ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 69. Вып. 2, 2005

УДК 531.36

© 2005 г. А. А. Буров

О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗИ

Для задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки с ограничениями по углу между восходящей вертикалью и вектором, фиксированным в теле, рассматривается вопрос о существовании интегрируемых случаев типа случаев Эйлера и Лагранжа, а также частных интегралов типа Гесса–Аппельрота без дополнительных предположений, касающихся величины постоянной площадей.

Было показано [1, 2], что на нулевом уровне интеграла площадей задача о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии ограничения на изменение угла нутации сводится к задаче о движении точки в специальном сферическом биллиарде. Было установлено [1, 2], что при выполнении условий Ковалевской и Горячева–Чаплыгина обе задачи остаются интегрируемыми и при наложении такой связи.

1. Постановка задачи Рассмотрим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки *O*. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – вектор восходящей вертикали, $c = (c_1, c_2, c_3)$ – вектор, соединяющий неподвижную точку O и центр масс тела – точку C, m – масса тела, g – ускорение силы тяжести. Тогда, как обычно, уравнения движения в осях $Ox_1x_2x_3$, направленных по главным осям тензора инерции тела $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ относительно неподвижной точки, запишутся в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + mg\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{c}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

Эти уравнения допускают интеграл энергии

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + mg(\mathbf{c}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{1.2}$$

интеграл площадей

$$\mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{1.3}$$

и геометрический интеграл

$$\mathcal{T}_g = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{1.4}$$

2. Уравнения движения при соприкосновении со связью. Пусть $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор, фиксированный в теле. Наложим на систему связь

$$f = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) - \gamma_e \geq 0 \tag{2.1}$$

Физически это означает, что угол между восходящей вертикалью и вектором $\mathbf{e}$ не превосходит величины γ_e. Для реализации этой связи можно воспользоваться, например, тросом длины $\sqrt{2 - 2\gamma_e}$, соединяющим концы векторов $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Согласно общей теории движения твердых тел при наличии ударных взаимодействий [3] значения угловой скорости тела до ($\boldsymbol{\omega}$) и после ($\boldsymbol{\omega}'$) удара связаны соотношением

$$\mathrm{I}(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}) = R\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} \tag{2.2}$$

причем, так как удар предполагается абсолютно упругим, величина R находится из условия сохранения кинетической энергии (потенциальная энергия во время удара остается неизменной)

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \tag{2.3}$$

Утверждение 1. Величины

$$\mathcal{T}_e = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}), \quad \mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{2.4}$$

сохраняются во время удара.

Доказательство сводится к умножению левой и правой частей равенства (2.2) скалярно на векторы $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно.

Таким образом, в частности, проекция вектора кинетического момента на вертикаль сохраняется не только во время непрерывного движения, но и во время удара, т.е. во все время движения.

Определение реакции. Для определения реакции R домножим скалярно левую и правую части равенства (2.2) на $\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}'$. Имеем

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}') - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) = R(\mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}) = 0$$

Тогда, если $R \neq 0$, то

$$(\mathbf{f}, \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{2.5}$$

В момент выхода на связь $\mathbf{f} \neq 0$, иначе $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) = \pm 1$. Тогда, выражая из (2.2) величину $\boldsymbol{\omega}'$, имеем

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega} + R \cdot \mathbf{I}^{-1}\mathbf{f} \tag{2.6}$$

Подставляя это выражение в равенство (2.5), находим

$$R = -2\frac{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{f})}{(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{f}, \mathbf{f})} \tag{2.7}$$

3. Случаи существования дополнительных интегралов.

Случай Эйлера. Как известно, в случае Эйлера сохраняется квадрат вектора кинетического момента $\mathcal{T}_K = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$; умножая скалярно левую и правую части равенства (2.2) на $\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega})$, из условия сохранения квадрата вектора кинетического момента имеем

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}', \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}') - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = R(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega})) = 0$$

откуда следует, что

$$R = -2\frac{(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})}{(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})} \tag{3.1}$$

В общем случае правые части выражений (2.7) и (3.1) не совпадают, а значит, в общем случае для абсолютно упругих ударов квадрат вектора кинетического момента не сохраняется. Это означает отсутствие интегрируемого случая типа случая Эйлера.

Случай Лагранжа. В случае Лагранжа выполнены определенные условия существования дополнительного интеграла, например, $I_1 = I_2$ и $c_1 = c_2 = 0$. Тогда, если векторы **c** и **e** коллинеарны, то в силу соотношения (2.6)

$$\omega_3' = \omega_3$$

и все первые интегралы сохраняются и в случае наложения односторонней связи.

Случай Гесса–Аппельрота. Пусть для определенности $I_1 > I_2 > I_3$. Обозначим $\Delta_{ij} = \sqrt{I_i^{-1} - I_j^{-1}}$. Как известно, в случае движения без связи в этом случае при выполнении условий

$$\mathbf{a}_\varepsilon = (a_1, a_2, \varepsilon a_3):\ a_1 = \Delta_{21},\quad a_2 = 0,\quad a_3 = \Delta_{32},\quad \varepsilon = \pm 1 \tag{3.2}$$

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}_\varepsilon,\quad \lambda = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

существует частный интеграл, который имеет вид

$$F_\varepsilon = a_1 I_1 \omega_1 + \varepsilon a_3 I_3 \omega_3 = 0, \tag{3.4}$$

Тогда, в силу утверждения 1, если векторы **a** и **e** коллинеарны, частные интегралы F_ε существуют и для системы, стесненной неудерживающей связью (2.1).

Замечание. Приведенные выше результаты, касающиеся существования первых интегралов, остаются справедливыми и при наложении на систему двух связей вида

$$\gamma_e^- \le (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{e}) \le \gamma_e^+ \tag{3.5}$$

Физически это означает, что угол между восходящей вертикалью и вектором **e** заключен между углами $\arccos\gamma_e^+$ и $\arccos\gamma_e^-$. Для реализации этой связи можно воспользоваться, например, тросом длины $\sqrt{2 - 2\gamma_e^-}$, соединяющим концы векторов **e** и $\boldsymbol{\gamma}$, и другим тросом длины $\sqrt{2 - 2\gamma_e^+}$, соединяющим концы векторов **e** и $-\boldsymbol{\gamma}$.

4. Распространение результатов на случай тяжелого гиростата, вращающегося вокруг неподвижной точки. Полученные выше результаты, касающиеся интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела при наличии односторонней связи (2.1), распространяются и на случай, когда вместо тела рассматривается тяжелый гиростат, также совершающий вращение вокруг неподвижной точки.

В этом случае первое слагаемое в правой части уравнения движения принимает вид $(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) \times \boldsymbol{\omega}$, где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ – неизменный вектор гиростатического момента. Интеграл энергии и геометрический интеграл по-прежнему имеют вид (1.2) и (1.4) соответственно, а интеграл площадей записывается в виде

$$\mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{4.1}$$

Уравнения удара (2.2) остаются прежними, поэтому остается прежним и выражение (2.7) для величины R.

Утверждение 2. Величины

$$\mathcal{T}_e = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \mathbf{e}),\quad \mathcal{T}_\psi = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{4.2}$$

сохраняются во время удара.

Для доказательства представим соотношение (2.2) в виде

$$(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}' + \mathbf{k}) - (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) = R\mathbf{f}$$

Дальнейшие рассуждения сводятся к умножению левой и правой частей последнего равенства скалярно на векторы **e** и $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно.

Таким образом, в частности, проекция вектора полного кинетического момента на вертикаль сохраняется не только во время непрерывного движения, но и во время удара, т.е. во все время движения.

Рассуждения, подобные представленным выше, доказывают, что в случае уравновешенного гиростата дополнительный интеграл Вольтерры–Жуковского

$$\mathcal{T}_K = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})$$

при отображении (2.2), вообще говоря, не сохраняется. Однако сохраняется дополнительный интеграл $\omega_3' = \omega_3$, имеющий место при выполнении условий $I_1 = I_2$, $c_1 = c_2 = 0$, $\mathbf{k} = (0, 0, k_3)$ и коллинеарности векторов **c** и **e**. Сохраняется также интеграл Сретенского [4], аналогичный интегралу Гесса–Аппельрота, имеющий вид

$$F_\varepsilon = a_1 I_1 \omega_1 + \varepsilon a_3 I_3 \omega_3 + \delta = 0 \tag{4.3}$$

и существующий при выполнении условий (3.2), (3.3), а также

$$k_2 = 0, \quad \delta I_2 \Delta_{21} \Delta_{32} = \Delta_{32} k_1 - \varepsilon \Delta_{21} k_3 \tag{4.4}$$

последнее из которых определяет величину постоянной δ.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196), программы “Государственная поддержкак ведущих научные школ" (НШ 2000.2003.1) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлова Т.В.* Системы с упругими отражениями, допускающие полиномиальные интегралы третьей и четвертой степени // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 3. С. 69–71.
2. *Kozlova T.V.* Billiard systems with polynomial integrals of third and fourth degree // J. Phys. A: Math. Gen. 2001. V. 34. № 11. P. 2121–2124.
3. *Routh E.J.* Dynamics of a System of Rigid Bodies. L.: MacMillan, 1882 = *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
4. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1963. № 3. С. 60–71.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
10.VII.2003