

УДК 531.38

©2007. Д.Л. Абраров

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЧКА ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ИХ ОБРАТИМОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

Показывается, что в случае Эйлера решение уравнений Эйлера-Пуассона представляется нормированной экспонентой от ζ -функции эллиптической кривой специального вида над полем рациональных чисел Q . Данная функция представляет специализацию общего решения общих уравнений Эйлера-Пуассона в экспонентах от L -функций эллиптических кривых над Q , полученного в [1]. Проводится сопоставление полученного решения с классическим решением.

1. Введение. Целью данной работы является демонстрация общего решения уравнений Эйлера-Пуассона в экспонентах от L -функций эллиптических кривых, полученного в [1], на примере волчка Эйлера. Разъясняется аналитический, геометрический и механический смысл указанной специализации. При этом соответствующие вычисления проводятся независимо от вычислений работы [1] и более детально, что позволяет конкретизировать вид спектральной кривой для случая Эйлера из [1]. Применяемая техника наряду со случаем Эйлера может быть использована и для других известных случаев интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона.

В случае Эйлера механическая система имеет три существенных параметра - главные моменты инерции тела.

Уравнения движения тела в этом случае имеют вид:

$$\frac{dM}{dt} = [M, \omega] \quad (1)$$

где $t \in R$ - вещественное время, M - вектор кинетического момента твердого тела, ω - вектор угловой скорости тела, $[\cdot, \cdot]$ - оператор векторного произведения в евклидовом пространстве E^3 . При этом $M = I \cdot \omega$; оператор I представлен диагональными матрицами размера 3×3 с положительными вещественными элементами, удовлетворяющими неравенству треугольника.

2. Эквивариантное уточнение классических квадратур для волчка Эйлера. Уточнение состоит в учете того обстоятельства, что квадратура, возникающая в результате классического вычисления, имеет ветвление

Автор благодарит В.В. Козлова и С.Я. Степанова за полезные обсуждения и особо признателен А.М. Ковалеву за поддержку.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №08-01-00600, №07-01-00295.

в сочетании с "более широкой областью определения" аргумента квадратуры, включающей бесконечно удаленную точку. Все эти эффекты являются проявлением свойства обратимости по времени исходных уравнений.

Аналитический аспект уточнения квадратур. Важно, что в итоге удается явно вычислить обращение уточненной квадратуры в виде дзета-функции некоторой эллиптической кривой, являющейся эквивариантной специализацией классической дзета-функции Римана. После этого проводится сопоставление этого результата с известным обращением классических квадратур.

Уравнение (1) приводится к виду на компоненты вектора ω (см.[2]):

$$\frac{du}{dt} \pm n\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} = 0 \quad (2)$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения, зачастую приводимого в соответствующей литературе, знаком: вместо знака "+" здесь фигурирует знак \pm . Вместе с тем, в ряде руководств, например в [2] и [3], имеется анализ выбора знаков. Впрочем, предлагаемый в них алгоритм выбора знаков у переменных p, q, r ограничивает комбинаторику их выбора, поскольку не полностью учитывает симметризирующее действие отображения $Z_2[t \rightarrow -t]$ обратимости по времени на фазовом пространстве исходного уравнения движения (1), допускающее произвольный выбор знаков. Действительно, меняя знак времени в любом скалярном уравнении векторного уравнения (1), можно получить любую формально возможную комбинацию знаков переменных в этом уравнении. Теперь остается заметить, что такая смена знака времени в любом из скалярных уравнений не меняет самих уравнений (1) в силу их обратимости по времени. Собственно говоря, эта симметризационная процедура и делается при получении дополнительного интеграла уравнений (1).

И именно это, на первый взгляд, незначительное обстоятельство неполноты алгоритма определения знаков приводит к совершенно иной аналитической структуре окончательного ответа.

Теперь из уравнения (2) получаем уточненную классическую квадратуру

$$n(t - t_0) = \pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (3)$$

где t_0 - момент времени, когда $u = q = 0$, и где знак \pm должен быть дополнительно согласован с фазовым потоком исходных уравнений (1) с учетом их обратимости по времени, что и составляет содержание данной работы.

3. Соотношение результатов обращений классической квадратуры и ее эквивариантного уточнения. Только после специального функционального преобразования, индуцированного отображением $Z_2[t \rightarrow -t]$, эллиптические тета-функции Якоби, представляющие результат классического

обращения (см. [2],[3]), становятся эквивариантными координатами в полном фазовом пространстве волчка Эйлера.

Результатом подправленного обращения оказывается специальная функция $\exp(\zeta_{eq}(s)) = \exp(\zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0))$ комплексного аргумента s , имеющая смысл эквивариантной специализации ζ -функции Римана.

Аналитическая структура доработки обращения, составляющая техническое содержание данной работы, эквивалентна эквивариантной специализации известной формулы для дзета-функции Римана (см. [5]):

$$\zeta_{eq}(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} + \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\theta_0(x)dx \otimes_R E/Q,\right.$$

где функция $\theta_0(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$ имеет смысл потенциала фазового потока на свободном двояко-асимптотическом движении волчка Эйлера, E/Q - эллиптическая кривая, задаваемая уравнением $y^2 = x^3 + px + q$, где p, q - любые не совпадающие простые числа, имеющая смысл уравнения свободного двояко-асимптотического движения; $dx \otimes_R E/Q$ - эквивариантная мера.

Выражение $(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})$ имеет смысл эквивариантного "непрерывного" знака $\pm(\text{mod } Z_2[t \rightarrow -t])$ в уточненной классической квадратуре и также имеет смысл эквивариантной склейки свободных двояко-асимптотических движений изо всех компонент гладкости сепаратрисы в точке $t = \infty$.

Таким образом, функцию $\exp(\zeta_{eq}(s))$ можно определить как решение уравнения (1) в духе определения многих известных специальных функций.

Соотношение классического решения и его эквивариантного уточнения с механической точки зрения. Классическое решение без знаков перед квадратурой (3) можно интерпретировать как некоторую естественную проекцию реального движения волчка Эйлера. Геометрически это решение представляется качением только верхней сферы со вписанным в нее тетраэдром (см. рис.2 ниже) и реализует классическую интерпретацию Пуансо. Соответствующее движение волчка не является $\gamma - \omega$ монодромным.

Классическому решению (3) с частичным учетом знаков (по [2],[3]) и дополнительной нормировкой начальных условий на относительное равновесие, реализуемое вращением вокруг средней оси эллипсоида инерции, соответствует "маятниковое" вращение волчка: вектор его кинетического момента совершает маятниковые колебания в E^3 . Это движение - точный аналог "маятникового" режима движения математического маятника и имеет смысл движения с относительно небольшим запасом полной энергии.

Геометрически классическое решение "с частичным" учетом знаков представляется зеркально симметричным качением верхней и нижней сфер со вписанным в них тетраэдром (см. рис.2). Это движение, еще не являясь $\gamma - \omega$ монодромным, представляет "удвоение" интерпретации Пуансо.

Уточненному решению - классическому решению с полным учетом знаков и дополнительной нормировкой начальных условий на указанное выше неустойчивое относительное равновесие волчка - соответствует "ротационное" вращение вектора кинетического момента волчка. Это движение - точный аналог "ротационного" режима движения математического маятника. Такое движение имеет достаточно большой запас полной энергии.

Также это движение уже соответствует $\gamma - \omega$ монодромному качению сфер, изображенному на рис.2, и представляет эквивариантно продолженное в точку $t = \infty$ зеркально симметричное "удвоение" интерпретации Пуансо.

Таким образом, генератором как маятникового, так и ротационного режимов движения волчка Эйлера является его специальное резонансное движение - вращение вокруг средней оси эллипсоида инерции - точный аналог вертикального положения равновесия математического маятника. Данное движение является относительным неустойчивым равновесием волчка Эйлера со свободной в E^3 указанной осью вращения. Свобода оси вращения соответствует тому, что центр тяжести волчка находится в точке его закрепления.

Канонической координатой на пространстве всех движений волчка как пространстве колебаний вокруг средней оси эллипсоида инерции и является функция $\exp(\zeta_{eq}(s))$, где s можно интерпретировать как каноническую координату на сфере Пуассона. Точная аналогия с математическим маятником здесь состоит в том, что все пространство движений маятника в точности реализуется пространством его выходов из верхнего положения равновесия.

Геометрическая интерпретация соотношения результатов обращений классической квадратуры и ее эквивариантного уточнения. Приведем теперь в сопоставлении графики результатов обращения классической квадратуры и ее эквивариантного уточнения. Данные графики можно рассматривать как геометрические интерпретации орбиты рассматриваемого отображения бимонодромии тетраэдра, вписанного в сферу Пуассона. Данное отображение определено в эквивариантной гиперплоскости универсального фазового пространства $CP^3((\omega, \gamma))$ уравнений (1), где $\omega, \gamma \in C^3$, - двумерном проективном комплексном пространстве $CP^2 \cong CP^3((\omega, \gamma)/\{[\omega, \gamma] = 0\})$ (соотношение $[\omega, \gamma] = 0$ выделяет рассматриваемое бимонодромное движение тетраэдра и выполняется на сепаратрисе волчка Эйлера). Тем не менее, это отображение можно реализовать и в евклидовом пространстве E^3 , так как оно, благодаря симметрии $Z_2[t \rightarrow -t]$, имеет скрытую динамическую структуру над C , согласующую проективную (эллиптическую), евклидову (плоскую) и симплектическую (гиперболическую) структуры. Это эквивариантная зеркальная симметрия "проективная-симплектическая геометрия" относительно "евклидова зеркала".

Тэта-функция $\theta_0(x)$ координатизирует линейчатую гиперповерхность

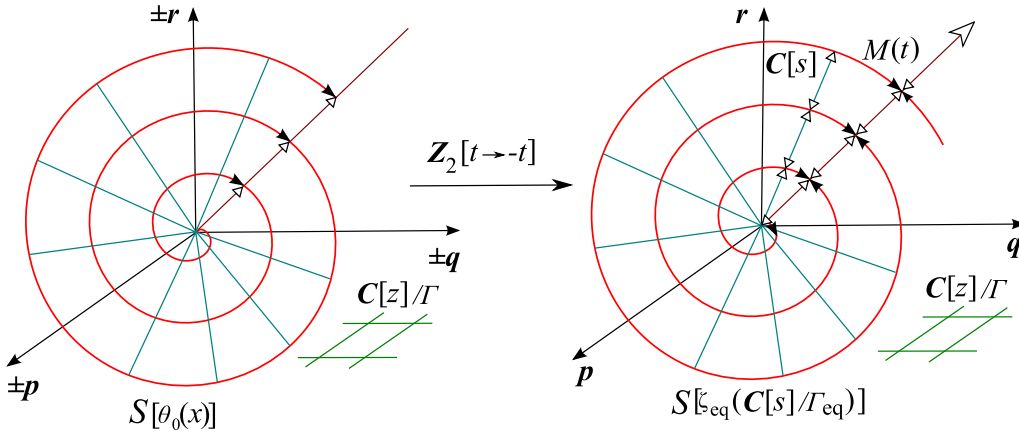


Рис. 1.

$S[\theta_0(x)]$ в CP^2 , схематически представленную в левой части рис.1 и имеющей вид динамической развертки конической поверхности в пространстве E^3 .

Эту поверхность можно рассматривать как одну из карт на орбите отображения непрерывного отображения точного центрально-подобного вращения в пространстве E^3 , являющимся динамическим отображением в E^3 . Это отображение также эквивалентно отображению непрерывной центральной симметрии в E^3 и отображению непрерывной симметризованной обкатки в E^3 одним конусом другого - см. коническую интерпретацию движения волчка Эйлера в [6]), потенциалом которых как раз и является функция $\zeta_{eq}(s)$.

При этом вектор кинетического момента $M(t)$ является касательным вектором к поверхности $S[\zeta_{eq}(s)]$ и касание происходит вдоль ее образующих (с координатой t) как указано на рис.1 Поверхность $S[\zeta_{eq}(s)]$ является эквивариантным уточнением лиувиллевых торов, организованных в блоки, а поверхность $S[\exp(\zeta_{eq}(s))]$ - эквивариантным уточнением фазового потока в этих блоках.

Соотношение классических эллиптических кривых над C и их эквивариантного уточнения - эллиптических кривых над Q . С классической квадратурой ассоциирована эллиптическая кривая, задаваемая уравнением $y^2 = x^3 + ax + b$ в аффинных координатах $x, y \in C$, где коэффициенты $a, b \in R$. Топологически данная кривая представляется фактором $E_C \cong C/\Gamma$ и изоморфна тору $S^1 \times S^1$, что также отражается теоремой Лиувилля-Арнольда.

Кривой, ассоциированной с уточненной квадратурой, оказывается эллиптическая кривая E/Q , нормальная форма которой имеет такое же аффинное уравнение, но коэффициенты задающего ее уравнения более специальные. Связь между циклами кривых E_C и E/Q представлена на рис.2.

Как показано на рис.2 кривая E/Q топологически представляется непре-

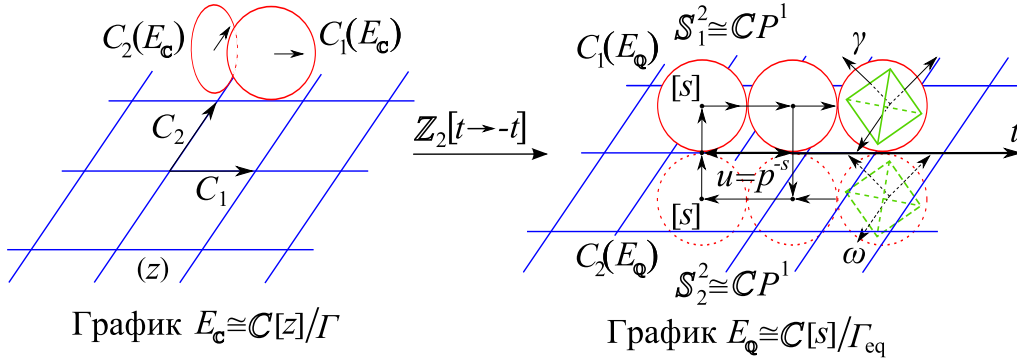


Рис. 2.

рывным качением двух зеркально симметричных относительно плоскости C сфер S_1^2 и S_2^2 по решетке Γ , согласованным с зеркальной симметрией вписанных в них тетраэдров. Орбиты такого качения сфер реализуют циклы $c_1(E/Q), c_2(E/Q)$ кривой $E/Q \cong C[s]/\Gamma_{eq}$ (γ -цикл и ω -цикл). Рис.2 отражает как глобальную геометрию переменных γ и ω , так и геометрию их численной координатизации, производимой ниже в леммах 1-14 (см. также изображение величины p^{-s} на нем). Важно отметить, что рис.2 можно интерпретировать как качение без проскальзывания сферы S^2 по плоскости, обладающее групповым свойством как по конфигурационным переменным γ , так и по угловым скоростям ω . Это и есть эквивариантное уточнение интерпретации Пуансо.

4. Решение уравнений волчка Эйлера в сопоставлении с решением уравнений общего волчка. Эквивариантная склейка ветвей квадратичности (3) посредством отображения инволюции обратимости по времени приводит к следующей структуре пространства решений в случае Эйлера.

Теорема 1. 1. *Общее решение дифференциальных уравнений (1) волчка Эйлера, описывающих динамику вектора $\mathbf{M}(s)$, $s \in C$ кинетического момента тела, представляется функцией*

$$\mathbf{M}(s) = \exp(\zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0)),$$

где E/Q – полустабильная эллиптическая кривая E/Q над полем рациональных чисел Q , задаваемая уравнением в аффинной форме

$$y^2 = x^3 + px + q,$$

где p, q – различные простые числа, функция $\zeta(s, E/Q)$ является ζ -функцией эллиптической кривой E/Q .

2. *Зависимости $\mathbf{M}(s)$, $\gamma(t)$, $\omega(t)$ имеют структуру векторно-значных функций соответствующих аргументов s, t с числом компонент, равным трем.*

3. Зависимости переменных $\gamma(t)$ и $\omega(t)$ от вещественного времени t имеют следующий вид:

$$\gamma(t, t_0) = \operatorname{Re}(\zeta(s, E/Q)\zeta_0(s, E/Q)),$$

$$\omega(t, t_0) = \operatorname{Im}(\zeta(s, E/Q)\zeta_0(s, E/Q)),$$

где $\zeta_0(s, E/Q) = ((\zeta(s_1, E/Q) = 0), (\zeta(s_2, E/Q) = 0), (\zeta(s_3, E/Q) = 0))$ - вектор, состоящий из трех последовательных нулей функции $\zeta(s, E/Q)$; $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ - вещественная и мнимая части соответствующих комплексно-значных функций.

4. Каждый вектор начальных условий, отвечающий общему решению, определяется следующим образом:

$$\gamma(t_0) = \operatorname{Re}\{\zeta((s_1, (E/Q) = 0), \zeta((s_2, (E/Q) = 0), \zeta((s_3, (E/Q) = 0)\},$$

$$\omega(t_0) = \operatorname{Im}\{\zeta((s_1, (E/Q) = 0), \zeta((s_2, (E/Q) = 0), \zeta((s_3, (E/Q) = 0)\},$$

где s_1, s_2, s_3 - нетривиальные нули функции $\zeta(s, E/Q)$ (т.е нули с ненулевой мнимой частью), последовательные по абсолютной величине.

5. Каждый вектор начальных условий, отвечающий классическому решению, структурно определяется также, как и выше в п.4, но при этом значения s_1, s_2, s_3 аргумента s являются последовательными по абсолютной величине уже тривиальными нулями функции $\zeta(s, E/Q)$, т.е последовательными нулями с нулевой мнимой частью.

6. Множество начальных условий для классического решения является подбикомплексом в бикомплексе начальных условий, соответствующих общему решению (бикомплекс - комплекс с Z_2 -градуированным дифференциалом, определение комплекса см. в [7]).

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. В данном утверждении представлена зависимость $\mathbf{M}(s)$ от переменной $s = t/Z_2[t \rightarrow -t]$, имеющей смысл обратимого времени исходных уравнений, а также зависимости $\gamma(t)$ и $\omega(t)$ от вещественного времени t .

2. Структурное отличие формулы для решения случая Эйлера по сравнению с формулой для общего решения уравнений Эйлера-Пуассона из [1] состоит в наличии нормировочного множителя $\{\zeta(s, E/Q) = 0\}$ в показателе экспоненты. Данный множитель представляет все множество начальных условий исходной задачи, инвариантных относительно инволюции $Z_2[t \rightarrow -t]$ (лемма 14), и его наличие отражает тот факт, что исходные дифференциальные уравнения являются корректной задачей Коши. В связи с этим, естественно дополнить и формулу общего решения из [1], добавив в нее нормировочный множитель такого же типа. Отметим, что это дополнение не отражается на доказательстве, поскольку соответствующая нормировка является его ключевой конструкцией.

Приведем соответствующее нормировочное дополнение общего решения уравнений Эйлера-Пуассона.

Теорема 2. *Универсальное пространство решений общих уравнений Эйлера-Пуассона, описывающих динамику вектора $\mathbf{M}(s)$, $s \in \mathcal{C}$ кинетического момента тела, представляется следующими функциями:*

$$\mathbf{M}(s) = \exp(L(s, \{E/Q\})(L(s, E/Q) = 0)),$$

где $\{E/Q\}$ – множество эллиптических кривых E/Q над полем рациональных чисел Q , функции $L(s, E/Q)$ являются L -функциями эллиптических кривых E/Q (см. [4]), а выражения $\{L(s, E/Q) = 0\}$ имеют структуру векторов с шестью компонентами и представляют все множество начальных условий общих уравнений Эйлера-Пуассона.

5. Определения объектов, входящих в формулировки утверждений. Приведем краткую сводку определений объектов, которые используются в данной работе и связаны с кривыми E/Q , опирающуюся на руководство [4] и цитируемую там литературу.

Эллиптические кривые над Q и их основные характеристики. Эллиптическая кривая E/Q задается уравнением в аффинной форме:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in Q$.

Дискриминант эллиптической кривой E/Q имеет следующий вид

$$\Delta = 9b_2b_4b_6 - b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2$$

Формулы выражающие a_i через b_j см. в [4].

Если минимальное уравнение эллиптической кривой E/Q при редукции по простому модулю p - опять гладкая кубическая кривая (гладкость эллиптической кривой означает, что ее дискриминант $\Delta(E/Q)$ не равен нулю), то этом случае говорят, что кривая E/Q имеет в p хорошую редукцию, а такое p называется "хорошим p ".

Если минимальное уравнение эллиптической кривой E/Q при редукции по простому модулю p - сингулярная кривая, то в этом случае говорят, что кривая E/Q имеет в p плохую редукцию, а такое p называется "плохим p ".

Такие "плохие" простые числа p в точности являются простыми делителями дискриминанта $\Delta(E/Q)$ эллиптической кривой E/Q .

Кривая E/Q при плохой редукции в p допускает единственную сингулярную точку с координатами в F_p . Всегда можно сделать такую линейную замену координат, что точка с координатами $(0, 0)$ становится такой сингулярной точкой при редукции кривой E/Q по модулю всех "плохих p ".

Такая замена не меняет соответствующего уравнения и приводит к равенству $a_3, a_4, a_6 = 0 \pmod{p}$ для всех "плохих p ".

Если при этом касательные к кривой E/Q в точке $(0, 0)$ совпадают, то имеет место сравнение $x^2 + a_1x - a_2 = 0 \pmod{p}$.

Полустабильные эллиптические кривые над Q . Эллиптическая кривая E/Q называется полустабильной в простом p , если либо p - хорошее, либо p такое плохое, что ее касательные в сингулярной точке $(0, 0)$ различны. Это означает, что дискриминант полинома $x^2 + a_1x - a_2$ не равен нулю по модулю p и что $a(p) = \pm 1$.

Эллиптическая кривая E/Q называется полустабильной, если она полустабильна во всех простых p .

Дзета-функции эллиптических кривых над Q . Дзета-функция редукции кривой E_p - редукции эллиптической кривой E/Q над Q по модулю p выглядит следующим образом:

$$\zeta(s, E_p) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_p(F_{p^n})|u^n}{n}\right),$$

где F_{p^n} - поле из p^n элементов, $u = p^{-s}$, E_p - редукция эллиптической кривой по модулю p (данная редукция - переход от области определения Q к новой области определения - полю F_p), $|E_p(F_{p^n})|$ - число точек эллиптической кривой $E_p(F_{p^n})$.

6. Приведение эквивариантной квадратуры для волчка Эйлера к полному дифференциалу. Проведем указанную в названии параграфа процедуру посредством приведения уточненного знаком \pm и областью определения абелевого дифференциала (3) к дифференциалу от некоторой специальной функции комплексного аргумента s . Эта процедура приводит к нахождению явной эквивариантной функциональной зависимости между вещественным временем t и комплексным временем s . Этапы данной процедуры будут соответствовать леммам 1-11. Далее останется обратить эту зависимость (леммы 12-14).

1. Предварительная структура эквивариантного уточнения квадратуры волчка Эйлера. В силу модели фазовой динамики волчка Эйлера (см.[3]) в кольце (обозначим его K) и при учете симметрии $Z_2[t \rightarrow -t]$ интеграл правой части формулы (3), обозначаемый далее через $I(k)$, можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \pmod{Z_2[t \rightarrow -t]} = \\ & = \int_{K \otimes Z_2[t \rightarrow -t]} \frac{du_{eq}}{\sqrt{(1-u_{eq}^2)(1-k^2u_{eq}^2)}} = I(k), \end{aligned}$$

где $u_{eq} = u \otimes Z_2[t \rightarrow -t]$.

2. Поэтапное вычисление эквивариантной квадратуры. Дадим определения и введем необходимые для дальнейшего объекты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (Алгебраическое определение группы Клейна D_2 (см.[8])
Группой Клейна, обозначаемой через D_2 , называется группа, связывающая следующим образом знакопеременные группы подстановок A_4 и A_3 из четырех и трех элементов соответственно:

$$A_4/\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong A_3,$$

где $\{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong D_2$.

Поскольку каждая указанная нетождественная подстановка представляет поворот Rot_O^π правильного тетраэдра T вокруг соответствующей реберной медианы (отрезка, соединяющего середины двух взаимно противоположных ребер тетраэдра с центром O) на угол π , то можно дать геометрическую версию этого определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (Геометрические определения группы Клейна D_2 (см.[8])

1. Группа D_2 изоморфна множеству поворотов тетраэдра на угол π вокруг всех трех реберных медиан вместе с тождественным поворотом; композиция любых двух таких поворотов дает такой поворот вокруг третьей медианы.

2. Группа D_2 изоморфна множеству всех поворотов ромба на плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $S^1(\text{Sym}(T))$ и $S^1(\text{Rot}(T))$ - орбиты точки касания сферы S^2 со вписанным тетраэдром T при ее качении без проскальзывания по плоскости E^2 , где

$$\text{Sym}(T) \cong \text{Image}(\text{Rot}_O^\pi(T) \rightarrow S_+^1), \quad \text{Rot}(T) \cong \text{Image}(\text{Rot}_O^\pi(T) \rightarrow S_\times^1),$$

где S_+^1, S_\times^1 - стандартная окружность S^1 , снабженная структурой аддитивной и мультипликативной группы соответственно.

Тогда положим

$$S_{\text{diag}}^1 \cong \text{Diag}(S^1(\text{Rot}(T)) \circ S^1(\text{Sym}(T))),$$

где знак " \circ " обозначает композицию групповых законов на сомножителях. Эта диагональ корректно определена в силу коммутативности сомножителей.

Определение 3 отражает тот факт, что группа D_2 является центральной симметрией $Z_O(T)$ тетраэдра T , что влечет следующие изоморфизмы:

$$S_{\text{diag}}^1 \cong S^1(\text{Rot}(T) \cong \text{Sym}(T)) \cong Z_O(T)[\text{Rot}(T), \text{Sym}(T)]/\text{Rot}(T) \cong \text{Sym}(T)]$$

Также можно записать

$$S_{\text{diag}}^1 \cong S^1(\text{Rot}(T) \cong \text{Sym}(T)) \cong S^1(D_2^\times \cong D_2^+) \cong S^1(D_2^{\text{diag}}),$$

где $D_2^{\text{diag}} \cong \text{Diag}(D_2^\times \circ D_2^+)$ - корректно определенная диагональ изоморфных коммутативных групп.

Лемма 1. 1. Группа $D_2(Q)$ является генератором транзитивного качения тетраэдра, вписанного в сферу S^2 , по плоскости E^2 .

2. Группа $D_2(R)$ является генератором двойственной конструкции - транзитивного качения сферы со вписанным в нее тетраэдром, по плоскости.

Доказательство. Заметим, что качение п.1 условия леммы представляется симметрией $SO(3, E^2/sp(Q)/\{\text{Множество поворотов ромба}\})$, где $sp(Q)$ - отображение последовательного пересчета всех рациональных чисел посредством пересчета всех целых точек на E^2 по точкам архимедовой спирали.

Соответственно, качение п.2 условия леммы представляется симметрией $SO(3, E^2/sp(R)/\{\text{Множество поворотов ромба}\})$, где $sp(R)$ - отображение последовательного пересчета всех рациональных чисел посредством пересчета всех целых точек плоскости E^2 по отрезкам архимедовой спирали.

Приведенные факторы плоскости E^2 корректно определены, т.к. отображения $sp(Q)$, $sp(R)$ являются отношениями эквивалентности.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Следом (Trace), детерминантом (Det) и дискриминантом (Discr) отображения композиции $D_2(R) \circ D_2(Q)$ будем называть след, детерминант и дискриминант оператора $SO(3, D_2(R) \circ D_2(Q))$, которые определяются соответствующим образом в рамках стандартной линейной алгебры.

Корректность данного определения следует из леммы 1, где операторы $D_2(R)$, $D_2(Q)$ определены, а также следующего утверждения.

Лемма 2. Оператор $D_2(R) \circ D_2(Q)/D_2^{\text{diag}}$ является генератором центральной симметрии 3-мерной целочисленной решетки E^3/Z^3 .

Доказательство. Надо заметить, что оператор $SO(3, S_4)/(D_2(R) \circ D_2(Q))/D_2^{\text{diag}}$ является оператором центральной симметрии куба в E^3 , где S_4 - четырехэлементная группа подстановок, которая изоморфна полной группе самосовмещений куба.

□

Таким же образом определяются и соответствующие инварианты для оператора $\mathcal{D} = (D_2(R) \circ D_2(Q))^{N \rightarrow \infty}$, являющегося N -кратной композицией оператора $D_2(R) \circ D_2(Q)$, имеющего смысл генератора оператора \mathcal{D} .

Опишем теперь явно указанные инварианты оператора \mathcal{D} в терминах модели динамики волчка Эйлера в кольце K .

Лемма 3. Инварианты представления оператора \mathcal{D} в фазовой динамике волчка Эйлера, реализованной в кольце K выражаются через объект S_{diag}^1 :

$$\text{Trace}(\mathcal{D}/(D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) : K \rightarrow S^1[\text{Sym}(T)] \cong S_{\text{diag},+}^1$$

$$\text{Det}(\mathcal{D}/(D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) : K \rightarrow S^1[\text{Rot}(T)] \cong S_{\text{diag}, \times}^1$$

$$\text{Discr}(\mathcal{D}/(D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) : K \rightarrow S^1[\text{Sym}(T) \cong \text{Rot}(T)] \cong S_{\text{diag}, +, \times}^1$$

$$\text{где } S_{\text{diag}, +}^1 \cong S_{\text{diag}}^1/S_{\times}^1, \quad S_{\text{diag}, +}^1 \cong S_{\text{diag}}^1/S_+^1, \quad S_{\text{diag}, +, \times}^1 \cong S_{\text{diag}}^1$$

Доказательство. 1. Покажем, что отображение $D_2(R) \circ D_2(Q)$ является генератором собственной симметрии сепаратрисной структуры в кольце K .

а) Вводя на каждой компоненте гладкости сепаратрисы плоскую метрику (что можно сделать в силу ее тривиального расслоения на двояко-асимптотические траектории), замечаем, что отображение $sp(R) \circ sp(Q)$ отображает комплексную плоскость $E^2 \cong C$ на каждую из компонент гладкости сепаратрисы.

б) Отображение $Sp \cong sp(R) \circ sp(Q)/\{\text{Множество поворотов ромба}\}$ отображает критическую полосу на плоскости $C[s]$ (полосу, ограниченную прямыми $\{\text{Re}(s) = 0\}, \{\text{Re}(s) = 1\}$), с действием на ней отображения зеркальной симметрии относительно вещественной и мнимой осей одновременно (эта симметрия и представляет симметрию обратимости по времени $Z_2[t \rightarrow -t]$) уже на всю сепаратрису.

в) В силу леммы 1 имеем: $\text{Gener}(Sp) \cong D_2(R) \circ D_2(Q)$.

2. Из определения объектов $\text{Sym}(T)$ и $\text{Rot}(T)$ и леммы 1, где группы $D_2(R), D_2(Q)$ определены, следует, что

$$D_2(Q) \cong S^1(\text{Sym}(T)) \cong \text{Gener}(S_+^1), \quad D_2(R) \cong S^1(\text{Rot}(T)) \cong \text{Gener}(S_{\times}^1)$$

3. В соответствии с п.1 данного доказательства объект S_+^1 представляет орбиту "лево-правого" вращения границы ∂K кольца K , а S_{\times}^1 соответственно представляет орбиту "право-левого" вращения границы ∂K кольца K .

При этом S_+^1, S_{\times}^1 представляют периодические движения волчка Эйлера вокруг наименьшей и наибольшей осей инерции, симметризованные отображением $Z_2[t \rightarrow -t]$.

Закавыченность терминов "лево-правые" и "право-левые" означают условность выбора порядка использования терминов "лево" и "право".

4. Из п.2 следует, что корректно определена диагональ

$$S_{\text{diag}}^1 \cong \text{Diag}(S^1(\text{Rot}(T)) \circ S^1(\text{Sym}(T))) \cong S^1(\text{Rot}(T) \cong \text{Sym}(T))$$

5. В соответствии с п.1 доказательства объект S_{diag}^1 представляет максимальное собственное пространство оператора \mathcal{D} , состоящее из пары сепаратрисных гиперболических движений, симметризованной посредством отображения $Z_2[t \rightarrow -t]$; также S_{diag}^1 - неподвижное множество при зеркальной симметрии посредством оператора \mathcal{D} и имеет смысл образа критической прямой $\{\text{Re}(s) = \frac{1}{2}\}$ из плоскости $C[s]$ при этой зеркальной симметрии.

При этом S_{diag}^1 представляет периодическое движения волчка Эйлера вокруг средней оси инерции, симметризованное отображением $Z_2[t \rightarrow -t]$.

6. Из определения инвариантов Trace, Det и Discr для оператора \mathcal{D} следует, что

$$\text{Trace}(\mathcal{D}/(D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) \cong S_+^1, \quad \text{Det}(\mathcal{D}/(D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) \cong S_{\times}^1,$$

$$\text{Discr}(\mathcal{D}/D_2^{\text{diag}}) \cong S_{\text{diag}}^1$$

7. Теперь лемма следует из п.4 доказательства и определения $S_{\text{diag},+}^1$, в соответствии с которым

$$S_{\text{diag},+}^1 \cong S_{\text{diag}}^1/S_{\times}^1, \quad S_{\text{diag},+}^1 \cong S_{\text{diag}}^1/S_+^1, \quad S_{\text{diag},+,\times}^1 \cong S_{\text{diag}}^1$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. $S_{\text{diag},+,\times}^1$ имеет смысл решения неявного уравнения $[\gamma, \omega] = 0$. Перейдем непосредственно к координатизации локальных эквивариантных автоморфизмов кольца K - фактор-симметрий (локальных симметрий) кольца K относительно его сепаратрисной структуры.

Лемма 4. 1. "*Левые-правые*" локальные автоморфизмы кольца K координатизируются множеством всех простых чисел p с их естественным порядком

$$p = p(N) = H^0(+\partial K, Z_2^N[t \rightarrow -t]),$$

где N - степень итерации отображения $Z_2[t \rightarrow -t]$ - последовательно пробегает все натуральные числа; множество $+\partial K$ - граница кольца K с фиксированной ориентацией на граничных противоположно ориентированных окружностях границы ∂K .

2. "*Правые-левые*" локальные автоморфизмы кольца K координатизируются множеством комплексных чисел $C = C[s]$

$$s = H^0(-\partial K, Z_2^N[t \rightarrow -t])$$

где множество $-\partial K$ - граница кольца K с противоположной ориентацией на граничных окружностях границы $+\partial K$.

Доказательство. Покажем, что для любого простого числа p существует такое натуральное число N , зависящее от p , что выполнено условие п.1 данной леммы. Действительно,

$$\begin{aligned} H^0(+\partial K, Z_2^{(N)})[t \rightarrow -t] &= H^0(S^1, S_{\text{diag}}^1(\text{mod } N)/\setminus C) = \\ &= H^0(S^1, S_{\text{diag},+}^1(\text{mod } N) \otimes C) = \end{aligned}$$

Д.Л. Абрамов

$$\begin{aligned}
&= H^0(S_{\text{diag}}^1, \text{Trace}((D_2(R) \circ D_2(Q))/D_2^{\text{diag}})^N \otimes C) \\
&= H^0(S^1, (Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}])_{CW}^N)
\end{aligned}$$

где

$$Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}] = \text{Trace}(\text{Diag}(\text{Gener}(D_2(R)) \circ \text{Gener}(D_2(Q)))) \cong \text{Trace}(D_2^{\text{diag}})$$

- след (имеющий групповую структуру) оператора D_2^{diag} , являющегося корректно определенной диагональю. В силу леммы 2 оператор $D_2(R) \circ D_2(Q)$ является генератором центральной симметрии 3-мерной целочисленной решетки E^3/Z^3 . Поэтому имеется следующее представление для $Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]$:

$$Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}] = \text{Trace}(Z_O^{E^3/Z^3}[D_2(R) \circ (D_2(Q))/D_2^{\text{diag}}])$$

Индекс "CW" обозначает, что объект $Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^N$ имеет дополнительную структуру - структуру CW-комплекса, т.е. клеточного топологического пространства, обладающего точной размерной стратификацией: для n -мерный остов (для любого n) данного пространства является границей его $n + 1$ -мерного остова (подробности см. в [7]).

Орбита группы $Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^N$ реализуется диаметром окружности S_{diag}^1 , являющегося натурально-значной величиной. Это следует из того факта, что группа $Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^N$ имеет следующую геометрическую интерпретацию - она является натуральным параметром на точках архимедовой фактор-спирали, последовательно пересчитывающей все целые точки на стандартной плоской целочисленной решетке (см. доказательство леммы 1).

Поскольку $\text{Gener } Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}] \cong Z_2[0, 1]$, то натуральные числа M , представляемые областью значений оператора $Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^N$, являются простыми, поскольку делятся только на себя, т.е. на M , где $M = Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^{N(M)}(1)$, а также на 1, где $1 = Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}]_{CW}^{N(M)}(0)$.

Следовательно, получаем, что для любого простого числа p существует такое натуральное N , что

$$H^0(S^1, (Z_2^{\text{diag}}[\mathcal{N}])_{CW}^N) = H^0(S^1, Z_{p(N)}),$$

где $Z_{p(N)}$ - группа из простого числа $p(N)$ элементов.

Теперь осталось заметить, что поскольку симметрия $H^0(S^1, Z_{p(N)})$ является канонической координатой на правильном p -угольнике, то

$$H^0(S^1, Z_{p(N)}) = p$$

2. Доказательство данного пункта проводится по схеме доказательства пункта 1 данной леммы, но имеет специфику в финальной части. В отличие от утверждения указанного пункта ответ оказывается не зависящим от N .

а. Преобразуем исходную скалярную симметрию к максимально простому виду, тензорно умножая ее на симметрию $Z_2^N[t \rightarrow -t]$ над R :

$$\begin{aligned} & H^0(-\partial K, Z_2^N[t \rightarrow -t]) = \\ & = H^0(-\partial K \otimes_R Z_2^N[t \rightarrow -t], Z_2^N[t \rightarrow -t] \otimes_R Z_2^N[t \rightarrow -t]) = \\ & = H^0(K, Z_2^N[t \rightarrow -t]) = \\ & = H^0(C, S^1 \otimes_R \text{Det}(D_2(R) \circ D_2(Q)/D_2^{\text{diag}})^N) = H^0(C, S_{\text{diag}, \times}^1(\text{mod } N)) = \\ & = H^0(C, S_{\text{diag}}^1(\text{mod } N) \setminus C) = H^0(C, (Z_2^{\text{diag}}[C])_{CW}^N), \end{aligned}$$

где

$$Z_2^{\text{diag}}[C] = \text{Det}(\text{Diag}(\text{Gener}(D_2(R)) \circ \text{Gener}(D_2(Q)))) \cong \text{Det}(D_2^{\text{diag}})$$

Также имеет место эквивалентное представление:

$$Z_2^{\text{diag}}[C] = \text{Det}(Z_O^{E^3/Z^3}[D_2(R) \circ (D_2(Q))/D_2^{\text{diag}}])$$

б. Поскольку архимедова фактор-спираль, на отрезках которой натуральным параметром является симметрия-комплекс $(Z_2^{\text{diag}}[C])_{CW}^N$, параметризует классы параллельных прямых с рациональными коэффициентами на плоскости E^2 , то

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} H^0(C[s], S_{\text{diag}, \times}^1(\text{mod } N)) = \\ & = H^0(C[s] \cup \infty, S_{\text{diag}, \times}^1) = H^0(\Lambda[s], A[Q]), \end{aligned}$$

где $\Lambda[s], A[Q]$ - плоскость Лобачевского и ее рациональный абсолют в модели Клейна в круге с каноническими координатами $s \in C$ и $t \in R$ соответственно.

в. Теперь утверждение п.2 леммы следует из того, что $H^0(\Lambda[s], A[Q]) = s$.

□

Лемма 5. *Нейтральные (бидвусторонние) локальные автоморфизмы кольца K координатизируются следующим образом:*

$$p^{-s} = H^0(+\partial K / -\partial K, Z_2^{p(N)}[t \rightarrow -t])$$

Доказательство. 1. Из леммы 4 следует, что симметризация типов локальных биаутоморфизмов динамики в кольце K имеет вид:

$$H^0(+\partial K / -\partial K, Z_2^{p(N)}[t \rightarrow -t]) =$$

$$= H^0(S_{\text{diag}}^1(\text{mod } p(N)) \backslash C, S_{\text{diag}}^1(\text{mod } p(N))/C) = \text{Ad}_{C^0}^{(p)} S_{\text{diag}}^1$$

2. Объединение схем вычислений п.1 и п.2 леммы 4 выглядит так:

$$\begin{aligned} \text{Ad}_{C^0}^p S_{\text{diag}}^1 &= H^0(S_{\text{diag}}^1, S_{\text{diag}}^1(\text{mod } N(p))) = \\ &= H^0(S_{\text{diag}}^1, \text{Discr}((D_2(Q) \circ (D_2(R))/D_2^{\text{diag}})^N) \otimes C)) = \\ &= H^0(S_{\text{diag}}^1, [(S_{\text{diag}, \times}^1)(\text{mod } N(p)) \circ [(S_{\text{diag}, +}^1)(\text{mod } N(p))]) \end{aligned}$$

3. Сделаем тождественное преобразование - умножим слева обе симметрии, относительные когомологии которых мы сейчас вычисляем, на симметрию $(S_{\text{diag}, \times}^1(\text{mod } N(p)))^{-1}$, которая корректно определена, как и указанное умножение. Тогда получим:

$$\text{Ad}_{C^0}^p S_{\text{diag}}^1 = H^0((S_{\text{diag}, \times}^1(\text{mod } N(p)))^{-1} \circ S_{\text{diag}, +}^1, S_{\text{diag}, +}^1(\text{mod } N(p)))$$

4. Из леммы 4 следует, что

$$H^0(((S_{\text{diag}, \times}^1(\text{mod } N(p)))^{-1} \circ S^1), S_{\text{diag}, +}^1(\text{mod } N(p))) = H^0((S^1 \otimes C[-s], S^1[Z_{p(N)}]))$$

5. Симметрия $H^0(S^1 \otimes C[-s], S^1[Z_{p(N)}])$ является непрерывным (класса C^0) автоморфизмом окружности S_{diag}^1 и поэтому представляется соответствующим ее экспоненциальным отображением - экспоненциальным отображением окружности $S^1 \otimes C[-s]$ с основанием (экспонентой) $p(N)$:

$$\text{Ad}_{C^0}^p S_{\text{diag}}^1 = H^0((S^1 \otimes C[-s], S^1[Z_{p(N)}])) = \exp_{p(N)}^{C^0}(S^1 \otimes C[-s]) = p^{-s}$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная лемма показывает, что выражение p^{-s} является собственным значением оператора зеркальной симметрии "уровня p " кольца K .

Теперь установим связь модели локальной динамики волчка Эйлера в кольце K и соответствующей ей локализацией специальной эллиптической кривой E/Q в поле F_{p^n} .

Лемма 6. Пусть эллиптическая кривая E_C над C , соответствующая классической квадратуре (3), задается аффинным уравнением в нормальной форме $y^2 = x^3 + ax + b$, где $a, b \in R$. Тогда ее эквивариантное уточнение посредством отображения $Z_2[t \mapsto -t]$ является эллиптической кривой E/Q над Q :

$$E_C \otimes Z_2[t \mapsto -t] \cong (E/Q)[\{y^2 = x^3 + px + q\}]$$

где p, q - некоторые простые числа и кривая E/Q является полустабильной.

Числа p, q имеют смысл следующих нульмерных инвариантов инволюции $Z_2[t \mapsto -t]$:

$$p = \text{Trace}(Z_2[t \mapsto -t]|_{t=t_0}), \quad q = \text{Det}(Z_2[t \mapsto -t]|_{t=t_0})$$

и являются эквивариантными начальными данными, полностью определяющими последующую динамику волчка Эйлера:

$$q = \gamma(t_0/Z_2[t \mapsto -t]), p = \omega(t_0/Z_2[t \mapsto -t])$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Всюду далее в данном тексте под кривой E/Q понимается именно эллиптическая над Q из данной леммы.

Доказательство. 1. Классический абелев дифференциал соответствует эллиптической кривой над R с уравнением в форме Вейерштрасса, имеющим вид $y^2 = x^3 + ax + b$, где $a, b \in R$. Как топологическое пространство кривая E_C представляется фактором:

$$E_C \cong C[z]/(Z + Z)$$

Образ E_C^{eq} кривой E_C как топологического пространства при ее эквивариантном уточнении посредством отображения $Z_2[t \rightarrow -t]$ имеет вид $E_C^{eq} \cong E_C \otimes Z_2[t \rightarrow -t]$ и представляется эквивариантным фактором:

$$\begin{aligned} E_C^{eq} &\cong (C[z]/(Z + Z)) \otimes (Z_2[t \rightarrow -t])_{CW} \cong \\ &\cong (C[z]/sp(Q)/D_2(R) \circ D_2(Q)) \end{aligned}$$

Поскольку объект $sp(Q)/D_2(R) \circ D_2(Q)$ представляет двумерную решетку, определенную на поле рациональных чисел Q и $s \cong z/sp(Q)/D_2(R) \circ D_2(Q)$, то пространство E^{eq} представляется одномерным абелевым многообразием над полем Q :

$$C[z]/sp(Q)/D_2(R) \circ D_2(Q) \cong C[s]/(Q + Q)$$

т.е. является, по определению, эллиптической кривой над Q : $E_C^{eq} \cong E/Q$. Координата $s = z/Z_2[t \rightarrow -t]$ имеет канонический смысл: она является канонической координатой в критической полосе дзета-функции Римана с дополнительным действием на ней зеркальной симметрии относительно критической прямой (см. также п.1 доказательства леммы 3), снабженной канонической координатой $t = t/Z_2[t \rightarrow -t]$. В нашем случае критическая прямая снабжена дополнительно целочисленной решеткой.

Используя лемму 4, представим E_C^{eq} через образующие и соотношения:

$$\begin{aligned} E_C^{eq} &\cong H_1(c_1(E_C) \times c_2(E_C), Z_2[t \rightarrow -t]) \cong H_1(\text{Gener}((D_2^{\text{diag}})_{CW}), C[s]) \cong \\ &\cong H_1((c_{\text{diag}})_{CW}, C) \cong H_1(\{(x, y) | (y^2 = x^3)\}, C) / H_1(\{x\}, C) / H_1(\{y\}, C[s]), \end{aligned}$$

где циклы $c_i(E_C), c_i(E/Q), i = 1, 2$ рассматриваются как циклы топологических многообразий указанных выше; x, y - образующие группы D_2^{diag} (см. ее

определение в контексте определения объекта S_{diag}^1 , а $\{y^2 = x^3\}$ - соотношение в D_2^{diag} .

Рассматривая аддитивную запись фактор-симметрии $H_1((c_{\text{diag}})_{CW}, C)$, получаем ее представление в аффинных координатах $x, y \in C[s]$, совпадающими с указанными выше образующими группы $D_2(R)$:

$$H_1(c_{\text{diag}})_{CW}, C = \{y^2 = x^3 + px + q\}$$

где с учетом Леммы 3 имеют место соотношения:

$$b \otimes Z_2[t \rightarrow -t]|_{t=t_0} = S_{\text{diag},+}^1(\text{mod } N) = \text{Trace}(Z_2[t \mapsto -t]|_{t=t_0}) = q;$$

$$a \otimes Z_2[t \rightarrow -t]|_{t=t_0} = S_{\text{diag},\times}^1(\text{mod } N) = \text{Det}(Z_2[t \mapsto -t]|_{t=t_0}) = p$$

Теперь первое утверждение леммы следует из эквивалентности следующих выражений, записанных в соответствующих канонических координатах:

$$\{y^2 = x^3 + px + q, \quad (x, y) \in C[s]\} \leftrightarrow \{y^2 = x^3 + px + q, \quad (x, y) \in C[z]\},$$

поскольку

$$\text{Gener}(\text{Ker}(C[s] \rightarrow C[z = x + iy])) \cong D_2(R) \circ D_2(Q)$$

и $D_2(R) \circ D_2(Q) \cong \text{Aut}(\{x, y\})$.

2. Полустабильность кривой E/Q следует из того, что особые точки образа отображения проекции $C[s] \rightarrow C[z = x + iy]$ имеют в качестве автоморфизмов группу, изоморфную группе D_2 , изоморфную по определению группе поворотов ромба. Поэтому особые точки аффинного уравнения кривой E/Q в аффинной карте $C^2[x, y]$ имеют не совпадающие касательные, что по определению соответствует особым точкам именно полустабильной кривой.

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, кривая E/Q имеет смысл спектральной кривой фазовой динамики именно волчка Эйлера и тем самым полностью кодирует его фазовую динамику.

Кривая E/Q в силу лемм 1,3 может быть реализована в евклидовом пространстве E^3 как орбита специальной непрерывной бимонодромии правильного тетраэдра с генератором $D_2^\times \circ D_2^+$ и поэтому имеет смысл спектральной кривой фазовой динамики именно волчка Эйлера.

Лемма 7. *Локальные эквивариантные автоморфизмы границы ∂K кольца K по модулю их центра - множества эквивариантных автоморфизмов сепаратрисной структуры в кольце K - представляются локализацией некоторой эллиптической кривой E/Q в поле F_{p^n} :*

$$H_1(\partial K, S_{\text{diag}}^1(\text{mod } N(p))) \cong H_1(E_C, Z_2^p[t \rightarrow -t]) \cong$$

$$\cong H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) \cong (E/Q)(F_{p^n}),$$

где вид кривой E/Q конкретизирован в лемме 6.

ЗАМЕЧАНИЕ. При этом натуральное число n имеет смысл числа биоборотов границы $+\partial K$ кольца K .

Доказательство. В силу лемм 3 и 4 имеют место следующие изоморфизмы:

$$H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) \cong H_1(c_1(E_C), \text{Trace}([D_2(R) \circ D_2(Q)]^{N(p)})) \cong S_+^1(\text{mod } p^n);$$

$$H_1(c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) \cong H_1(c_2(E_C), \text{Det}([D_2(R) \circ D_2(Q)]^{N(p)})) \cong S_\times^1(\text{mod } p^n),$$

где S_+^1, S_\times^1 - окружность S^1 с аддитивной и мультипликативной структурой соответственно. \square

Лемма 8. *Локальные эквивариантные автоморфизмы сепаратрисной структуры в кольце K имеют вид:*

$$H_1(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) \cong S_{\text{diag}}^1(\text{mod } N(p))$$

Доказательство. Следует из следующих изоморфизмов:

$$c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \cong c_{\text{diag}}(E_C) \otimes_R \text{Discr}([D_2(R) \circ D_2(Q)]^{N(p)}) \cong S^1(\text{mod } p^n)$$

\square

Лемма 9. *Локальные эквивариантные автоморфизмы сепаратрисной структуры в кольце K допускают каноническую координатизацию:*

$$H^0(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) = \frac{u^n}{n},$$

где $u = p^{-s}$.

Доказательство. Доказательство следует из того, что $S_{\text{diag}}^1[p^{-s}]$ обладает структурой ациклического бикомплекса:

$$c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW} \cong (S_{\text{diag}}^1[p^{-s}])_{CW[n]}$$

Функция $\frac{u^n}{n}$ является собственной функцией отображения бидифференциала в этом бикомплексе. \square

Лемма 10. *Для эквивариантных автоморфизмов кольца K относительно эквивариантных автоморфизмов его сепаратрисной структуры имеет место следующее разложение:*

$$\begin{aligned} & H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}) \cong \\ & \cong H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C) \times H_1(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}, C) \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}$ имеет структуру комплекса

$$c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \xrightarrow{f_1} c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \xrightarrow{f_2} c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW},$$

где $f_1 \cong D_2(R) \circ D_2(Q_+)$, $f_2 \cong D_2(R) \circ D_2(Q_\times)$, то имеется разложение:

$$\begin{aligned} & H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}) \cong \\ & \cong H_1(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW[n]} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}) \times H_1(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}, C) \end{aligned}$$

Теперь лемма следует из следующих изоморфизмов:

$$H_1(c_i^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW}) \cong H_1(c_i^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C),$$

где $i = 1, 2$. \square

Теперь соберем вместе результаты лемм 4-10.

Лемма 11. *Подинтегральное выражение в исходной квадратуре (3) является полным дифференциалом следующего вида:*

$$d(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \zeta(s, E/Q)$$

где бидифференциал $d(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = H^0(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C)$ - бикомплекс, двойственный по Пуанкаре к бикомплексу $S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] \cong H_1(c_{\text{diag}}^{(p)}(E/Q)_{CW[n]}, C)$, $t_{eq} = t/Z_2[t \rightarrow -t]$.

Доказательство. 1. Из лемм 6-8 следует, что

$$\begin{aligned} & d(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] \pmod{p}) = \\ & = H^0(c_1^{(p)}(E/Q)_{CW} \times c_2^{(p)}(E/Q)_{CW}, (c_{\text{diag}})_{CW} \pmod{p}[t/Z_2[t \rightarrow -t]]) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} H^0(S_+^1 \pmod{p^n} \times S_\times^1 \pmod{p^n}, (c_{\text{diag}})_{CW[n]} \pmod{p}[t/Z_2[t \rightarrow -t]]) \end{aligned}$$

Так как из лемм 7-10 следует, что для нульмерных гомологий кривой $(E/Q)_{CW}$ (кривой E/Q с учетом ее эквивариантной $(c_{\text{diag}})_{CW[n]}$ -перенормировки), представляющих $(E/Q)_{CW}$ как множество точек, имеется соотношение:

$$H_0(S_+^1 \pmod{p^n} \times S_\times^1 \pmod{p^n}, (c_{\text{diag}})_{CW[n]}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(E/Q)(F_{p^n})|u^n}{n},$$

где F_{p^n} – поле из p^n элементов, $u = p^{-s}$, $(E/Q)(F_{p^n})$ - специализация кривой E/Q в поле F_{p^n} .

Теперь заметим, что нульмерные когомологии кривой $(E/Q)_{CW}$ представляют каноническую параметризацию на $(E/Q)_{CW}$, так как группа ее нульмерных гомотий является S^1 -пространством (топологическим пространством с транзитивным действием группы S^1). Отсюда следует, что

$$H^0(S^1_+(\text{mod } p^n) \times S^1_\times(\text{mod } p^n), (c_{\text{diag}})_{CW[n]}) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(E/Q)(F_{p^n})|u^n}{n}\right)$$

2. Имеется естественный изоморфизм S^1 -пространств:

$$\begin{aligned} H^0(S^1_+(\text{mod } p^n) \times S^1_\times(\text{mod } p^n), (c_{\text{diag}})_{CW[n]}) &\cong \\ &\cong H^1(S^1_+(\text{mod } p^n) \times S^1_\times(\text{mod } p^n), (c_{\text{diag}})_{CW[n]}) \end{aligned}$$

3. В соответствии с леммой 8, п.2 доказательства данной леммы и определением $d(S^1_{\text{diag}}[t_{eq}] \pmod{p})$, получаем, что

$$H^0(S^1_+(\text{mod } p^n) \times S^1_\times(\text{mod } p^n), (c_{\text{diag}})_{CW[n]}) = d(S^1_{\text{diag}}[t_{eq}] \pmod{p})$$

4. Из определения локальной дзета-функции кривой E/Q (см.[4]) следует:

$$d(S^1_{\text{diag}}[t_{eq}] \pmod{p}) = \zeta_p(s, E/Q),$$

5. Эквивариантное объединение выражений п.1 данного доказательства соответствует естественной склейке локальных дзета-функций $\zeta(s, (E/Q)(F_{p^n}))$ посредством их произведения по всем простым числам p :

$$d(S^1_{\text{diag}}[t_{eq}]) = \prod_p \zeta_p(s, E/Q) = \zeta(s, E/Q),$$

□

7. Обращение эквивариантной квадратуры для волчка Эйлера.

Данное обращение является результатом нахождения обратной зависимости к функциональной зависимости, описываемой леммой 11, и представляет эквивариантную теорему о неявной функции. Теорема 1, описывающая результат обращения, следует из нижеследующих лемм 12-14.

Следующее утверждение описывает искомое обращение без фиксации начальных условий.

Пусть $I_{C^0}^{-1}(k, n), I_{C^1}^{-1}(k, n)$ - непрерывное и C^1 -гладкое обращения функциональной зависимости (3) соответственно, где указанная здесь векторно-значная структура обращений будет обоснована в лемме 13.

Лемма 12. *Непрерывное и гладкое обращения функциональной зависимости (3), представленной в дифференциальной форме в лемме 11, соответственно имеют вид:*

$$\mathbf{I}_{C^0}^{-1}(k, n) = \zeta(s, E_Q)(\zeta(s, E_Q) = 0),$$

$$\mathbf{I}_{C^1}^{-1}(k, n) = \exp(\zeta(s, E_Q)(\zeta(s, E_Q) = 0))$$

Доказательство. В соответствии с леммой 11 подинтегральное выражение в правой части исходной квадратуры (3) имеет следующую структуру полного дифференциала:

$$d(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \zeta(s, E_Q);$$

$$d(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = d_{C^1}(\text{id } d_{C^1})(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = d_{C^1}(d_{C^0})(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]),$$

где оператор $\text{id } d_{C^1} = d_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])$ - оператор (отображение) оснащения окружности S_{diag}^1 канонической непрерывной структурой, индуцированной с прямой R ; соответственно, оператор d_{C^1} оснащает окружность S_{diag}^1 уже C^1 - гладкой структурой.

Следовательно, последовательно получаем обращения исходной квадратуры классов C^0 и C^1 соответственно:

$$d_{C^0}^{-1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \int_{S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]} (S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) d_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) =$$

$$= \exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) \text{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]));$$

$$d_{C^1}^{-1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \int_{S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]} (S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) d_{C^1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) =$$

$$= \exp_{C^1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) \text{Ker}(\exp_{C^1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])),$$

где Ker обозначает ядра соответствующих операторов дифференцирования.

Заметим теперь, что для рассматриваемых операторов дифференцирования выполняется соотношение

$$d_{C^0}^{-1} \cong \text{id } d_{C^1}$$

Поэтому в соответствии с леммой 11 и тем, что

$$\text{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])) = \{\zeta(s, E/Q) = 0\};$$

$$\text{Ker}(\exp_{C^1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])) = \exp(\text{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]))) = \{\zeta(s, E/Q) = 0\},$$

получаем вид для обращения исходной квадратуры класса гладкости C^0 :

$$d_{C^0}^{-1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0)$$

Соответственно, обращение для класса C^1 имеет вид:

$$d_{C^1}^{-1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \exp(\zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0))$$

□

Следующее утверждение устанавливает векторно-значную структуру непрерывного и гладкого обращений и вид зависимостей $\gamma(t), \omega(t)$ пока без фиксации начальных условий.

Лемма 13. 1. Обращения $I_{C^0}^{-1}(k, n)$ и $I_{C^1}^{-1}(k, n)$ являются 3-значными функциями переменной s ;

2. Зависимости $\gamma(t)$ и $\omega(t)$ от вещественного времени t имеют следующий вид:

$$\gamma(t) = \text{Re}(\zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0)), \quad \omega(t) = \text{Im}(\zeta(s, E/Q)(\zeta(s, E/Q) = 0))$$

где Re, Im - вещественная и мнимая части указанных комплексных чисел.

Доказательство. 1. С помощью конструкции спирального отображения из доказательства леммы 1, также интерпретации группы D_2 как множества симметрий ромба на плоскости, показывается, что следующее отображение накрытия

$$C \rightarrow C / ((D_2(R) \circ D_2(Q) / D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty})$$

отображает плоскость в критическую полосу ($\text{Re } s = 0, \text{Re } s = 1$) дзета-функции Римана так, что образом множества $C / (D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}$ является критическая прямая $\text{Re } s = \frac{1}{2}$.

Действительно, из определения группы D_2 следует, что данное отображение изоморфно отображению $(\gamma - \omega)$ - монодромного непрерывного самосовмещения тетраэдра T с центром в его геометрическом центре O , совпадающим с началом координат в E^3 , и также с выделенным базисом, совпадающим с тремя подходящим образом ориентированными реберными медианами:

$$O \rightarrow T(\gamma) \rightarrow T(\omega) \rightarrow T(\gamma) \rightarrow T(\omega) \rightarrow O$$

Эквивалентное представление этого отображения бимонодромии реализуется следующим эквивариантным изоморфизмом Пуанкаре:

$$\{d_{*, C^0} S_{\text{diag}}^1[\gamma] \cong T_{*, C^0} S_{\text{diag}}^1[\gamma]\} \cong T_{C^0}^* S_{\text{diag}}^1[\omega] \cong \{d_{C^0}^* S_{\text{diag}}^1[\gamma]\},$$

где операторы $d_{*,C^0}, d_{C^0}^*$ представляют канонический базис в пространствах $T_{*,C^0}S_{\text{diag}}^1[\gamma]$ и $T_{C^0}^*S_{\text{diag}}^1[\omega]$ соответственно.

Теперь утверждение п.1 данной леммы следует из того, что число нетривиальных элементов группы D_2 равно трем (это и дает трехзначность исходных обращений) и из леммы 12 (она дает координаты на указанном отображении накрытия).

2. Аддитивная и мультипликативная части указанного в п.1 отображения $(\gamma - \omega)$ - монодромии тетраэдра являются зеркальной симметрией системы "критической полоса/критическая прямая" относительно вещественной и мнимой прямой соответственно и поэтому представляются так:

$$C/((D_2(R) \circ D_2(Q_+)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \text{Re}(\zeta(s, E/Q)\{\zeta(s, E/Q) = 0\}),$$

$$C/((D_2(R) \circ D_2(Q_\times)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \text{Im}(\zeta(s, E/Q)\{\zeta(s, E/Q) = 0\})$$

Теперь сопоставим эти факты определением $\gamma - \omega$ монодромии тетраэдра в пространстве E^3 . В результате получаем соответствия:

$$\{C/((D_2(R) \circ D_2(Q_+)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty})\} \cong S^1[D_2(\omega) \circ D_2(\gamma)]/S_{\text{diag}}^1[D_{2,*}^{\text{diag}}],$$

$$C/((D_2(R) \circ D_2(Q_\times)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) \cong S^1[D_2(\omega) \circ D_2(\gamma)]/S_{\text{diag}}^1[D_2^{\text{diag},*}],$$

где, в соответствии с замечанием к лемме 3, $D_{2,*}^{\text{diag}} \cong \{[D_2(\gamma), D_2(\omega)] = 0\}$, $D_2^{\text{diag},*} \cong \{[D_2(\omega), D_2(\gamma)] = 0\}$

Поэтому для приведенного отображения $(\gamma - \omega)$ - монодромного непрерывного самосовмещения тетраэдра T его γ - проекция представляется так:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= d_{*,C^0}S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] = C[z]/((D_2(R) \circ D_2(Q_+)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \\ &= \text{Re}(S_{\text{diag}}^1[t/Z_2^\times]), \end{aligned}$$

где $t \in R$; связь переменных s, z объяснена в параграфе 3 и доказательстве леммы 6, и соответственно - ее ω - проекция представляется так:

$$\begin{aligned} \omega(s) &= d_{C^0}^*S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] = C[z]/((D_2(R) \circ D_2(Q_\times)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \\ &= \text{Im}(S_{\text{diag}}^1[t/Z_2^+]) \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое. \square

Теперь окончательно теорема 1 следует из следующего утверждения.

Лемма 14. 1. Множество всех начальных условий $\{\gamma(t_0), \omega(t_0)\}$ уравнений волчка Эйлера определяется уравнением $\zeta(s, E/Q) = 0$.

2. Каждый вектор начальных условий, отвечающий общему решению (уточненному классическому), определяется следующим образом:

$$\gamma(t_0) = \operatorname{Re}\{\zeta((s_1, (E/Q) = 0), \zeta((s_2, (E/Q) = 0), \zeta((s_3, (E/Q) = 0)\},$$

$$\omega(t_0) = \operatorname{Im}\{\zeta((s_1, (E/Q) = 0), \zeta((s_2, (E/Q) = 0), \zeta((s_3, (E/Q) = 0)\},$$

где s_1, s_2, s_3 - последовательные по абсолютной величине нетривиальные нули функции $\zeta(s, E/Q)$, т.е нули с ненулевой мнимой частью (эти нули лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$).

3. Каждый вектор начальных условий, отвечающий классическому решению, структурно определяется также, как и выше в п.2, но при этом величины s_1, s_2, s_3 являются последовательными уже тривиальными нулями функции $\zeta(s, E/Q)$, т.е нулями с нулевой мнимой частью.

4. Множество начальных условий для классического решения является подбикомплексом в бикомплексе начальных условий общего решения.

Доказательство. Докажем последовательно каждый пункт.

1. Используя формулу

$$\mathbf{I}_{C^0}^{-1}(k, n) = d_{C^0}^{-1}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) = \int_{S_{\text{diag}}^1} (S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) d_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) =$$

$$= \exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) \operatorname{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])) = \zeta(s, E/Q)\{\zeta(s, E/Q) = 0\}$$

из доказательства леммы 12 получаем, что ядро $\operatorname{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]))$ в точности описывает множество начальных условий уравнений волчка Эйлера.

2. Конкретный вектор начальных условий общего решения определяется:

- формулами, являющихся эквивариантно двойственными "специализациями в фазовую точку" формулы предыдущего пункта:

$$\{\gamma(t = t_0)\} = \int_{S_{\text{diag}}^1[D_2^{\text{diag}}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))]} (S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) d_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]),$$

$$\{\omega(t = t_0)\} = \int_{S_{\text{diag}}^1[D_2^{\text{diag},*}((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))]} (S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]) d_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]),$$

где $(x_i, y_i) = (x_i(t_0), y_i(t_0)) \in C \cong E^2$ - точки области определения оператора D_2^{diag} ; $t_0 \in R$; $i = 1, 2, 3$;

при этом, в силу того, что число нетривиальных элементов группы D_2^{diag} равно трем и в силу связи объекта S_{diag}^1 с критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ (см. п.5 доказательства леммы 3 и п.2 доказательства леммы 13), получаем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (D_2^{\text{diag}})^N(z_0) =$$

= {три последовательных нетривиальных нуля функции $\zeta(s, E/Q)$ },

где оператор $\lim_{N \rightarrow \infty} (D_2^{\text{diag}})^N(\mathbf{z}_0)$ представляет образ вектора $\mathbf{z}_0 = (x_i(t_0), y_i(t_0))$ при итерированном действии на него оператора D_2^{diag} ;

- следующими формулами из доказательства леммы 13:

$$\begin{aligned} d_{*,C^0} S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] &= C[z]/((D_2(R) \circ D_2(Q_+)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \\ &= \text{Re}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}/Z_2^\times]) = \gamma(t), \quad t \in R; \\ d_{C^0}^* S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] &= C[z]/((D_2(R) \circ D_2(Q_\times)/D_2^{\text{diag}})^{N \rightarrow \infty}) = \\ &= \text{Im}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}/Z_2^+]) = \omega(t), \quad t \in R \end{aligned}$$

3. Используем конструкцию доказательства леммы 6. Пусть F - декомпактифицирующее отображение переводящее кривую E/Q в кривую E_C (это отображение, обратное отображению компактификации из доказательства леммы 6). Отображение F переводит $S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]$ в $R[t]$, а D_2^{diag} в $D_2(R)$. Отметим, что ядром последнего отображения является группа $D_2(Q)$ (группа расширения классической комбинаторики знаков при симметризации квадратуры (3) отображением $Z_2[t \rightarrow -t]$).

Теперь заметим, что в соответствии с доказательством леммы 12, пространство $\text{Image } F$ содержится в $\text{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}])) = \{\zeta(s, E/Q) = 0\}$ как подпространство. Наконец заметим, что ядром отображения $F : S_{\text{diag}}^1[t_{eq}] \rightarrow R[t]$ являются нетривиальные нули функции $\zeta(s, E/Q)$.

4. Следует из того, что пространство $\text{Ker}(\exp_{C^0}(S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]))$ является бикомплексом с отображением бидифференциала $d_{C^0} S_{\text{diag}}^1[t_{eq}]$, определенным в доказательстве леммы 12. Отметим, что Z_2 -градуировка данного дифференциала индуцирована отображением инволюции $Z_2[t \mapsto -t]$.

□

1. Абрамов Д.Л. Точная разрешимость и каноническая модель уравнений Эйлера-Пуассона// Механика твердого тела.-2007.- вып. 37. - С. 42-68.
2. Маркеев А.П Теоретическая механика. – Ижевск, Изд-во РХД, 1999. – 570 с.
3. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. – М.: Наука, 1977. – 328 с.
4. Кнэпт Э. Эллиптические кривые / Пер. с англ. Ф.Ю. Попеленского. – М.: Факториал Пресс, 2004. – 488 с.
5. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. – М.:Физматлит, 1994. – 376 с.
6. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. – М.-Л.: Изд-во ин. литер., 1951. – 468 с.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, 2-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.
8. Александров П.С. Введение в теорию групп. – М.: Наука, 1980. – 144 с.