., объём продаж на едином рынке составит $Q_{Общ}$ = 61,05 тыс. шт. товара *X*.

2009.2. Определить оптимальное количество рабочих можно двумя способами:

1-й способ. Подсчитаем общую прибыль предпринимателя (см. таблицу).

Число рабочих (***чел.***)	Объём, выполненный каждым рабочим (***м^3***)	Общий объём работ (***м^3***)	Доход за выполненный объём работ (***тыс. руб.***)	Затраты на оплату труда рабочих (***тыс. руб.***)	Прибыль (***тыс. руб.***)

1	10	10	10	5	5
2	9	19	19	10	9
3	8	27	27	15	12
4	7	34	34	20	14
5	6	40	40	25	15
6	**5**	**45**	**45**	**30**	**15**
7	4	49	49	35	14
8	3	52	52	40	12
9	2	54	54	45	9
10	1	55	55	50	5

Из произведенных расчетов видно, что оптимальное число рабочих, при котором достигается максимум прибыли, равно 6.

2-й способ. Подсчитаем прибыль предпринимателя от найма каждого рабочего

Число рабочих (***чел.***)	Объём, выполненный i –м рабочим (***м***^{3})	Стоимость объёма работ, выполненного i –м рабочим (***тыс. руб***.)	Затраты на оплату труда i –го рабочего (***тыс. руб.***)	Прибыль от i –го рабочего (***тыс. руб.***)
1	10	10	5	5
2	9	9	5	4
3	8	8	5	3
4	7	7	5	2
5	6	6	5	1
6	**5**	**5**	**5**	**0**
7	4	4	5	-1
8	3	3	5	-2
9	2	2	5	-3
10	1	1	5	-4

И в данном случае из таблицы становится видно, что предпринимателю стоит остановиться на найме шести рабочих.

В курсе экономической теории данный процесс описывается законом убывающей предельной производительности, а правило максимизации прибыли гласит, что прибыль становится максимальной, когда стоимость предельного продукта (объёма выпуска продукции каждым новым работником) становится равна стоимости фактора производства (заработной плате рабочего).

2009.3. Введём обозначения:

P_0 - начальная цена на 1 января первого года,

P_{11} - цена на 1 декабря первого года,

P_{12} - цена на 1 января следующего года,

x - темп роста цены за декабрь первого года.

По условию задачи, имеем равенства: $P_{11} = P_0 \cdot 1,4;\quad P_{12} = P_0 \cdot \left(1 + x\right)$.

Отсюда получаем $P_{12} = P_{11} \cdot \dfrac{1+x}{1,4}$. Здесь $\dfrac{1+x}{1,4}$ - декабрьский темп роста цен. За 10 месяцев цена P_{12} вырастет вдвое, поэтому справедливо равенство

$$\left(\frac{1+x}{1,4}\right)^{10} = 2$$

Отсюда находим $x = \sqrt[10]{2} \cdot 1,4 - 1 \approx 0,5$. Таким образом, за первый год цены выросли на 50 %.

2009.4. *Решение 1.* Обозначим $x^2 - 5x - 9 = t$ и заданное уравнение заменим системой уравнений $\begin{cases} x^2 - 5x - 9 = t \\ \dfrac{t-x}{t+x} = \dfrac{x}{t-x} \end{cases}$. Из второго уравнения получаем $t^2 - 3tx = 0$. Отсюда получим два корня $t_1 = 0,\quad t_2 = 3x$.

Подставив значения t в первое уравнение системы, получим два квадратных уравнения, корнями которых являются следующие числа: $-1; \quad 9; \quad \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$.

Решение 2. Обозначим: $A = x^2 - 6x + 9, \quad B = x^2 - 4x + 9$

Тогда $x = (B - A)/2$, и исходное уравнение переписывается в виде

$$\frac{A}{B} = \frac{B - A}{2A} = \frac{1}{2}\frac{B}{A} - \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаются два значения дроби

$$\frac{A}{B} = -1, \qquad \frac{A}{B} = \frac{1}{2},$$

каждое из которых приводит к соответствующему квадратному уравнению, имеющих указанные в ответе корни.

2009.5. Объём полуцилиндра, полностью заполненного водой, вычислим по формуле $V_{\text{пц}} = S_{\text{пк}} \cdot l = \frac{\pi R^2}{2} \cdot l$. Здесь

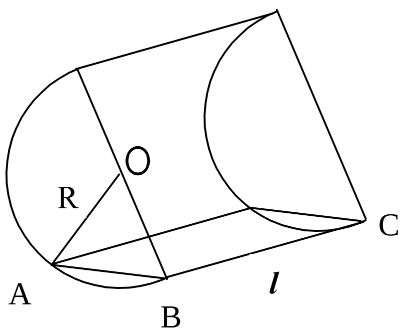
$V_{\text{пц}}$ - объём полуцилиндра;

R - радиус полукруга;

$S_{\text{пк}} = \frac{\pi R^2}{2}$ - площадь основания полуцилиндра (полукруга);

l - длина образующей полуцилиндра.

После того как полуцилиндр ***наклонили*** (а не приподняли) на 60°, часть воды выльется, и полуцилиндр примет следующее положение



Нижняя часть полуцилиндра заполнена водой (ниже горизонтальной плоскости ABC вдоль образующей длины l). Вычислим объём $V_{\text{ост}}$ оставшейся части воды

$$V_{\text{ост}} = S_{\text{сег}} \cdot l,$$

где $S_{\text{сег}}$ - площадь сегмента круга, ограниченного дугой $\overset{\frown}{AB}$ и хордой AB.

Площадь сегмента вычисляется по формуле

$$S_{\text{сег}} = S_{\text{сек(OAB)}} - S_{\Delta(OAB)} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right),$$

где $S_{\text{сек(OAB)}}$ - площадь сектора OAB, $S_{\Delta(OAB)}$ - площадь равностороннего треугольника OAB.

Объём оставшейся части воды равен

$$V_{\text{ост}} = S_{\text{сег}} \cdot l = \frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \cdot l .$$

Таким образом, процент вытекшей воды вычисляется следующим образом

$$\frac{V_{\text{пц}} - V_{\text{ост}}}{V_{\text{пц}}} \cdot 100\% = \frac{\frac{\pi R^2}{2} \cdot l - \frac{R^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \cdot l}{\frac{\pi R^2}{2} \cdot l} \cdot 100\% = \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi} \cdot 100\% .$$

Ответ: $\approx 94,2\%$

2009.6. Перенесём выражение $2\sqrt{2008}\,x$ в правую часть. После этого получим, что минимум квадратного трёхчлена в правой части, равен *1* при $x = \sqrt{2008}$. Обозначим $a + x = t$. Левую часть уравнения запишем следующим образом

$$\sin^4 t + \cos^4 t = 1 - 2\sin^2 t \cos^2 t =$$

$$= 1 - \frac{\sin^2 2t}{2} = 1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t \le 1$$

Отсюда следует, что решение уравнения возможно только при выполнении условий

$$\begin{cases} \cos\left[4\left(a+x\right)\right]=1 \\ x=\sqrt{2008} \end{cases}$$

Далее, относительно неизвестной a решается уравнение $\cos\left[4\left(a+\sqrt{2008}\right)\right]=1$.

Ответ. $x=\sqrt{2008}$ при $a=\frac{k\pi}{2}-\sqrt{2008}$ (k – произвольное целое). При других значениях параметра a уравнение решений не имеет.

Победители олимпиад

2005 год

№ п.п.	ФИО	Школа
1	Ручкин Дмитрий Андреевич	СОШ № 13
2	Панкратов Дмитрий Николаевич	Старогородковская СОШ
3	Вотин Валерий Валентинович	СОШ № 9
4	Бархатов Леонид Игоревич	Гимназия № 13
5	Водоватов Валентин Алексеевич	Лицей № 10
6	Телегкун Олег Васильевич	Гимназия № 4
7	Кулешов Никита Владимирович	Гимназия № 13

2006 год

№ п.п.	ФИО	**Школа**
1	Завражина* Нина Андреевна	СОШ им. А.С. Попова
2	Федоров* Сергей Александрович	СОШ им. А.С. Попова
3	Цикунова Наталия Викторовна	СОШ им. А.С. Попова
4	Джалилова* Екатерина Сергеевна	СОШ им. А.С. Попова
5	Горелова* Татьяна Олеговна	Гимназия № 4
* в настоящее время являются студентами ОГИ		

2007 год

№ п.п.	ФИО	**Школа**
1	Таланцев Артем Дмитриевич	Гимназия № 4
2	Наталичев Роман Владимирович	СОШ им. А.С. Попова
3	Ахметьев Иван Алексеевич	Гимназия № 4
4	Алексухин Андрей Михайлович	Гимназия № 4
5	Вахнин Дмитрий Анатольевич	Маловязёмская СОШ

2008 год

№ п.п.	ФИО	**Школа**
1	Козлов Павел Андреевич	Большевязёмская гимназия
2	Макаревич* Анастасия Сергеевна	Старогородковская СОШ
3	Шиманский* Георгий Юрьевич	Барвихинская СОШ
4	Богомольский* Семён Анатольевич	СОШ им. А.С. Попова
5	Закревская* Елизавета Александровна	Акуловская СОШ
* в настоящее время являются студентами ОГИ		

2009 год

№ п.п.	ФИО	**Школа**
1	Гридасова Анастасия Сергеевна	СОШ им. А.С. Попова
2	Белик Сергей Сергеевич	СОШ им. А.С. Попова
3	Гончарова Дарья Игоревна	СОШ им. А.С. Попова
4	Лымаренко Александр Эдуардович	Кубинская СОШ № 1
5	Кандауров Николай Александрович	СОШ им. А.С. Попова

Благодарности

Выражаем особую благодарность директору СОШ им. А.С. Попова, *Наталье Ивановне Шкиндер*, профессионалу и энтузиасту своего дела, любезно предоставившей площадку для курирования экономических классов преподавателями Одинцовского гуманитарного института. Выпускники этой школы традиционно являются самой многочисленной группой среди участников экономико-математических олимпиад ОГИ и призёров этих олимпиад. Как результат, поступление на факультет экономики и менеджмента в ОГИ для учеников СОШ им. А.С. Попова оказывается наиболее мотивированным и осознанным.

Также выражаем благодарность учителю математики *Шик Галине Яковлевне*, а также учителям экономики этой школы *Крутяковой Юлии Александровне*, преподавателю кафедры экономики ОГИ, и *Шевцову Андрею Витальевичу*, выпускнику ОГИ 2009 года, за подготовку учащихся школы к экономико-математическим олимпиадам.

Авторы искренне благодарят студентку ОГИ *Мельник Анну Анатольевну* за эскиз обложки, выполненной по мотивам одной из олимпиадных задач.