

УДК 531.3

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ ОРБИТАЛЬНОЙ СТАНЦИИ В ОБЛАСТЯХ, ПРИЛЕГАЮЩИХ К ТРЕУГОЛЬНЫМ ТОЧКАМ ЛИБРАЦИИ

© 2007 г. А. А. Буров, И. И. Косенко

Представлено академиком В.В. Румянцевым 27.12.2006 г.

Поступило 24.01.2007 г.

Рассмотрим задачу о движении механической системы, состоящей из двух твердых тел E и L , совершающих движение под действием сил взаимного притяжения по круговым кеплеровским орбитам (рис. 1). Предполагается, что размеры тела L конечны, а тело S прикреплено к поверхности тела L в точках P_1 и P_2 парой невесомых нерастяжимых тросов длины l_1 и l_2 соответственно (ср. [1–4]). Будем считать, что масса тела S достаточно мала и оно не оказывает влияния на движение тел E и L .

Выберем систему координат Oxy , начало которой совпадает с центром масс системы, ось Ox направлена от тела E к телу L , перпендикулярная ей ось Oy расположена в плоскости орбиты. Эта система координат совершает равномерные вращения вокруг точки O . Если суммарную массу точек E и L и расстояние между ними положить равными единице, то точка E с координатами $(-\mu, 0)$ и точка L $(1 - \mu, 0)$ будут иметь массы $1 - \mu$ и μ соответственно. Угловую скорость равномерного вращения системы координат также положим равной единице. Обозначим (a_i, b_i) координаты точек P_i ($i = 1, 2$), координаты тела S обозначим (x, y) .

Тело S может находиться в равновесии относительно вращающейся системы под действием сил ньютоновского притяжения со стороны E и L , центробежной силы, а также сил натяжения тросов. Потенциал действующих на это тело ньютоновских и центробежных сил имеет вид

$$U = U_N + U_C, \tag{1}$$

где

$$U_N = -\left(\frac{1-\mu}{r_A} + \frac{\mu}{r_B}\right), \quad U_C = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$r_A = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_B = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

В силу нерастяжимости троса система стеснена связями

$$f_i = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - l_i^2 = 0. \tag{2}$$

Равновесные конфигурации системы определяются как критические точки функции Рауса

$$W = U + \frac{\lambda_1}{2}f_1 + \frac{\lambda_2}{2}f_2. \tag{3}$$

Уравнения для определения критических точек имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= -F_x + \lambda_1(x - a_1) + \lambda_2(x - a_2) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= -F_y + \lambda_1(y - b_1) + \lambda_2(y - b_2) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

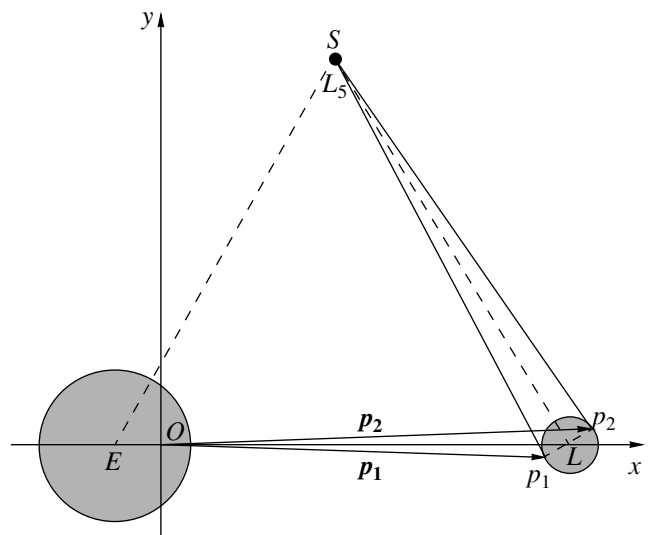


Рис. 1.

Вычислительный центр
Российской Академии наук, Москва
Постановка задачи и уравнения равновесия

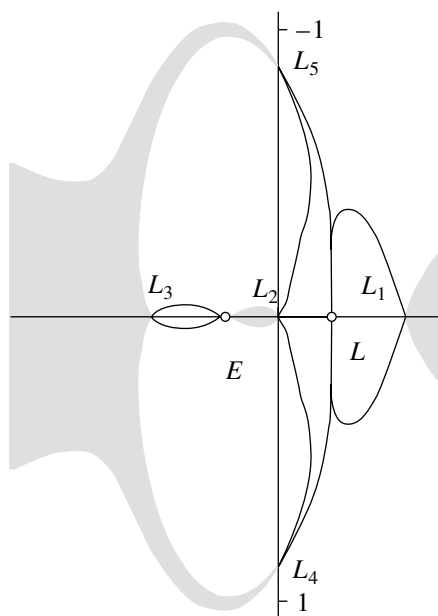


Рис. 2.

$$F_x = -\left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_a^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_b^3} - x\right),$$

$$F_y = -y\left(\frac{1-\mu}{r_a^3} + \frac{\mu}{r_b^3} - 1\right).$$

В рамках прямой задачи уравнения (4) совместно с уравнениями связей (2) составляют четыре уравнения относительно четырех неизвестных $x, y, \lambda_1, \lambda_2$.

Решим уравнения (4) относительно λ_1, λ_2 . Имеем

$$\lambda_1 = \frac{F_x(y-b_2) - F_y(x-a_2)}{\Delta} = \Lambda_1(x, y),$$

$$\lambda_2 = \frac{F_y(x-a_1) - F_x(y-b_1)}{\Delta} = \Lambda_2(x, y), \quad (5)$$

$$\Delta = (x-a_1)(y-b_2) - (y-b_1)(x-a_2).$$

Так как рассматриваются решения, на которых оба троса натянуты, то должны выполняться условия

$$\Lambda_1(x, y) > 0, \quad \Lambda_2(x, y) > 0. \quad (6)$$

Области, в которых выполнены условия (6), ограничены кривыми

$$\Gamma_i = \{(x, y): \Lambda_i(x, y) = 0, i = 1, 2\},$$

проходящими через все пять точек либрации ограниченной круговой задачи трех тел, в частности через треугольные точки либрации

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Касательные к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке либрации L_5 задаются уравнениями

$$\Gamma_1: \left(\mu^2 - \mu - \frac{1}{2}a_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}b_2 + \mu a_2\right)\left(x - \frac{1}{2} + \mu\right) + \left(\frac{1}{2}b_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 - b_2\mu\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, \quad (7)$$

$$\Gamma_2: \left(\mu + \frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}b_1 + \mu^2 - \mu a_1\right)\left(x - \frac{1}{2} + \mu\right) + \left(-\frac{1}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + b_1\mu\right)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

соответственно.

При $\mu = \frac{1}{2}$ кривые Γ_1 и Γ_2 изображены на рис. 2.

Эти кривые ограничивают заштрихованные области, в которых оба троса оказываются натянутыми. При малых значениях μ , соответствующих реальным ситуациям ($\mu = 0.00094$ для системы Юпитер–Солнце, $\mu = 0.01215$ для системы Земля–Луна), эти области в окрестности треугольных точек либрации становятся весьма узкими, что затрудняет их изображение. Однако они не пусты, что дает основание для рассмотрения вопроса об их эксплуатации.

УСЛОВИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ПОДВЕСА

Анализируя расположение на рис. 2 заштрихованной области одновременной выполнимости условий натяжения обоих тросов в окрестности точек L_4 и L_5 (для определенности мы и далее будем рассматривать точку L_5), нетрудно заключить, что наилучшим оказывается случай, когда угол между касательными, а вместе с ними и угол между нормальными к ним максимальны. Назовем его условием неколлинеарности. Выберем положения точек присоединения концов тросов к поверхности Луны так, чтобы это условие было выполнено. Если

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то нормали к касательным \mathbf{n}_i ($i = 1, 2$) допускают представление

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}b_2 + \mu a_2 - \mu + \mu^2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 - \mu b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0 \mathbf{p}_2 + \mu \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_2 + \mu \mathbf{b}_1 + \mu^2 \mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{n}_2 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}b_1 - \mu a_1 + \mu - \mu^2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 - \frac{1}{2}b_1 + \mu b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0 \mathbf{p}_1 + \mu \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_1 + \mu \mathbf{b}_1 + \mu^2 \mathbf{b}_2.$$

Условия неколлинеарности при помощи векторного произведения можно представить в виде

$$[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq 0. \quad (8)$$

Столбцы матрицы \mathbf{A}_0 линейно зависимы, и матрица допускает представление в виде

$$\mathbf{A}_0 = (\mathbf{e}, \alpha \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T, \quad \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Поэтому нормали к касательным (7) можно записать единообразно в форме

$$\mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = (a_i + \alpha b_i) \mathbf{e} + \mu \begin{pmatrix} a_i - 1 + \mu \\ -b_i \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$i = 1, 2.$$

Оставаясь в рамках выбранной системы масштабов размерных величин, обозначим символом $\varepsilon \ll 1$ радиус Луны. Эта величина (0.0045) имеет тот же порядок малости, что и μ . Тогда точки крепления тросов к ее поверхности будут иметь координаты

$$a_i = 1 - \mu + \varepsilon \alpha_i, \quad b_i = \varepsilon \beta_i, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где α_i, β_i – координаты точек крепления относительно проведенных через центр Луны системы осей, нормированные так, что выполняется тождество $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$. В этом случае выражение (9) преобразуется к виду

$$\mathbf{n}_i = \left(1 - \mu + \varepsilon \left(\alpha_i - \frac{\beta_i}{\sqrt{3}}\right)\right) \mathbf{e} + \mu \varepsilon \boldsymbol{\gamma}_i, \quad \boldsymbol{\gamma}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ -\beta_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2,$$

а векторное произведение из условия (8) записывается как

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] &= \left[\left(1 - \mu + \varepsilon \left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)\right) \mathbf{e} + \mu \varepsilon \boldsymbol{\gamma}_1, \right. \\ &\quad \left. \left(1 - \mu + \varepsilon \left(\alpha_2 - \frac{\beta_2}{\sqrt{3}}\right)\right) \mathbf{e} + \mu \varepsilon \boldsymbol{\gamma}_2 \right] = \\ &= \left(1 - \mu + \varepsilon \left(\alpha_1 - \frac{\beta_1}{\sqrt{3}}\right)\right) \mu \varepsilon [\mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma}_2] + \\ &+ \left(1 - \mu + \varepsilon \left(\alpha_2 - \frac{\beta_2}{\sqrt{3}}\right)\right) \mu \varepsilon [\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{e}] + \mu^2 \varepsilon^2 [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2] = \\ &= \mu \varepsilon [\mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma}_2 - \boldsymbol{\gamma}_1] + o(\mu \varepsilon). \end{aligned}$$

Символ $o(\mu \varepsilon)$ здесь обозначает все члены степени выше второй по обоим малым параметрам μ, ε . Таким образом, условие наилучшей реализуемости подвески тела S вблизи L_5 (и L_4) можно с точностью до малых более высокого порядка записать в виде

$$[\mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma}_2 - \boldsymbol{\gamma}_1] \neq 0$$

или в скалярном виде (поскольку векторное произведение перпендикулярно плоскости движения тел в рассматриваемой задаче)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1) \neq 0.$$

Поскольку слева в этом условии стоит скалярное произведение вектора $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ ($\mathbf{q}_i = (\alpha_i, \beta_i)^T, i = 1, 2$) и орта $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$, то эта величина будет достигать максимума в точности тогда, когда сомножители коллинеарны, а вектор $\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1$ имеет максимальную длину, равную диаметру Луны. В этом случае упомянутый диаметр должен быть перпендикулярным прямой LC .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 05-01-00454-а, 06-01-90505-БНТС-а, а также гранта Президента РФ “Ведущие научные школы” НШ-6667.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апрцутанов Ю.* В космос – на электровозе // Комсомольская правда. 31 июля 1961.
2. *Pearson J.* Lunar Anchored Satellite Test // AIAA Pap. 1978. № 78-1427.
3. *Белецкий В.В., Левин Е.М.* Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
4. *Pearson J., Levin E., Oldson J., Wykes H.* The Lunar Space Elevator. Intern. Astronaut. Congr. 4-8 October 2004, Vancouver, 2004. IAC 04 – IAA 3.8.3.07.