

УДК 531.36:534.1

© 2008 г. А. А. Буров

**О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ
ПО ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО АНАЛОГА
НЬЮТОНОВСКОГО ПРИТЯЖЕНИЯ**

Рассматривается задача о движении твердого тела, обладающего плоскостью симметрии, по поверхности трехмерной сферы под действием сферического аналога сил центрального притяжения. Обсуждаются подходы к введению сферических аналогов понятий центра масс и центра тяжести. Изучается сферический аналог т.н. “спутникового приближения” в задаче о движении твердого тела в центральном поле, возникающий в предположении о малости размеров тела по сравнению с расстоянием до притягивающего центра. В рамках спутникового приближения в предположении о плоском движении тела исследуется вопрос о существовании и устойчивости установившихся движений. Выводится сферический аналог уравнения плоских колебаний тела на эллиптической орбите.

Изучение механики систем, совершающих движение на поверхности сферы и псевдосферы, восходящее к исследованиям Лобачевского и Больяи, привлекало внимание многих исследователей. В частности, были изучены сферический и псевдосферический аналоги ряда классических задач механики точки, таких как задачи Кеплера и Бертрана, задачи двух притягивающих центров (см., например, обзор [1] с последующим дополнением [2], а также сборник [3]). В ходе современных исследований по динамике точки на сферических и псевдосферических поверхностях [4–8] были подтверждены основные классические результаты. В этих работах также было осуществлено явное интегрирование уравнений движения, сформулированы и обоснованы аналоги законов Кеплера. Помимо работ, собранных в известном обзоре [3], среди современных исследований выделим публикацию [8], в которой были введены переменные “действие – угол” для потенциалов, обеспечивающих решение задачи Бертрана, что позволило перейти к исследованию квантовых аналогов рассматриваемых задач. Также укажем на исследования, посвященные неинтегрируемости в ограниченной задаче двух тел [9] и квантованию в задаче двух тел [10, 11].

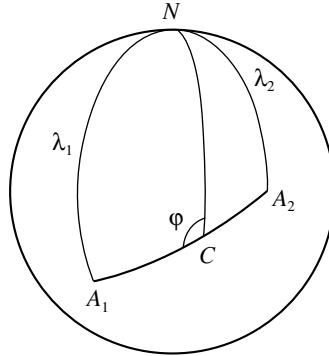
Исследования по динамике твердого тела в неевклидовых пространствах, восходящие, по всей видимости, к работам Киллинга и Жуковского [12, 13] с целью, прежде всего, вывода уравнений движения и корректного введения понятия центра масс, были продолжены [14–19] (см. также [20–22]). Исследовалось качественное поведение осесимметричного волчка [23]. Изучены существование, устойчивость и бифуркации стационарных движений гантелеобразного тела в центральном поле притяжения [24, 25].

1. Постановка задачи. Пусть в четырехмерное евклидово пространство R^4 с фиксированной в нем абсолютной системой координат $OX_1X_2X_3X_4$ стандартным образом вложена трехмерная сфера единичного радиуса с центром в начале координат – точке O , задаваемая уравнением

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1 \quad (1.1)$$

Помимо сферы (1.1) будем рассматривать ее плоское сечение – двумерную сферу, задаваемую соотношением

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1, \quad X_4 = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Пусть \mathcal{G} – твердое тело, вложенное в сферу (1.1). Так как эта сфера допускает группу изометрий, то тело \mathcal{G} может осуществлять в ней свободные вращения. Пусть C – точка, фиксированная в теле, $Sx_1x_2x_3x_4$ – связанная с телом правая ортогональная система координат, такая, что ось Sx_3 направлена от центра сферы по радиусу. Тогда оси Sx_1 , Sx_2 , Sx_3 располагаются в плоскости, касающейся сферы (1.1) в точке C . Для удобства можно также рассматривать связанную с телом систему координат $Ox_1x_2x_3x_4$, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Sx_1x_2x_3x_4$, а начало совпадает с центром сферы.

Предположим, что распределение масс тела допускает плоскость симметрии $x_4 = 0$. Это имеет место, например, в случае, когда все точки тела сосредоточены в указанной плоскости. Предположим, что в начальный момент времени плоскости $X_4 = 0$ и $x_4 = 0$ совпадают, и в начальный момент времени проекции векторов скоростей всех точек, образующих тело, на эту плоскость равны нулю. Тогда эти две плоскости совпадают во все время движения, а обозначенное \mathcal{G}_2 сечение тела плоскостью $x_4 = 0$ остается во все время движения на сфере (1.2). Такие движения составляют основной предмет настоящей заметки.

Сферическую пластинку \mathcal{G}_2 можно рассматривать как твердое тело, совершающее вращение вокруг точки O в плоском абсолютном пространстве R^3 , образованном осями $OX_1X_2X_3$. Массивные точки A_i ($i = 1, 2, \dots$), образующие пластинку, задаются своими проекциями $\mathbf{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ на оси связанной с телом системы координат $OX_1X_2X_3$, оставаясь стесненными единственным соотношением

$$r_{i1}^2 + r_{i2}^2 + r_{i3}^2 = 1$$

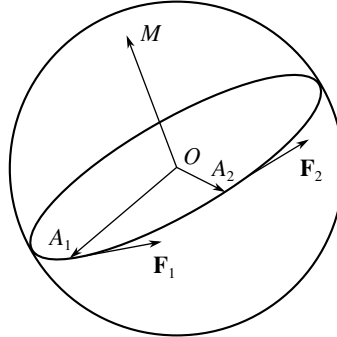
указывающим на то, что точки располагаются на сфере единичного радиуса.

Окажутся полезными сферические координаты

$$r_{1i} = \sin \lambda_i \cos \varphi_i, \quad r_{2i} = \sin \lambda_i \sin \varphi_i, \quad r_{3i} = \cos \lambda_i \quad (1.3)$$

введенные относительно осей $Ox_1x_2x_3$. Углы λ_i задают полярные радиусы точек, они равны угловому расстоянию между осью Sx_3 и вектором OA_i . Углы $\pi/2 - \lambda_i$ обычно именуют широтами. Полярные углы φ_i (долготы) задаются углами между плоскостями COX_1 и COA_i (фиг. 1).

2. Геометрическая статика. Понятие силы. Для формулировки основных положений сферической геометрической статики и их сопоставления с аналогичными положениями статики в случае плоского пространства полезно ввести сферический аналог



Фиг. 2

понятия силы и исследовать его свойства. Для удобства интерпретации остановимся на двумерном случае – в общем случае ситуация будет иметь сходный характер. Будем при этом активно использовать упомянутую выше аналогию задачи о движении тела по сфере и задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Пусть точка A из сферы (1.2) подвергнута некоторому (силовому) воздействию, понуждающему ее к изменению положения. С точки зрения указанной аналогии к твердому телу OA приложен момент \mathbf{M} , понуждающий его к вращению вокруг неподвижной точки O . Если момент \mathbf{M} перпендикулярен отрезку OA , то его можно представить в виде

$$\mathbf{M} = OA \times \mathbf{F} \tag{2.1}$$

где вектор \mathbf{F} естественно рассматривать как силу, приложенную к точке A . Рассматривая соотношение (2.1) как уравнение относительно вектора \mathbf{F} и принимая во внимание единичность радиуса сферы (1.2) и перпендикулярность векторов \mathbf{M} и OA , запишем решение этого уравнения как

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} \times OA \tag{2.2}$$

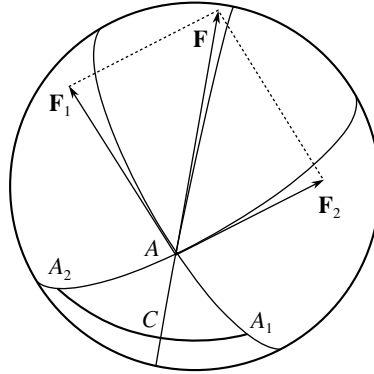
Определенная таким образом сила \mathbf{F} перпендикулярна как вектору \mathbf{M} , так и вектору OA и расположена в плоскости, касающейся сферы (1.2) в точке A .

Как известно, в механике плоского пространства сила рассматривается как скользящий вектор. На двумерной сфере ситуация аналогична: пользуясь понятием параллельного переноса вдоль кривой, будем переносить силу вдоль линии ее действия, определяемой ею как касательным вектором окружности большого круга. При таком способе переноса силы вектор момента \mathbf{M} из соотношения (2.1) остается неизменным (фиг. 2):

$$\mathbf{M} = OA_1 \times \mathbf{F}_1 = OA_2 \times \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}(A_i)$$

Здесь и далее аргумент в выражениях для сил означает точку их приложения.

Сложение сил. Пусть в точках A_1 и A_2 тела \mathcal{G}_2 приложены силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 . Так как на двумерной сфере пересекаются две любые окружности большого круга, то линии действия этих сил обязательно пересекаются (или совпадают). Случай совпадения прост: сложение этих сил сведется к их переносу в любую точку окружности – линии их действия – и дальнейшему сложению как векторов, расположенных на одной прямой. В случае пересечения линий действия сил осуществим перенос этих сил в любую из двух точек пересечения линий их действия. Затем эти силы, задающие теперь общую плос-



Фиг. 3

кость, складываются по правилу параллелограмма. Линия действия результирующей силы также проходит через указанные точки пересечения окружностей (фиг. 3).

Если α – угол между этими силами, приведенными к общей точке A , а f_1 и f_2 – их величины, то величина результирующей силы дается выражением

$$f = (f_1^2 + 2f_1f_2\cos\alpha + f_2^2)^{1/2} \quad (2.3)$$

При этом результирующая сила, приведенная к точке A , составляет с \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 углы α_1 и α_2 , такие, что

$$f_1 \sin\alpha_1 = f_2 \sin\alpha_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.4)$$

что получается, например, в результате применения теоремы синусов к любому из треугольников, составляющих на фиг. 3 параллелограмм сил.

Рассмотрим теперь с точки зрения геометрической статики сферический аналог правила рычага. Пусть к концам рычага – точкам A_1 и A_2 приложены силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 соответственно. Иными словами, эти силы порождают момент, вращающий твердое тело OA_1A_2 вокруг неподвижной точки O . Если A – одна из точек пересечения линий действия этих сил, то, приводя силы к этой точке, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = OA_1 \times \mathbf{F}_1(A_1) + OA_2 \times \mathbf{F}_2(A_2) = \\ &= OA \times \mathbf{F}_1(A) + OA \times \mathbf{F}_2(A) = OA \times \mathbf{F}(A) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(A) = \mathbf{F}_1(A) + \mathbf{F}_2(A)$$

Для того чтобы рычаг оставался в равновесии, надо на него подействовать силой – $\mathbf{F}(A)$, или, что то же самое, приложить к телу момент – \mathbf{M} .

Соотношение (2.4) естественно рассматривать как сферический аналог правила рычага. Точку C пересечения линии действия равнодействующей силы \mathbf{F} и рычага A_1A_2 , наделенную массой f , определяемой соотношением (2.4), естественно рассматривать как центр масс системы точек A_1 и A_2 массами f_1 и f_2 .

3. Аналитическая статика. Предположим, что в точке N на поверхности сферы (1.1) располагается притягивающий центр. Как известно, аналог потенциала ньютоновского притяжения для трехмерной сферы, определяемый из решения уравнения Лапласа–Бельтрами, пропорционален котангенсу угла между двумя взаимодействующими точ-

ками. Если в осях, связанных с телом, единичный вектор ON задается как $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, то потенциал взаимодействия записывается как

$$U = -G \sum_i \mu_i \frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_i}, \quad \mu_i > 0 \quad (3.1)$$

$$\cos \theta_i = \gamma_1 r_{1i} + \gamma_2 r_{2i} + \gamma_3 r_{3i}, \quad \sin \theta_i = (1 - \cos^2 \theta_i)^{1/2}$$

где G – произведение “гравитационной постоянной” и массы притягивающего центра.

Предположим, что тело мало по сравнению с радиусом сферы (1.1), т.е.

$$|r_{1i}| \ll 1, \quad |r_{2i}| \ll 1$$

и располагается вблизи точки C пересечения своей третьей осью инерции и поверхности сферы (1.2). Тогда, принимая во внимание соотношение

$$r_{3i} = (1 - r_{1i}^2 - r_{2i}^2)^{1/2}$$

запишем разложение потенциала по соответствующему малому параметру в виде

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots$$

$$U_0 = -GM \frac{\gamma_3}{(1 - \gamma_3^2)^{1/2}}, \quad M = \sum_i \mu_i$$

$$U_1 = -\frac{\Lambda_1 \gamma_1 + \Lambda_2 \gamma_2}{(1 - \gamma_3^2)^{3/2}}, \quad \Lambda_k = \sum_i \mu_i r_{ki}, \quad k = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$U_2 = -G \frac{\gamma_3 [(P_{11} + 2P_{12} + P_{22})(\gamma_3^2 - 1) + 3(P_{11}\gamma_1^2 + 2P_{12}\gamma_1\gamma_2 + P_{22}\gamma_2^2)]}{2(1 - \gamma_3^2)^{5/2}}$$

$$P_{kl} = \sum_{kl} \mu_i r_{ki} r_{li}, \quad k, l = 1, 2, 3$$

P_{kl} – компоненты тензора Пуансо. Будем впредь считать, что $P_{ij} = 0, i \neq j$, чего можно добиться надлежащим выбором связанной с телом системы координат. Заметим также, что

$$M = P_{11} + P_{22} + P_{33}$$

Если точка C выбрана таким образом, что

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0 \quad (3.3)$$

то разложение потенциала начинается с членов второго порядка малости. Иными словами, выбранную таким образом точку C естественно понимать как *центр тяжести* тела: в этом случае, если тело закреплено в точке C , то в первом приближении имеет место безразличное положение равновесия.

Пользуясь соотношением (3.3), попробуем найти сферический аналог архимедова правила рычага. Будем считать, что рычаг образован точками A_1 и A_2 , массами μ_1 и μ_2 , связанными отрезком большой дуги двумерной сферы. Воспользуемся соотношениями (1.3), в которых примем $\varphi = 0$. Тогда в силу первого соотношения (3.3)

$$\mu_1 \sin \lambda_1 = \mu_2 \sin \lambda_2 \quad (3.4)$$

а второе соотношение выполнено тождественно. Соотношение (3.4) выражает сферический аналог правила рычага и может быть рассмотрено как определение сферического аналога центра тяжести.

Замечание 1. Введенное таким образом понятие центра тяжести согласуется с понятием центра масс, введенным [21] на основании формальных математических аксиом (ср. с [26]):

- 1) центр масс одноточечной системы – сама эта точка;
- 2) центр масс центров масс двух систем материальных точек совпадает с центром масс объединения точек этих систем;
- 3) домножение всех масс системы материальных точек на одно и то же число не меняет положения центра масс, но влечет за собой домножение суммарной массы на то же число;
- 4) центр масс инвариантен относительно перемещений системы материальных точек как твердого целого;
- 5) положение центра масс непрерывно в естественной топологии системы материальных точек.

Этого нельзя сказать о введенном выше понятии центра масс, основанном на соображениях геометрической статики.

Для исследования существования и устойчивости равновесий рычага в случае, когда выполнено условие (3.4), воспользуемся, как обычно, углами Эйлера

$$\gamma_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta$$

В этих углах потенциал U_2 с точностью до не зависящей от угла φ аддитивной постоянной имеет вид

$$\begin{aligned} U_2 &= -G \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} (P_{11} \sin^2 \varphi + P_{22} \cos^2 \varphi) = \\ &= -G \frac{3 \cos \theta}{2 \sin^3 \theta} (\mu_1 \sin^2 \lambda_1 + \mu_2 \cos^2 \lambda_2) \sin^2 \varphi + \text{const} \end{aligned}$$

В этом случае имеются четыре равновесия, определяемые из уравнения

$$\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = -3G \sin \varphi \cos \varphi \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (\mu_1 \sin^2 \lambda_1 + \mu_2 \cos^2 \lambda_2) = 0$$

Это горизонтальные равновесия $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ и вертикальные равновесия $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$. Достаточные условия их устойчивости определяются неравенством

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial \varphi^2} = -3G (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} (\mu_1 \sin^2 \lambda_1 + \mu_2 \cos^2 \lambda_2) > 0$$

Видно, что оба вертикальных, равно как и оба горизонтальных равновесия обладают одним и тем же свойством устойчивости. Более того, если вертикальные равновесия устойчивы, то горизонтальные неустойчивы, и наоборот.

Примечательно, что в отличие от плоского случая условие устойчивости принципиально зависит от положения точки подвеса. Если точка подвеса расположена в “северном полушарии” (N – “северный полюс”), то вертикальные равновесия устойчивы, а горизонтальные – неустойчивы. Если точка подвеса располагается в южном полушарии, то, наоборот, горизонтальные равновесия устойчивы, а вертикальные – неустойчивы.

Если точка подвеса расположена на экваторе, то во втором приближении также имеется непрерывное семейство безразличных равновесий, и для исследования существования равновесий и их устойчивости приходится обращаться к слагаемым третьего порядка малости в разложении для потенциала.

Замечание 2. В прилежащей к экватору области, где величины r_{1i} , r_{2i} и γ_3 имеют одинаковый порядок малости, вместо разложения (3.2), вообще говоря, целесообразно пользоваться разложением по возникающему малому параметру, которое имеет вид

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = G(\gamma_1 \Lambda_1 + \gamma_2 \Lambda_2 + M \gamma_3), \quad U_2 = 0$$

$$U_3 = \frac{G}{2} \sum_i [-\gamma_3 (r_{1i} + r_{2i})^2 + (\gamma_1 r_{1i} + \gamma_2 r_{2i} + \gamma_3)^2]$$

В естественном случае ненулевой массы тела его движение определяется слагаемыми первого порядка малости.

В точной постановке в задаче в силу симметрии всегда имеются два вертикальных равновесия. Однако в отличие от плоского случая в рассматриваемой задаче существуют и семейства наклонных равновесий, “рождающиеся” из вертикальных при прохождении параметров задачи через критические значения. При этом, как обычно, происходит изменение свойств устойчивости вертикальных равновесий.

Замечание 3. В плоском пространстве понятие центра масс можно вводить не только из статических, но и из динамических соображений. На самом деле, центр масс – это единственная связанная с телом точка, движущаяся равномерно и прямолинейно при любом свободном движении тела. С другой стороны, центр масс – единственная точка твердого тела, принадлежащая любой оси его свободного перманентного вращения. В плоском пространстве оба эти понятия, равно как и “статически определенные” понятия центра масс, совпадают.

Однако перенесение основанных на динамических представлениях понятий о центре масс на случай сферы оказывается затруднительным. На самом деле, точки тела, равномерно движущейся при его свободном движении по окружности большого круга, просто не существует. В то же время имеются как минимум шесть принадлежащих телу точек, которые можно рассматривать как центры вращения тела с произвольной угловой скоростью.

4. Динамика. Рассмотрим динамику сферической пластинки как твердого тела, совершающего движение вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром сферы – точкой O . Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, \mathbf{I} – тензор инерции тела по отношению к неподвижной точке, его компоненты в главных осях таковы:

$$I_1 = \sum_i m_i (r_{2i}^2 + r_{3i}^2) = P_{22} + P_{33}, \tag{4.2}$$

Кинетическая энергия может быть выражена так же, как функция углов Эйлера и их производных по времени. В углах Эйлера координаты вектора угловой скорости имеют вид

$$\omega_1 = \psi \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega_2 = \psi \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega_3 = \psi \cos \theta + \dot{\varphi}$$

Угол ψ измеряется угловым расстоянием между осью OX_1 и линией пересечения плоскостей OX_1X_2 и Ox_1x_2 . При этом кинетическая энергия принимает вид

$$T = \frac{1}{2} (I_1 (\psi \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + I_2 (\psi \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)^2 + I_3 (\psi \cos \theta + \dot{\varphi})^2)$$

Движение пластинки можно описать с помощью уравнений Эйлера–Пуассона

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad L = T - U \tag{4.3}$$

или с помощью обычных уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad x \in \{\psi, \theta, \varphi\} \quad (4.4)$$

Уравнения (4.3), (4.4) помимо интеграла энергии

$$\mathcal{F}_0 = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega} \right) - L = \sum_{x \in \{\psi, \theta, \varphi\}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \dot{x} \right) - L = T + U = h \quad (4.5)$$

допускают интеграл площадей

$$\mathcal{F}_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\gamma} \right) = P_\psi \quad (4.6)$$

а уравнения (4.3) – и геометрический интеграл

$$\mathcal{F}_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \quad (4.7)$$

Для интегрирования уравнений движения в общем случае недостает одного дополнительного интеграла.

5. Спутниковое приближение. Рассмотрим движение тела в предположении малости его размеров по сравнению с радиусом сферы (1.2). Вновь будем считать, что тело располагается вблизи точки C пересечения своей третьей оси инерции и поверхности сферы (1.2), и эта точка – центр тяжести тела.

Представим уравнения (4.3) в виде

$$\begin{aligned} (M - P_{11})\dot{\omega}_1 &= (M - P_{11} - 2P_{22})\omega_2\omega_3 - GM \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_3^2} + \gamma_2 \frac{\partial U_2}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U_2}{\partial \gamma_2} \\ (M - P_{22})\dot{\omega}_2 &= -(M - P_{22} - 2P_{11})\omega_3\omega_1 + GM \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_3^2} + \gamma_3 \frac{\partial U_2}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U_2}{\partial \gamma_3} \\ (P_{11} + P_{22})\dot{\omega}_3 &= (P_{11} - P_{22})\omega_1\omega_2 - G \frac{3(P_{22} - P_{11})\gamma_1\gamma_2}{(1 - \gamma_3^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Так как в рассматриваемом приближении выполнены неравенства

$$P_{11} \ll M, \quad P_{22} \ll M \quad (5.2)$$

то систему (5.1) можно представить в виде (ср., например, [27])

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3 - G \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_3^2}, \quad \dot{\omega}_2 = -\omega_3\omega_1 + G \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_3^2}, \quad \dot{\omega}_3 = K\omega_1\omega_2 - G \frac{3K\gamma_1\gamma_2}{(1 - \gamma_3^2)^{5/2}} \quad (5.3)$$

$$K = \frac{P_{11} - P_{22}}{P_{11} + P_{22}}$$

Уравнения (5.3) надо дополнить уравнениями Пуассона.

Уравнения такого типа использовались ранее для описания ограниченных задач в механике твердого тела [27, 28]. Эти уравнения оказываются частично интегрируемыми, т.е. движение по отношению к некоторым степеням свободы может быть описано в явном виде. Однако в отличие от задач, рассмотренных в указанных публикациях, в

рассматриваемой задаче это обстоятельство не столь очевидно. Поэтому для интегрирования уравнений движения воспользуемся углами Эйлера.

Прежде всего обратим внимание на то, что выражение для кинетической энергии имеет вид

$$T = T_0 + T_2$$

$$T_0 = \frac{1}{2}M(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{1}{2}M(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\psi}^2)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}[P_{11}(\omega_3^2 - \omega_1^2) + P_{22}(\omega_3^2 - \omega_2^2)] = \\ &= \frac{1}{2}P_{11}((\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi)^2) + \\ &+ P_{22}((\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 - (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi)^2) \end{aligned}$$

Принимая во внимание соотношения (5.2) уравнения Лагранжа второго рода, можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \psi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sin^2 \theta \dot{\psi}) = 0 \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \sin \theta \cos \theta \dot{\psi}^2 - \frac{G}{\sin^2 \theta} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) = \\ &= K \left(-(\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi)(\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) + \frac{3G \cos \theta \sin \phi \cos \phi}{\sin^3 \theta} \right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Уравнения (5.4), (5.5) отделяются от уравнения (5.6). Они описывают движение центра тяжести тела – точки *C*. Соответствующие квадратуры известны (см., например [7]); в принятых обозначениях они получаются следующим образом. Из имеющего место в силу уравнения (5.4) первого интеграла

$$\sin^2 \theta \dot{\psi} = p_\psi \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\sin^2 \theta}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (5.5) позволяет представить последнее в виде

$$\ddot{\theta} = p_\psi^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} - \frac{G}{\sin^2 \theta} \tag{5.7}$$

Первый интеграл этого уравнения

$$\frac{1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right) - G \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = h \tag{5.8}$$

позволяет определить область изменения угла нутации θ :

$$\frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\sin^2 \theta} - G \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \leq h$$

Для интегрирования уравнения (5.7) при $p_\psi \neq 0$, как и в классической задаче Кеплера, осуществляется переход к новому времени, в качестве которого используется сферический аналог истинной аномалии – угол ψ . В явном виде решение представимо как (ср.[7])

$$\begin{aligned} \cos \theta &= EP^{-1/2}, \quad \sin \theta = pP^{-1/2}, \quad E = 1 + e \cos \psi, \quad P = p^2 + E^2 \\ p_\psi^2 &= Gp, \quad e^2 = 1 + (2p_\psi^2 H - p_\psi^4)/G^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

При этом справедливы соотношения

$$\psi = G^{1/2} p^{-3/2} P^{1/2}, \quad \dot{\theta} = G^{1/2} p^{-1/2} e \sin \psi \quad (5.10)$$

Введем в уравнении (5.6) истинную аномалию в качестве новой независимой переменной. Имеем

$$\begin{aligned} &\psi \frac{d}{d\psi} \left[\psi \left(\cos \theta + \frac{d\phi}{d\psi} \right) \right] = \\ &= -K(\psi \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi)(\psi \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) + GK \frac{3 \cos \theta \sin \phi \cos \phi}{\sin^3 \theta} \end{aligned}$$

Подстановка в данное уравнение выражений (5.9), (5.10) и последующее упрощение дает

$$\begin{aligned} &P \frac{d}{d\psi} \left(EP^{1/2} + P \frac{d\phi}{d\psi} \right) = \\ &= -Kp^2(P^{1/2} \sin \phi + e \sin \psi \cos \phi)(P^{1/2} \cos \phi - e \sin \psi \sin \phi) + 3KEP \sin \phi \cos \phi \end{aligned} \quad (5.11)$$

Имеем сферический аналог уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите [29].

В случае движения центра тяжести по круговой орбите эксцентриситет e обращается в нуль, и рассматриваемое уравнение принимает вид

$$(p^2 + 1) \frac{d^2 \phi}{d\psi^2} = K(3 - p^2) \sin \phi \cos \phi \quad (5.12)$$

Это уравнение вполне интегрируемо. Интеграл энергии имеет вид

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2}(p^2 + 1) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{K}{2}(3 - p^2) \sin^2 \phi$$

Замечание 3. С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, можно выписать сферический аналог уравнений пространственных движений спутника вокруг центра тяжести.

Замечание 4. Уравнения (5.11) – лагранжевы. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda(\phi, \psi, \theta, \phi, \psi, \theta, \phi) = L_2(\psi, \dot{\theta}, \phi, \psi, \theta, \phi) - U_2$$

где величины $\theta, \dot{\theta}, \psi$ заменены на функции истинной аномалии ψ согласно соотношениям (5.10), (5.11). Выполнение канонического преобразования позволяет выписать уравнения движения с помощью уравнений Гамильтона.

6. Относительные равновесия спутника на круговой орбите. Изучим особенности движения спутника вокруг центра масс, вращающегося по круговой орбите. Будем считать, что $K > 0$, т.е. спутник вытянут вдоль своей первой оси инерции. Согласно

уравнению (5.12) у спутника имеются две пары относительных равновесий: 1) “касательные”, на которых $\varphi = 0$ и $\varphi = p$; 2) “радиальные”, на которых $\varphi = \pm\pi/2$.

При выполнении условия

$$3 - p^2 > 0 \quad (6.1)$$

т.е. в случае малых и умеренных значений постоянной интеграла площадей радиальные относительные равновесия устойчивы, а касательные – неустойчивы.

При выполнении неравенства, противоположного (6.1), устойчивыми оказываются горизонтальные равновесия, в то время как вертикальные равновесия оказываются неустойчивыми. Последнее явление не наблюдается для спутников, совершающих движение в плоском пространстве.

Автор благодарит К. Пайфера, М. Раднович, М. Сальваи за помощь в составлении списка литературы.

Работа выполнена в рамках программы научного обмена между Российской и Польской академиями наук и поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (05-01-00454-а, 06-01-90505-БНТСа) и Программой поддержки ведущих научных школ (НШ 6667.2006.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dombrowski P., Zitterbarth J.* On the planetary motion in the 3-dimensional standard space M^3 of constant curvature $\kappa \in R$ // *Demonstratio Math.* 1991. V. 24. № 3–4. P. 375–458.
2. *Shchepetilov A.V.* Two-body quantum mechanical problem on spheres // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. V. 39. № 15. P. 4011–4046.
3. Классическая динамика в неевклидовых пространствах / Ред. А.В. Борисов, И.С. Мамаев. Москва; Ижевск: РХД, 2004. 348 с.
4. *Higgs P.W.* Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. // *J. Phys. A.* 1979. V. 12. № 3. P. 309–323.
5. *Sławianowski J.J.* Bertrand systems on $so(3, R)$ and $su(2)$ // *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Phys. et Astron.* 1980. V. 28. № 2. P. 83–94.
6. *Kozlov V.V., Harin A.O.* Kepler’s problem in constant curvature spaces // *Celest. Mech. and Dynam. Astron.* 1992. V. 54. № 4. P. 393–399.
7. *Козлов В.В.* О динамике в пространствах постоянной кривизны // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.* 1994. № 2. С. 28–35.
8. *Sławianowski J.J.* Bertrand systems on spaces of constant sectional curvature. The action – angle analysis // *Reports Math. Phys.* 2000. V. 46. № 3. P. 429–460.
9. *Maciejewski A.J., Przybylska M.* Non-integrability of restricted two-body problem in constant curvature spaces // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2003. V. 8. № 4. P. 413–430.
10. *Щепетилов А.В.* Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны. I. Связь гамильтониана с группой симметрий и редукция классической системы // *Теорет. и мат. физика.* 2000. Т. 124. № 2. С. 249–264.
11. *Степанова И.Э., Щепетилов А.В.* Задача двух тел на пространствах постоянной кривизны. II. Спектральные свойства гамильтониана // *Теорет. и мат. физика.* 2000. Т. 124. № 3. С. 481–489.
12. *Killing W.* Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen // *J. Reine Angew. Math.* 1885. Bd. 98. S. 1–48.
13. *Жуковский Н.Е.* О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // *Собр. соч. М.; Л.: ОНТИ. Глав. ред. авиац. лит.* 1937. Т., С. 490–539.
14. *de Donder Th.* Mouvement d’un solide dans un espace riemannien. 1 // *Bull. Acad. Roy. Belg.* 1942. V. 28. P. 8–16.

15. *de Donder Th.* Mouvement d'un solide dans un espace riemannien. 2 // Bull. Acad. Roy. Belg. 1942. V. 28. P. 60–66.
16. *de Donder Th.* Mouvement d'un solide dans un espace riemannien. 3 // Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe des Sciences). 1946. V. 32. P. 295–299.
17. *Стојановић Р.* Диференцијалне једначине кретања чврстог тела у тензорском облику // Весн. друштва мат. 1952. Т. 4. С. 43–49.
18. *Stojanović R.* Motion of a rigid body in two dimensional Riemannian space // Bull. Acad. Serbe Sci. Cl. Sci. Math. Nat. 1956. V. 10. № 2. P. 43–47.
19. *Stojanovic R.* Уопштенје појма момента вектора і примена на геометрију маса // Математички весн. 1966. № 3(18). С. 23–34.
20. *Zitterbarth J.* Some remarks on the motion of a rigid body in a space of constant curvature without external forces // Demonstratio Math. 1991. V. 24. № 3–4. P. 465–494.
21. *Galperin G.A.* A concept of the mass center of a system of material points in the constant curvature spaces // Commun Math. Phys. 1993. V. 154. № 1 P. 63–84.
22. *Salvai M.* On the dynamics of a rigid body in the hyperbolic space // J. Geometry and Physics. 2000. V. 36. № 1–2. P. 126–139.
23. *Burov A.A., Motte I., Stepanov S.Ya.* On motion of rigid bodies on a spherical surface // Regul. Chaotic Dynam. 1999. V. 4. № 3. P. 61–66.
24. *Burov A.A., Motte I., Sławianowski J.J., Stepanov S.Ya.* On stability and bifurcations of steady motions of a dumb-bell in a sphere // Четвертые Поляховские Чтения. СПб.: Изд-во ВВМ, 2006. С. 44–54.
25. *Буров А.А., Мотт И., Славяновский Я.Е., Степанов С.Я.* Устойчивость и бифуркации стационарных движений гантелеобразного тела на сфере // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 93–104.
26. *Балк М., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. М.: Наука. 1987. 160 с. (Библиотечка “Квант”. Вып. 61).
27. *Буров А.А.* Об “ограниченной” постановке задачи о движении тяжелого твердого тела // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 958–963.
28. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. II // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1986. № 1. С. 39–44.
29. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука. 1965. 416 с.