Точная разрешимость и каноническая модель уравнений Эйлера-Пуассона

Д.Л.Абраров

Устанавливается, что общим решением уравнений Эйлера-Пуассона является пространство экспонент от L–функций эллиптических кривых над полем рациональных чисел. Данный результат является следствием конструируемой канонической геометрической модели исходных уравнений. Полученное решение демонстрируется на примерах известных интегрируемых волчков.

Введение. Одной из основных модельных задач теоретической механики является задача о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в классическом поле тяжести. Данная задача имеет шесть существенных вещественных параметров: три параметра, описывающие относительное расположение точки закрепления тела и точки центра масс (относительные координаты центра масс), и три параметра, описывающие геометрию масс тяжелого волчка (главные моменты инерции тела).

Когда на данные параметры априори никаких специальных ограничений не накладывается, то динамика тяжелого твердого тела описывается уравнениями Эйлера-Пуассона (или – общими уравнениями Эйлера-Пуассона). Приведем данные уравнения.

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{M}, \omega] + [\gamma, \mathbf{c}] \tag{1}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = [\gamma, \omega]\,, \tag{2}$$

где уравнения (1) называются уравнениями Эйлера или динамическими уравнениями, а уравнения (2) называются уравнениями Пуассона или кинематическим уравнениями – они "замыкают" динамические уравнения – см. [**?**];

M – оператор кинетического момента твердого тела, ω – вектор угловой скорости тела, $[\cdot,\cdot]$ – оператор векторного произведения в евклидовом пространстве E^3, $\mathbf{c}$ – вектор смещения центра закрепления тела от центра масс тела, γ – вектор, компоненты которого – это проекции вектора вертикальной оси неподвижной системы отсчета, жестко связанной с евклидовым пространством, на оси подвижной системы координат, жестко связанной с телом. При этом оператор $M = I \cdot \omega$; оператор I представлен диагональными матрицами размера 3×3 с положительными вещественными элементами, удовлетворяющими неравенству треугольника.

Современное состояние проблемы. Давно известны случаи точной разрешимости уравнений (1)–(2) (так называемые случаи интегрируемости по Лиувиллю-Арнольду или случаи "общей интегрируемости"), соответствующие специальным значениям $\mathbf{c}$ и $\mathbf{I}$. Это случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской. Кроме того, имеется более десятка случаев так называемой частной интегрируемости (см.,например, [?]). Новый асимптотический метод получения решений развивается в работах А.Д. Брюно.

Многочисленные попытки найти случаи общей интегрируемости, отличные от указанных классических, привели к гипотезе об их отсутствии в наиболее общей (аналитической) ситуации (см. [?]). Наряду с этим, имеются многочисленные результаты как о сложной структуре фазового пространства возмущенного волчка Эйлера, так и общие выводы КАМ–теории для интегрируемых систем о хаотизации структуры их фазовых пространств при налагаемых возмущениях (см. [?], [?], [?]).

Исторический комментарий в контексте потенциальной разрешимости общей задачи о тяжелом волчке. В данной работе, в продолжение работ [?] и [?], развивается подход, связанный с идеей максимально конструктивного исследования общей задачи о тяжелом волчке, коррелирующий с подходами К. Вейерштрасса и С.В. Ковалевской (см. [?], стр. 280–283).

Отметим также, что конструктивное математическое и компьютерное моделирование уравнений Эйлера-Пуассона в контексте идеи их конструктивной разрешимости активно развивается Донецкой школой механики ([?]).

Предлагаемое продвижение – каноническая конструктивная геометрическая модель общих уравнений Эйлера-Пуассона.

В итоге, несмотря на препятствия, связанные с теорией возмущений, общие уравнения Эйлера-Пуассона оказываются точно разрешимыми. При этом парадокс состоит в том, что точная разрешимость является результатом эквивариантного продолжения возмущенной хаотической динамики, формально определенной над вещественным временем, уже на промежуток времени, включающий бесконечно удаленную точку. Такое продолжение разрешает все множество особенностей, связанное с малыми знаменателями, и с механической точки зрения, "включает" скрытую гироскопическую стабилизацию исходной задачи, соответствующую учету гравитации.

1. Формулировка результата о точной разрешимости. Сформулируем основной результат.

Основная теорема. Универсальное пространство решений общих уравнений Эйлера-Пуассона, представляющих динамику вектора $\mathbf{M}(s)$ кинетического момента тела, $s \in C$, представляется следующими функциями:

$$\mathbf{M}(s) = \exp(L(s, \{E_Q\})),$$

где $\{E_Q\}$ – множество эллиптических кривых E_Q над полем рациональных чисел Q, функции $L(s, E_Q)$ являются L–функциями эллиптических кривых E_Q.

Замечание. 1. Функции $L(s, E_Q)$ допускают следующее представление в виде сходящихся рядов Дирихле:

$$L(s, E_Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \quad s \in C, \quad \mathrm{Re}\, s > 3/2,$$

где коэффициенты a_n определяются каноническим образом по кривой E_Q.

2. Эллиптическая кривая E_Q над полем Q задается уравнением в аффинной форме (обобщенной форме Вейерштрасса)

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6,$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in Q$.

3. Подробные определения и необходимая информация о кривых E_Q и $L(E_Q, s)$–функциях содержится, например, в [**?**].

Геометрическая интерпретация ответа. Функции $\exp(L(\{E_Q\}, s))$ представляют каноническую (многозначную) координатизацию универсального качения без проскальзывания стандартной сферы S^3 по трехмерному евклидову пространству E^3.

Универсальность качения состоит в том, что отображение качения индуцирует транзитивную монодромию гипердодекаэдра – "максимального" правильного четырехмерного многогранника – многогранника, вписанного в S^3 (см.[?]).

Данная интерпретация является аналогом известной интерпретации Пуансо волчка Эйлера для общего случая.

Связь с интегрируемостью волчков по Лиувиллю-Арнольду. Универсальное пространство решений уравнений Эйлера-Пуассона, интегрируемых по Лиувиллю-Арнольду, является подпространством в пространстве функций $\exp(L(\{E_Q\}, s))$ и представляется пространством дзета–функций кривых E_Q (см.[?],[?] и примеры в конце данной работы).

Суть точной разрешимости. Можно сказать, что точная разрешимость общих уравнений Эйлера-Пуассона является абсолютно каноническим свойством данных уравнений и аналитически выражает факт существования канонической геометрической модели данных уравнений. Именно эта взаимосвязь алгебры, геометрии и анализа для общих уравнений Эйлера-Пуассона, приводящая к феномену их точной разрешимости, составляет содержание и название данной работы.

Схема получения точной разрешимости общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Схема действий абсолютно параллельна схеме классической теории возмущений, приводящей, например, к неинтегрируемости по Лиувиллю–Арнольду слабо возмущенного волчка Эйлера (см.[?]).

Пусть H_0 – гамильтониан волчка Эйлера (невозмущенный гамильтониан). Тогда множество траекторных инвариантов (частных интегралов) его аналитического возмущения $H_0 + \epsilon H_1$ может быть представлено многозначной симметрией – одномерной группой когомологий $H^1(g^s(H_0+\epsilon H_1), g^s(H_0)(x(t)))$, где $g^s(H_0+\epsilon H_1)$ – отображение фазового потока, соответствующее возмущенному гамильтониану $H_0+\epsilon H_1$, $x(t)$ – фазовые траектории волчка Эйлера.

Учет свойства обратимости по времени уравнений волчка Эйлера позволяет заметить, что единственной связной орбитой инволюции обратимости в его фазовом пространстве оказывается сепаратриса. Отсюда следует, что любое эквивариантное аналитическое возмущение $H_0+\epsilon H_1$, которое также обратимо по времени (в силу обратимости общих уравнений Эйлера-Пуассона), индуцирует собственную симметрию сепаратрисы. Именно эта симметрия, по–сути, и определяет всю структуру возмущенной фазовой динамики.

В итоге оказывается, что эквивариантные вещественные симметрии сепаратрисы (ее эквивариантные эндоморфизмы над R) канонически координатизируются дзета–функциями эллиптических кривых над Q, а ее эквивариантные комплексные симметрии (эквивариантные автоморфизмы, причем, тоже над R) – уже L–функциями таких кривых.

Координатизация указанной картины для возмущенного волчка Эйлера конструктивно реализуется посредством построения канонической геометрической модели динамики в фазовом пространстве общих уравнений Эйлера-Пуассона и последующего введения на ней канонических координат.

Ссылки на используемые математические понятия. Информация о плоскости Лобачевского, решетках, конечных и числовых полях, абстрактных группах, группах и алгебрах Ли, группах гомологий, когомологий, топологических комплексах, модулях, тензорных произведениях модулей и резольвентах модулей содержится в [**?**],[**?**]. Информация об эллиптических кривых над Q, свойстве их модулярности, а также их L и дзета–функциях содержится в [**?**],[**?**].

4. Каноническая геометрическая конформная модель универсального фазового пространства общих уравнений Эйлера-Пуассона. Каноническая геометрическая конформная модель фазового пространства общих уравнений Эйлера-Пуассона, представляющая пространство $R^6[\gamma,\omega] \otimes_R Z_2^{n\to\infty}[t \to -t])$, где $Z_2[t \to -t]$ – симметрия обратимости по времени исходных уравнений, строится в виде специального комплекса, эквивариантно модифицирующего изометрии плоскости Лобачевского (превращая их в эквивариантный бикомплекс).

Построение указанного бикомплекса реализуется с помощью введения универсальной модулярной пары "универсальная эллиптическая кривая над полем Q – универсально параметризующая ее кривая".

Данный бикомплекс определяется канонически и имеет смысл орбиты универсальной калибровочной симметрии исходных уравнений, т.е. действительно представляет каноническую геометрическую модель фазового пространства исходных уравнений.

Его построение реализуется нижеследующими леммами 1–3. Для целостности восприятия сначала приводятся их формулировки, вводящие принципиальные для дальнейшего геометрические и алгебраические конструкции. Схема доказательства данных лемм приводится после этих формулировок.

Все возникающие в этих леммах геометрические модели будут каноническими, т.е. неприводимыми моделями с точки зрения приводимости (т.е. простоты) соответствующих им симметрий.

Будем действовать последовательно и начнем моделирование с кинематики волчка Эйлера в локально–тривиальных компонентах его лиувиллевого слоения.

Лемма 1. Кинематика волчка Эйлера (формальное пространство переменных γ, ω), соответствующая любой связной компоненте расслоения фазового пространства на лиувиллевы торы, является подмногообразием в многообразии $E_C^{univ} \otimes_{R[t]} E_C^{univ,*}$, где $R[t]$ – формальное вещественное время.

Многообразия (универсальные кривые) $E_C^{univ}, E_C^{univ,*}$ определяются следующим образом.

1. Орбита связного объединения изометрий модели Клейна плоскости Лобачевского и изометрий ее аддитивного абсолюта (топологической окружности над R со структурой аддитивной группы), реализованного симметрией $PSL_2(Q)$, представляет универсальную эллиптическую кривую над C (обозначим ее E_C^{univ}). Другими словами, $E_C^{univ} \cong \mathrm{Isom}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R_+))$, где $\mathrm{Isom}(A(R_+))$ – аналитические изометрии аддитивного абсолюта $A(R_+)$.

2. Первый канонический цикл кривой E_C^{univ} реализуется экземпляром рационального абсолюта, оснащенным аддитивной групповой структурой, второй канонический цикл, реализуется рациональным абсолютом с мультипликативной структурой.

3. Канонически определяемый групповой закон на упорядоченной диагонали произведения первого и второго цикла кривой E_C^{univ} изоморфен групповому закону на E_C^{univ}.

4. Кривая, обладающая свойствами 1-3 по отношению к замене аддитивного группового закона на мультипликативный закон, является кривой, универсально параметризующей кривую E_C^{univ} (обозначим ее $E_C^{univ,*}$).

Следующий этап действий естественным образом состоит в моделировании кинематики волчка Эйлера, продолженной посредством действия отображения инволюции обратимости $Z_2^{n\to\infty}[t \to -t]$ на бесконечный промежуток вещественного времени. Данное продолжение приводит уже к бигрупповой структуре на рациональном вещественном абсолюте плоскости Лобачевского.

Лемма 2. Кинематика волчка Эйлера, соответствующая любой связной компоненте слоения фазового пространства на лиувиллевы торы, продолженного в $t_R = \infty$, является подмногообразием в многообразии $E_R^{univ}(Q) \otimes_{R[t]} E_R^{univ,*}(Q)$.

Многообразия (универсальные кривые) $E_R^{univ}(Q), E_R^{univ,*}(Q)$ определяются следующим образом.

1. Орбита связного объединения изометрий модели Клейна плоскости Лобачевского и изометрий ее абсолюта (над R), реализованное симметрией $PSL_2(Q)$, представляет специальную эллиптическую кривую (обозначим ее $E_R^{univ}(Q)$), определяемую как бикомплекс $E_R^{univ}(Q) \cong \mathrm{Isom}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R))$, где $\mathrm{Isom}(A(R))$ – аналитические изометрии абсолюта $A(R)$.

2. Первый канонический цикл кривой $E_R^{univ}(Q)$ реализуется экземпляром рационального абсолюта, оснащенным аддитивно–мультипликативной бигрупповой структурой, а второй – экземпляром рационального абсолюта с мультипликативно–аддитивной групповой структурой. При этом групповые аддитивная и мультипликативная структуры берутся именно в указанном порядке.

3. Канонически определяемый групповой закон на упорядоченной диагонали произведения первого и второго цикла кривой $E_R^{univ}(Q)$ изоморфен групповому закону на $E_R^{univ}(Q)$.

4. Кривая, обладающая свойствами 1.–3. по отношению к замене аддитивного группового закона на мультипликативный закон, является кривой, универсально параметризующей кривую $E_R^{univ}(Q)$ (обозначим ее $E_R^{univ,*}(Q)$).

Замечание. Специальная кривая $E_R^{univ}(Q)$ является универсальной полустабильной эллиптической кривой над Q (см. соответствующее определение в [?]). Этот факт является можно получить как следствие конструкции кривой $E_R^{univ}(Q)$, которая реализуется каноническим овеществлением конструкции кривой $E_{C/R}^{univ}(Q)$, проводимым в совместном доказательстве лемм 2–3.

Следующий этап состоит в моделировании кинематики волчка Эйлера, продолженной посредством действия отображения инволюции обратимости по времени исходных уравнений, на бесконечный промежуток комплексного времени. Замечание к лемме 6 показывает, что данная модель представляет кинематику общего аналитического возмущения волчка Эйлера.

Следующее утверждение формулируется полностью аналогично лемме 2. Поэтому приведем его сокращенную формулировку (это не касается п.3).

Лемма 3. Кинематика волчка Эйлера, соответствующая любой связной компоненте слоения фазового пространства на лиувиллевы торы, продолженного в $t_C = \infty$, является подмногообразием в многообразии $E^{univ}_{C/R}(Q) \otimes_{R[t]} E^{univ,*}_{C/R}(Q)$

Многообразия (универсальные кривые) $E^{univ}_{C/R}(Q), E^{univ,*}_{C/R}(Q)$ определяются следующим образом.

1. Орбита связного объединения изометрий модели Клейна плоскости Лобачевского и изометрий ее комплексифицированного абсолюта (топологической окружности над C), реализованное симметрией $PSL_2(Q)$, представляет специальную эллиптическую кривую над Q, определяемую как бикомплекс $E^{univ}_{C/R}(Q) \cong \mathrm{Isom}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(C))$, где $\mathrm{Isom}(A(C))$ – аналитические изометрии абсолюта $A(C)$ – комплексификации абсолюта $A(R)$.

При этом кривая $E^{univ}_{C/R}(Q)$ является универсальной эллиптической кривой над Q. Это значит, что для любой кривой E_Q имеется точный гомоморфизм $E_Q \to E^{univ}_{C/R}(Q)$.

2. Кривая, обладающая соответствующими свойствами по отношению к замене аддитивного группового закона на мультипликативный закон, является кривой, универсально параметризующей кривую $E^{univ}_{C/R}(Q)$ (обозначим ее $E^{univ,*}_{C/R}(Q)$).

3. Кривые $E^{univ}_{C/R}(Q), E^{univ,*}_{C/R}(Q)$ являются универсальными эллиптическими кривыми для кривых E_Q и $X_0(N)$ соответственно.

Теперь приведем схему доказательства лемм 1–3. Конструкции этого доказательства, в основном, введены в [?] и [?], подробное доказательство в данной опущено по причине его объемности.

Схема доказательства лемм 1–3. Доказательство сводится к канонической координатизации эквивариантной компактификации с помощью инволюции обратимости $Z_2[t \to -t]$ свободного двояко–асимптотического движения на сепаратрисе случая Эйлера, реализованного эквивариантным комплексом:

$$0 \to \{\text{асимптотическое движение}\} \xrightarrow{\partial} \{\text{двояко–асимптотическое движение}\} \to 0$$

Отображением дифференциала ∂ в данном комплексе является оператор кинематической группы исходных гамильтоновых уравнений общего волчка – оператор уравнений Пуассона.

Определение эквивариантной компактификации двояко–асимптотического движения последовательно над полями R (лемма 2) и C (лемма 3) посредством отображения обратимости по времени уравнений волчка Эйлера приводит к определению модулярной пары "универсальная эллиптическая кривая кривая E_Q^{univ} – универсально параметризующая ее кривая $E_Q^{univ,*}$".

Это топологическое пространство конструктивно строится по кривым E_Q^{univ}, $E_Q^{univ,*}$ и изоморфно $E_Q^{univ} \otimes_R E_Q^{univ,*}$. Данное пространство является орбитой специального расширения рациональных изометрий плоскости Лобачевского, и соответственно, является естественным расширением изометрии, орбитой которой является пара $E_C^{univ} \otimes_R E_C^{univ,*}$ из леммы 1 (тензорное произведение берется над полем R по естественной причине – это область определения инволюции $Z_2[t \to -t]$, орбитами которой и являются тензорно перемножаемые объекты).

Затем показывается, что кинематика аналитически возмущенного волчка Эйлера изоморфна как раз пространству $E_Q^{univ} \otimes_R E_Q^{univ,*}$, приобретающему смысл универсального фазового пространства общих уравнений Эйлера-Пуассона, изоморфного пространству $R^6[\gamma, \omega] \otimes_R Z_2^{n \to \infty}[t \to -t]$.

Взаимосвязь лемм 1,2,3 состоит в том, что пространство $E_Q^{univ} \otimes_R E_Q^{univ,*}$ имеет каноническую структуру бикомплекса (CW – бикомплекса):

$$E_C^{univ} \otimes_R E_C^{univ,*} \to E_R^{univ}(Q) \otimes_R E_R^{univ,*}(Q) \to E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes_R E_{C/R}^{univ,*}(Q) \cong E_Q^{univ} \otimes_R E_Q^{univ,*}$$

Модулярные пары из данной точной последовательности строятся на основе канонического расщепления рациональных изометрий плоскости Λ для моделирования ими двояко–асимптотических движений волчка Эйлера и их аналитических возмущений.

Связь данного бикомплекса с эллиптическими кривыми E_Q над полем Q отражает универсальность кривых E_Q^{univ} и $E_Q^{univ,*}$. Эта связь является канонической и реализуется точными отображениями эквивариантной компактификации инволюцией $Z_2^{n\to\infty}[t \to -t]$:

$$E_Q \overset{Z_2^{n\to\infty}[t\to -t]}{\longrightarrow} E_Q^{univ}, \quad X_0(N) \overset{Z_2^{n\to\infty}[t\to -t]}{\longrightarrow} E_Q^{univ,*},$$

где $X_0(N)$ – кривая, параметризующая кривую E_Q в соответствии со свойством модулярности для кривых E_Q (см. [?]).

Другими словами, свойство модулярности кривых E_Q эквивариантно и канонически реализуется структурой пространства $E_Q^{univ} \otimes_R E_Q^{univ,*}$ как бикомплекса: каждая пара $(E_Q, X_0(N))$ реализуется в нем как собственное подпространство (подбикомплекс).

Таким образом, важным оказываются не кривые E_Q сами по себе, а свойство их модулярности.

Конструкция модулярной пары $E_R^{univ}(Q) \otimes_R E_R^{univ,*}(Q)$ состоит в следующем каноническом расщеплении относительных рациональных изометрий плоскости Λ (здесь и далее – в модели Клейна) на двойственные эквивариантные CW–комплексы соответственно:

$$E_R^{univ}(Q) \cong (PSL_2(R)/PSL_2(Q))_{CW},$$

$$E_R^{univ,*}(Q) \cong (PSL_2(Q) \setminus PSL_2(R))_{CW}$$

Модулярная пара $E_R^{univ}(Q) \otimes_R E_R^{univ,*}(Q)$ представляет корректно определенный тензорный квадрат эквивариантной компактификации свободного двояко–асимптотического движения $x^{univ}(\overline{t_R}) \cong x^{univ}(t \otimes_R Z_2^{n\to\infty}[t \mapsto -t])$ волчка Эйлера в виде бикомплекса:

$$x^{univ}(\overline{t_R})^{\otimes 2} \cong E_R^{univ}(Q) \otimes_R E_R^{univ,*}(Q) \cong$$

$$\cong (PSL_2(R)/PSL_2(Q))_{CW} \otimes_R (PSL_2(Q) \setminus PSL_2(R))_{CW}$$

Данный бикомплекс канонически представляет продолженное в $t_R = \infty$ лиувиллево слоение фазового пространства волчка Эйлера.

Конструкция модулярной пары $E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes_R E_{C/R}^{univ,*}(Q)$ состоит в комплексификации канонического расщепления комплексифицированных относительных рациональных изометрий плоскости Λ на двойственные эквивариантные CW–комплексы соответственно:

$$E_{C/R}^{univ}(Q) \cong (PSL_2(C/R)/PSL_2(Q))_{CW},$$

$$E_{C/R}^{univ,*}(Q) \cong (PSL_2(Q) \setminus PSL_2(C/R))_{CW}$$

Модулярная пара $E^{univ}_{C/R}(Q) \otimes_R E^{univ,*}_{C/R}(Q)$ канонически представляет тензорный квадрат комплексификации $x^{univ}(\overline{t_C})$ компактифицированного свободного двояко–асимптотического движения $x^{univ}(\overline{t_R})$ волчка Эйлера в виде бикомплекса:

$$x^{univ}(\overline{t_C})^{\otimes 2} \cong E^{univ}_{C/R}(Q) \otimes_R E^{univ,*}_{C/R}(Q) \cong$$

$$\cong (PSL_2(C/R)/PSL_2(Q))_{CW} \otimes_R (PSL_2(Q) \setminus PSL_2(C/R))_{CW}$$

Данный бикомплекс канонически представляет комплексификацию продолженного в $t_C = \infty$ лиувиллевого слоения фазового пространства волчка Эйлера, представленного в виде указанного выше бикомплекса.

5. Каноническая геометрическая конформная модель динамики общих уравнений Эйлера-Пуассона. Каноническая геометрическая модель динамики в универсальном фазовом пространстве общих уравнений Эйлера-Пуассона схематично строится в виде комплекса – производного комплекса от комплекса, представляющего универсальное фазовое пространство исходных уравнений, следующим образом:

$$0 \to \{\text{асимптотическое движение}\} \xrightarrow{\partial_1} \{\text{двояко–асимптотическое движение}\} \xrightarrow{\partial_2}$$

$$\xrightarrow{\partial_2} \{\text{аналитическое возмущение двояко–асимптотического движения}\} \to 0$$

Отображением дифференциала ∂_1 в данном комплексе является оператор кинематической группы исходных гамильтоновых уравнений – оператор уравнений Пуассона.

Отображением дифференциала ∂_2 в данном комплексе является оператор динамической группы исходных гамильтоновых уравнений общего волчка – оператор уравнений Эйлера-Пуассона.

Эквивариантная компактификация указанного комплекса отображений посредством инволюции $Z_2[t \to -t]$ реализует эквивариантное гладкое (класса C^1) продолжение потока на фазовых траекториях волчка Эйлера, формально определенного над вещественным временем R, уже на бесконечный интервал времени и, в итоге, приводит к групповым законам на эллиптических кривых над полем Q, представленными функциями $\exp(L(s, E_Q)$, именно как к универсальному пространству решений общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Следующие утверждения реализуют конструкцию указанной модели.

Лемма 4. 1. Продолженный в $t_R = \infty$ фазовый поток изоэнергетического волчка Эйлера представляется симметрией $\mathrm{Ad}(PSL_2(R)/PSL_2(Q))$.

2. Продолженный в $t_R = \infty$ фазовый поток неизоэнергетического волчка Эйлера представляется симметрией $\mathrm{Ad}(PGL_2(R)/PSL_2(Q))$, являющейся эквивариантным центральным расширением симметрии $\mathrm{Ad}(PSL_2(R)/PSL_2(Q))$.

Лемма 5. 1. Продолженный в $t_C = \infty$ фазовый поток изоэнергетического волчка Эйлера представляется симметрией $\mathrm{Ad}(PSL_2(C)/PSL_2(Q))$.

2. Продолженный в $t_C = \infty$ фазовый поток неизоэнергетического волчка Эйлера представляется симметрией $\mathrm{Ad}(PGL_2(C)/PSL_2(Q))$, являющейся эквивариантным центральным расширением симметрии $\mathrm{Ad}(PSL_2(C)/PSL_2(Q))$.

Замечание. Тот факт, что фазовая динамика волчка Эйлера, продолженная на бесконечный промежуток комплексного времени, оказывается динамикой общего аналитического возмущения волчка Эйлера показывается в лемме 10. Отсюда следует, что кинематические симметрии, описанные в лемме 3, представляют кинематические симметрии также общего аналитического возмущения волчка Эйлера.

Приведем схему доказательства леммы 5. Опускаемое доказательство леммы 4 получается овеществлением конструкций доказательства леммы 6, которое определено канонически в силу леммы 3.

Схема доказательства леммы 5. 1. Пункт 1 следует из того, что имеются точные последовательности эквивариантных отображений, включающие фазовый поток на продолжении в $t_C = \infty$ произвольного лиувиллевого тора $\overline{T^2}$ в присоединенную симметрию $\mathrm{Ad}(PSL_2(C/R)/PSL_2(Q))$:

$$\overline{T^2_{rat}} \xrightarrow{J(\mathrm{mod}\, m_+)} \overline{L_i} \xrightarrow{J} PSL_2(C/R)/PSL_2(Q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(J)} \mathrm{Ad}(PSL_2(C/R)/PSL_2(Q)) \cong g^s(E_Q^{univ})$$

для продолжений в $t_C = \infty$ рациональных торов T^2_{rat} и лиувиллевых блоков L_i; соответственно для продолжений иррациональных торов T^2_{irr}:

$$\overline{T^2_{irr}} \xrightarrow{J(\mathrm{mod}\, m_\times)} \overline{L_i} \xrightarrow{J^{-1}} PSL_2(C/R)/PSL_2(Q) \xrightarrow{\mathrm{Ad}(J)} \mathrm{Ad}(PSL_2(C/R)/PSL_2(Q)) \cong g^s(E_Q^{univ,*})$$

где J – отображение изоморфизма $J \cong \{E^{univ}_{C/R}(Q) \cong E^{*,univ}_{C/R}(Q)\}$, $\mathrm{Ad}(J)$ – присоединенное к J отображение, J^{-1} – корректно определенное обратное отображение к J; отображения $J(\mathrm{mod}\, Z_{m_+})$ $J(\mathrm{mod}\, Z_{m_\times})$ – локализации изоморфизма J в аддитивную и мультипликативную группу конечного m–элементного кольца Z_m соответственно.

2. Утверждение пункта 2 следует из свойств изоморфизма J.

Симметрия $PGL_2(C/R)/PSL_2(Q)$ является эквивариантным центральным расширением симметрии $PSL_2(C/R)/PSL_2(Q)$. Эквивариантность данного расширения выражается в его J–инвариантности.

6. Каноническая координатизация канонической геометрической модели фазового пространства общих уравнений Эйлера-Пуассона. Следующие утверждения координатизируют универсальное фазовое пространство общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Лемма 7. Эквивариантное векторное пространство (эквивариантный модуль) $H^1(E_R^{univ}(Q), C)$ обладает канонической резольвентой, представляемой бесконечной точной последовательностью отображений модулей:

$$... \to H^1(E_R^{univ}(Q), [p^{-s}]) \to ... \to H^1(E_R^{univ}(Q), [2^{-s}]) \to H^1(E_R^{univ}(Q), [1^{-s}]) \to$$

$$\to H^1(E_R^{univ}(Q), C) \to 0$$

где $E_R^{univ}(Q)$ – универсальная эллиптическая кривая, определенная в лемме 2, числовой параметр p пробегает все множество простых чисел.

Это точный комплекс эквивариантных модулей, имеющих структуру абелевых биггрупп, и представляющий полную систему генераторов непрерывного отображения инволюции обратимости по вещественному времени для уравнений волчка Эйлера.

Замечание. Каждый член последовательности корректно определен, поскольку для каждого p отображение $C \to C[p^{-s}]$ индуцирует аналитический автоморфизм поля C. Можно показать, что с геометрической точки зрения данная последовательность представляет монодромное по координатам и по скоростям (линейной, угловой) аналитическое движение тетраэдра в пространстве $E^3(R)$.

Доказательство.

1. Идея вычисления. Основная идея вычисления состоит в редукции вычисления координат на канонической геометрической модели фазового пространства волчка Эйлера над вещественным временем, пополненным точкой $t_R = \infty$ (лемма 2), к вычислению координат на отображении инволюции обратимости по времени, генерирующим универсальную транзитивную симметрию данной модели.

При этом, в силу свойств геометрической модели, структура указанного отображения инволюции оказывается естественной симметризацией ее аддитивной и мультипликативной компонент:

$$H^1(E_R^{univ}(Q), C) \cong H^1(E_R^{univ}(Q), C \cup_{J(R)} \infty) \cong$$

$$\cong \lim_{n\to\infty} H^1(S^1/Z_2^n[t \to -t] \otimes_R Z_2^n[t \to t^{-1}], S^1/Z_2^n[t \to t^{-1}] \otimes_R Z_2^n[t \to -t]) \cong$$

$$\cong \lim_{n\to\infty} H^1(S^1/i^n_{+,\times}, S^1/i^n_{\times,+})$$

Данное отображение итерированной относительной инволюции (или биинволюции) является симметризацией компоненты отображения исходного фундаментальной инволюции (условно обозначаемой $Z_2[t \to -t]$) с неподвижной точкой в $t_R = 0$ (это отображение $i^n_{+,\times}$) и ее компоненты с неподвижной точкой в $t_R = \infty$ (это отображение $i^n_{\times,+}$).

Координаты на данном симметризующем расщеплении исходной инволюции удается явно вычислить, поскольку удается найти координаты на каждом из отображений инволюций по отдельности и осуществить их склейку.

2. Вычисление. Перейдем непосредственно к вычислениям, которые разобъем на этапы. Объект, подлежащий координатизации – кривая $E_R^{univ}(Q)$ – может быть представлен через свои циклы:

$$H^1(E_R^{univ}(Q), C \cup_{J(R)} \infty) \cong H^1((c_1[E_R^{univ}(Q)], c_2[E_R^{univ}(Q)])$$

a. В соответствии со структурой циклов эллиптической кривой $E_{R/Q}^{univ}$, определенных в лемме 2, имеем:

$$H^1((c_1[E_R^{univ}(Q)], c_2[E_R^{univ}(Q)]) \cong$$

$$\cong H^1((\lim_{n\to\infty} S^1/Z^n[t \to -t] \otimes_R Z_2^n[t \to t^{-1}]), \lim_{n\to\infty}(S^1/Z^n[t \to t^{-1}] \otimes_R Z_2^n[t \to -t]))) \cong$$

$$\cong H^1(S^1/\lim_{n\to\infty}(F_p \otimes_R S^1), S^1/\lim_{p\to\infty}(S^1 \otimes_R F_p))$$

где $p = p(n)$ – простое число, зависящее от натурального n, F_p – поле из p элементов.

Здесь простоту числа p обеспечивает мультипликативная компонента $Z_2^n[t \to t^{-1}]$ фундаментальной инволюции. Натуральное число n обеспечивает пробегание множества всех простых чисел (см. п.б доказательства).

Вычисление полученной группы когомологий можно провести с помощью точной последовательности отображений:

$$S^1[F_p \otimes_R C[s]] \xrightarrow{r_p} S^1[(D_2^{\text{diag}})^n] \xrightarrow{s_p} S^1[C[s] \otimes_R F_p]$$

где $p = p(n)$, D_2^{diag} – корректно определенная диагональ произведения абелевых групп, определяемая следующим образом:

$$D_2^{\text{diag}} \cong \text{Diag}(D_2^{+,\times} \times D_2^{\times,+})$$

где

$$D_2^{+,\times} \cong \text{generator}(c_1(E_R^{univ}(Q)) \otimes_R c_2(E_R^{univ}(Q)))$$

$$D_2^{+,\times} \cong \text{generator}(c_2(E_R^{univ}(Q)) \otimes_R c_1(E_R^{univ}(Q)))$$

Отображения R_p и S_p представляют непрерывные автоморфизмы окружности $S^1[(D_2^{\text{diag}})^n]$.

Отображение композиции $R_p^{-1} \circ S_p$ представляет непрерывный автоморфизм окружности $S^1[(D_2^{\text{diag}})^n]$. В силу Z_2–градуировки многообразия $S^1[(D_2^{\text{diag}})^n]$ отображение $R_p^{-1} \circ S_p$ является биавтоморфизмом стандартной окружности S^1:

$$S^1[F_p \otimes_R C[s]] \xrightarrow{R_p^{-1} \circ S_p} S^1[C[s] \otimes_R F_p]$$

Каждый непрерывный автоморфизм окружности S^1 представляется экспоненциальным отображением. Поэтому автоморфизм $R_p^{-1} \circ S_p$ окружности $S^1[(D_2^{\text{diag}})^n]$ представляется локальным экспоненциальным отображением, которое в силу приведенных выше точных последовательностей имеет канонический вид:

$$(R_p^{-1} \circ S_p)[S^1[(D_2^{\text{diag}})^n]] = p^{-s}$$

б. Возможность реализации любого простого числа p следует из точности $R_p^{-1} \circ S_p$ – инвариантной последовательности отображений

$$0 \to N \xrightarrow{J} Q \xrightarrow{J} \{F_p\} \to 0$$

где $J \cong \{Sp_{E^2} \cong Sp^*_{E^2}\}$ (см. доказательство л.3), N – множество натуральных чисел, и вытекающей отсюда сюръективности отображения $N \to \{F_p\}$, индуцированного указанной точной последовательностью отображений.

в. Теперь лемма следует из того, что циклы $c_1(E_R^{univ}(Q)), c_2(E_R^{univ}(Q))$ представляются комплексами точного действия на них универсальных фактор–биинволюций $\lim_{n\to\infty}(i_{+,\times}^n)$ и $\lim_{n\to\infty}(i_{+,\times}^n)$. Композиция этих действий канонически координатизируется отображениями $R_p^{-1}\circ S_p$, $p\to\infty$, также организованными в комплекс. Соответствующая часть указанного комплекса циклов представляется короткой точной последовательностью отображений:

$$1\to c_1(E_R^{univ}(Q))\xrightarrow{R_p^{-1}\circ S_p} c_2(E_R^{univ}(Q))\to 1$$

Замечание. Точную последовательность отображений $R_p^{-1}\circ S_p$ можно интерпретировать следующим образом:

– это последовательные (по натуральному номеру n) Z_2–градуированные биобороты фазовой динамики волчка Эйлера, представленной в кольце; при этом группы $D_2^{+,\times}, D_2^{+,\times}$ можно интерпретировать как генераторы биоборотов указанного кольца в противоположных бинаправлениях;

– это непрерывная бимонодромия тетраэдра со свободным центром в евклидовом пространстве E^3 (т.е. монодромию по координатам и компонентам угловой скорости).

Замечание. Аналогичным образом можно получить аддитивное представление натурального параметра на $E_R^{univ}(Q)$, т.е. представление через эквивариантную сумму слагаемых вида n^{-s}, соответствующую аддитивному представлению действия фундаментальной инволюции $Z_2[t\to -t]$ через рассмотренные фактор–биинволюции.

Лемма 8. Для любого простого числа p имеет место короткая точная последовательность эквивариантных векторных пространств (эквивариантных модулей)

$$1\to H^1(E_R^{univ}(Q),[p^{-s}]^0)\to H^1(E_R^{univ}(Q),[p^{-s}]^1)\to 1$$

Доказательство. Утверждение следует из точности действий отображений фактор–биинволюций $R_p^{-1}\circ S_p$, определенных в доказательстве леммы 7, на канонических базисных циклах $c_1(E_R^{univ}(Q)), c_2(E_R^{univ}(Q))$ кривой $E_R^{univ}(Q)$. Данные действия представляются точными последовательностями отображений:

$$1\to c_1(E_R^{univ}(Q))\xrightarrow{R_p^{-1}\circ S_p} c_2(E_R^{univ}(Q))\to 1$$

Возможность реализации любого простого числа p следует из пункта б. доказательства леммы 7.

Лемма 9. Эквивариантное векторное пространство (эквивариантный модуль) $H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), C)$ обладает канонической резольвентой, представляемой бесконечной точной последовательностью отображений фактор–модулей

$$... \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [p^{-2s}])/H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [p^{-s}]) \to ...$$

$$... \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [2^{-2s}])/H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [2^{-s}]) \to$$

$$\to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [1^{-2s}])/H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [1^{-s}]) \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), C) \to 0$$

Замечание. Данная последовательность представляет точный комплекс эквивариантных фактор–модулей, имеющих структуру абелевых фактор–бигрупп, и представляющий непрерывное отображение инволюции обратимости по комплексному времени для уравнений волчка Эйлера.

Этот комплекс можно рассматривать как эквивариантную комплексификацию, комплекса из л.7, представляющего непрерывное отображение инволюции обратимости по вещественному времени для аналитических уравнений волчка Эйлера.

Можно показать (используя конструкции доказательств лемм 1–3), что с геометрической точки зрения данная последовательность представляет монодромное по координатам и по скоростям (линейной, угловой) аналитическое движение тетраэдра в пространстве $E^3(C)$.

Доказательство. Доказательство леммы опирается на геометрическую модель л.3 и является эквивариантной комплексификацией конструкций доказательства из л.7 и проводится по той же схеме.

Лемма 10. Для любого простого числа p имеет место короткая точная последовательность эквивариантных модулей

$$1 \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [p^{-s}]^0) \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [p^{-s}]^1) \to H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), [p^{-s}]^2) \to 1$$

Доказательство. Доказательство получается эквивариантной комплексификацией конструкции доказательства л.8, поскольку в силу л.3 кривая $E^{univ}_{C/R}(Q)$ является эквивариантной комплексификацией кривой $E^{univ}_{R}(Q)$.

7. Каноническая координатизация канонической геометрической конформной модели фазовой динамики общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Завершающим этапом доказательства точной разрешимости общих уравнений Эйлера-Пуассона является каноническая координатизация производных комплексных рациональных изометрий плоскости Лобачевского – канонической конформной модели фазовой динамики данных уравнений в соответствии с леммой 6.

Доказательство основной теоремы.

Учет свойства обратимости по времени в соответствии с леммами 1–6 отвечает следующей точной последовательности отображений:

$$0 \xrightarrow{J} 1 \to R \to x(t) \to g^s(H_0) \to g^s(E_R^{univ}(Q)) \to g^s(E_{C/R}^{univ}(Q)) \to g^s(H_0 + \epsilon H_1) \to 1 \xrightarrow{J} 0$$

Нам потребуется мультипликативная часть этой последовательности, получающая из нее отображением ограничения $J \cong \{J_{E^2}^* \cong J_{E^2}\} \mapsto J_\times \cong \{J_{E^2}^* \to J_{E^2}\}$:

$$1 \to R \to x(t) \to g^s(H_0) \to g^s(E_R^{univ}(Q)) \to g^s(E_{C/R}^{univ}(Q)) \to g^s(H_0 + \epsilon H_1) \xrightarrow{F} 1$$

С учетом того, что $1 \cong \mathrm{id}\, R_\times$, где $R_\times$ – мультипликативная структура на R и в соответствии с определением универсальной кривой $E_{C/R}^{univ}(Q)$ данная последовательность мультипликативно расщепляется в члене $g^s(E_R^{univ}(Q)) \to g^s(E_{C/R}^{univ}(Q))$, т.е. имеется изоморфизм ядра $\mathrm{Ker}\, F$ следующей композиции отображений

$$\mathrm{Ker}\, F \cong g^s(H_0) \circ g^s(H_0 + \epsilon H_1))$$

и при этом имеется индуцированное мультипликативное разложение одномерных когомологий ядра $\mathrm{Ker}\, F$:

$$H^1(\mathrm{Ker}\, F, C \cup_{J_\times(C/R)} \infty) \cong H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1)), C \cup_{J_\times(C/R)} \infty) \otimes_{E_{C/R}^{univ}(Q)} H^1(g^s(H_0), C \cup_{J_\times(R)} \infty) \cong$$

$$\cong H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1)), C \cup_{J_\times(C/R)} \infty) \times H^1(g^s(H_0), C \cup_{J_\times(R)} \infty)$$

где отображения $J_\times(R), J_\times(C/R)$ являются отображениями эквивариантной компактификации областей определения уравнений волчка Эйлера и общих уравнений Эйлера-Пуассона соответственно.

Замечание. Замена $\{1 \cong \mathrm{id}\, R_\times\} \to \{0 \cong \mathrm{id}\, R_\times\}$ в указанной точной последовательности в итоге приводит к аддитивной структуре для искомых инвариантов, соответствующему аддитивному представлению функций $L(s, E_Q)$.

Последовательности отображений, представляющей поток $g^s(H_0+\epsilon H_1)$, соответствует комплекс, представляющий групповой закон $g^s(E_{C/R}(Q))$ на универсальной кривой $E^{univ}_{C/R}(Q)$:

$$1 \to E_C \to E^{univ}_R(Q) \to E^{univ}_{C/R}(Q) \to g^s(E_{C/R}(Q)) \to 1$$

Данная точная последовательность связана с групповыми законами на остальных эллиптических кривых отображениями естественного вложения id:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & E^{univ}_R(Q) & \longrightarrow & E^{univ}_{C/R}(Q) & \longrightarrow & g^s(E_{C/R}(Q)) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & \Big\downarrow{\scriptstyle id} & & & & \\
 & & g^s(E_R(Q)) & \longrightarrow & g^s(E_{C/R}(Q)) & & & &
\end{array}$$

В обратимом времени (новом глобальном времени) нетеровы (одномерные) инварианты аналитического возмущения $H_0 + \epsilon H_1$ явно вычисляются. Для этого произведем преобразования, "перенормирующие фазовое пространство исходных уравнений на каноническую модель" для произвольного возмущения произвольного движения $x(t)$:

$$H \cong H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t)), g^s(H_0)(x(t))) \cong$$

$$\cong H^1(H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t)), g^s(H_0))(x(t)), E^{univ}_{C/R}(Q))$$

Отображение перенормировки $R[t] \to H^1(R, E^{univ}_{C/R}(Q))$ представляет отображение перехода от вещественного времени $R[t]$ к универсальному обратимому времени для общих уравнений Эйлера-Пуассона.

В силу указанного выше мультипликативного расщепления ядра $\operatorname{Ker} F$ получаем:

$$H \cong H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t)), E^{univ}_{C/R}(Q)) \times H^1(g^s(H_0)(x(t)), E^{univ}_R(Q))$$

Вычислим подпространство $g^s(H_0)(x(t))$ пространства одномерных инвариантов H, пользуясь леммой 2, определяющей перенормировку фазовых траекторий на кривую $E^{univ}_R(Q)$:

$$g^s(H_0)(x(t)) \cong g^s(E^{univ}_R(Q) \otimes x(t)) \cong g^s(pr_{x(t)}(E^{univ}_R(Q))) \cong g^s(E_Q[s, x(t)])$$

где $pr_{x(t)}(E^{univ}_{C/R}(Q))$ – отображение естественной проекции универсальной кривой $E^{univ}_{C/R}(Q)$, имеющей смысл универсального движения, на движение $x(t)$.

Теперь из экспоненциальности группового закона на каждой кривой $E_Q[s,x(t)])$ получаем, что

$$g^s(E_Q[s,x(t)]) \cong H^1(E_Q[s,x(t)], E_R^{univ}(Q) \otimes E_Q[s,x(t)])$$

Данные когомологии определены над $C \cup_{J(C/R)} \infty$, поскольку универсальная эллиптическая кривая $E_{C/R}^{univ}(Q)$ в силу ее конструкции в лемме 3 определена над $C \cup_{J(C/R)} \infty$.

Аналогично вычисляется подпространство $g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t))$ пространства H. Для этого используется лемма 3, определяющая перенормировку фазовых траекторий $x(t)$ на кривую $E_{C/R}^{univ}(Q)$:

$$g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t)) \cong g^s(E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes E_Q[s,\epsilon,x(t)])$$

Из универсальности кривой $E_{C/R}^{univ}(Q)$ и экспоненциальности группового закона на кривых $E_R^{univ}(Q)$ и $E_Q[s,\epsilon,x(t)])$ получаем, что

$$g^s(E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes E_Q[\epsilon]) \cong H^1(E_Q[s,\epsilon,x(t)], E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes E_Q[s,\epsilon,x(t)])$$

Из модели леммы 6 следует, что высшие порядки теории возмущений стабилизируются на первом порядке:

$$g^s(H_0 + \epsilon H_1)(x(t)) \cong g^s(H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2)(x(t))$$

Таким образом, пространство H–инвариантов представляется как пространство следующих инвариантов относительных многозначных групповых законов:

$$H \cong H^1(g^s(E_{C/R}^{univ}(Q)), g^s(E_R^{univ}(Q)))$$

Поскольку имеет место точная последовательность отображений

$$1 \to g^s(E_R^{univ}(Q)) \to g^s(E_{C/R}^{univ}(Q)) \to 1,$$

то пространство H–инвариантов (в его мультипликативной реализации $H \cong H^1(g^s(E_{C/R}^{univ}(Q) \otimes J_\times(C)), g^s(E_R^{univ}(Q)) \otimes J_\times(R)))$ имеет каноническую структуру комплекса.

Поэтому установление структуры пространства H–инвариантов эквивалентно вычислению когомологий данного комплекса.

Вычислим относительные когомологии $H^1(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q))$ (в мультипликативной реализации), пользуясь точной последовательностью, определяющей кривую $E^{univ}_{C/R}(Q)$ (леммы 1–3) как комплекс:

$$1 \to E_Q \to E^{univ}_R(Q) \to E^{univ}_{C/R}(Q) \to 1$$

В соответствии с леммой 8 вычисления одномерных локальных (т.е. по $\bmod p$) когомологий $H^1(E_Q, E^{univ}_R(Q))_{loc}$ (здесь выражение loc – обозначение для локальных когомологий) таковы:

$$H^1(E_Q, E^{univ}_R(Q) \otimes J_\times)_{loc} \cong H^1(E_Q \otimes ((p^{-s})^1/(p^{-s})^0), E^{univ}_R(Q)) =$$

$$= (1 - a(p)p^{-s})$$

где выражение $(p^{-s})^1/(p^{-s})^0$ имеет смысл фактор–отображения определенного выше; коэффициент инцидентности $a(p)$ специфичен для каждой кривой E_Q и является ее локальным инвариантом:

$$a(p) = H^0(E_Q, E^{univ}_R(Q) \otimes J_\times)_{loc}.$$

В соответствии с леммой 10 для комплексификации локальных когомологий фактор–комплекса $E^{univ}_{C/R}(Q)/E^{univ}_R(Q)$ получаем:

$$H^1(E_Q \otimes ((p^{-s})^2/(p^{-s}))^1/(p^{-s})^0, E^{univ}_{C/R}(Q)/E^{univ}_R(Q)) =$$

$$= (1 - a(p)p^{-s} + pp^{-2s})$$

где коэффициент инцидентности – число p – инвариантно представляется как

$$p = H^0(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q) \otimes J_\times)_{loc}/H^0(E_Q, E^{univ}_R(Q) \otimes J_\times)_{loc}$$

и является простым числом; при этом, в силу лемм 7 и 9, все простые числа реализуются таким образом.

Числа $a(p), p$ представляют соответствующие коэффициенты инцидентности между остовами точного когомологического комплекса, представляющего кривую E_Q. Из определения данных чисел следует, что они являются каноническими скалярными инвариантами соответствующей кривой E_Q.

Из указанной выше мультипликативной разложимости пространства H–инвариантов следует, что в случае кривой E_Q "общего положения", соответствующему возмущению волчка Эйлера, имеет место следующее разложение:

$$H^1(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q)\otimes J_\times)_{loc} = H^1(H^1(E_Q, E^{univ}_R(Q)), E^{univ}_{C/R}(Q)\otimes J_\times)_{loc} =$$

$$= (1-a(p)p^{-s}+pp^{-2s})(1-a(p)p^{-s})$$

Учет структуры резольвент для пространств $H^1(E^{univ}_R(Q), C)$, $H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), C)$ в соответствии с леммами 7 и 9, и их ацикличность (леммы 8 и 10) дают:

$$H^1(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q)\otimes J_\times) =$$

$$= \prod_p (1-a(p)p^{-s}+pp^{-2s})^{-1} \prod_p (1-a(p)p^{-s})^{-1} = L^0(s, E_Q),$$

где $L^0(s, E_Q)$ – обозначение для получившейся функции комплексного аргумента.

Из каноничности определения численных инвариантов $a(p), p$, а также каноничности определения L–функции (его мультипликативного варианта) эллиптической кривой E_Q следует, что

$$L^0(s, E_Q) = L(s, E_Q)$$

Теперь вычислим когомологии пространства H, представленного комплексом

$$1 \to H^1(g^s(E^{univ}_R(Q)), C\cup_{J_\times(R)}\infty) \to H^1(g^s(E^{univ}_{C/R}(Q)), C\cup_{J_\times(C/R)}\infty) \to H \to 1$$

Пользуясь экспоненциальностью группового закона на кривых $E^{univ}_{C/R}(Q), E^{univ}_R(Q)$ и установленной выше структурой пространства $H^1(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q))$ в мультипликативном представлении $H^1(E_Q, E^{univ}_{C/R}(Q)\otimes J_\times)$, получаем:

$$H \cong H^1(g^s(E_Q\otimes E^{univ}_R(Q)), g^s(E^{univ}_{C/R}(Q))) \cong$$

$$\cong H^1(E_Q, H^1(E^{univ}_{C/R}(Q), E_Q)) = \exp(L(E_Q, s)),$$

Замечание. Отображение перенормировки $E_Q\otimes E^{univ}_{C/R}(Q)$ представляет эквивариантную натуральную параметризацию кривой E_Q, которая определена канонически в силу каноничности определения кривых $E^{univ}_R(Q)$ и $E^{univ}_{C/R}(Q)$ в леммах 2,3.

Поэтому выражение $\exp(L(E_Q, s))$ представляет эквивариантный (многозначный) групповой закон на эллиптической кривой E_Q. Здесь он получен в мультипликативной реализации.

Теперь доказательство теоремы следует из следующей леммы, согласующей комплексификацию фазовой динамики волчка Эйлера из леммы 6 с координатизацией ее аналитического возмущения, проведенной только что выше.

Лемма 11. Функциональный комплекс

$$1 \to H^1(g^s(E_R^{univ}(Q)), C) \to H^1(g^s(E_{C/R}^{univ}(Q)), C) \to H \to 1$$

где $H \cong H^1(E_Q, H^1(E_{C/R}^{univ}(Q), E_Q))$, представляет полное пространство решений общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Замечание. Данный комплекс представляет мультипликативную реализацию полного пространства решений общих уравнений Эйлера-Пуассона. Как было выше показано $H \cong H^1(E_Q, H^1(E_{C/R}^{univ}(Q), E_Q)) = \exp(L(E_Q, s))$.

Доказательство.

1. H**–инварианты – решения общих уравнений Эйлера-Пуассона.**

Фазовый поток общих уравнений Эйлера-Пуассона можно представить в виде формального аналитического возмущения фазового потока волчка Эйлера:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = H_1(g^s(H_0 + \epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t)))$$

где $x_E(t) \in \{x_E(t)\}$ – пространство фазовых траекторий волчка Эйлера.

Будем рассматривать представление фазовых потоков $g^s(H_0)$ и $g^s(H_0 + \epsilon H_1)$ в ортогональной группе $O(3)$ трехмерного евклидового пространства E^3. Таким образом, группа одномерных гомологий в правой части уравнений представляет эквивариантное векторное расслоение в пространстве E^3. Поэтому знак равенства в этом уравнении имеет смысл равенства векторов в трехмерном евклидовом пространстве E^3.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что группа одномерных гомологий $G \cong H_1(g^s(H_0 + \epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t)))$ эквивалентна правым частям общих уравнений Эйлера-Пуассона в исходной записи (1), (2) из начала данной работы.

Тогда утверждение леммы будет следовать из изоморфизма эквивариантной двойственности

$$H_1(g^s(H_0 + \epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t))) \cong H^1(g^s(H_0 + \epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t)))$$

Поэтому начнем последовательно выполнять эквивариантные преобразования, приводящие группу G к правым частям общих уравнений Эйлера-Пуассона.

Из модели л.6 следует, что имеются изоморфизмы:

$$H_1(g^s(H_0+\epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t))) = H_1(g^s(E^{univ}_{C/R}(Q)), x_E(t)) =$$

$$= H_1(g^s(D_2 \otimes_R E^{univ}_R(Q) \otimes_R D_2), x_E(t)),$$

где D_2 – четверная группа Клейна (см.[**?**]), знак равенства между группами эквивариантных одномерных гомологий здесь и далее означает равенство векторов в пространстве E^3 в указанном выше смысле.

Группа $H_1(g^s(D_2 \otimes_R E^{univ}_R(Q) \otimes_R D_2)$ допускает следующее расщепление:

$$H_1(g^s(D_2 \otimes_R E^{univ}_R(Q) \otimes_R D_2), x_E(t)) =$$

$$= H_1(g^s(E^{univ}_R(Q) \otimes_R D_2), x_E(t)) + H_1(g^s(D_2 \otimes_R E^{univ}_R(Q)), x_E(t)) =$$

$$= H_1(g^s(E^{univ}_R(Q)), x_E(t)) + H_1(g^s((E^{univ}_R(Q))^*), x_E(t)),$$

поскольку имеются следующие канонические эквивариантные изоморфизмы

$$g^s(E^{univ}_R(Q)) \otimes_R D_2 \cong g^s(E^{univ}_R(Q)), \quad D_2 \otimes_R g^s(E^{univ}_R(Q)) \cong g^s((E^{univ}_R(Q))^*)$$

Пойдем далее. Имеет место следующая каноническая эквивариантная двойственность между эллиптическими кривыми $E^{univ}_R(Q)(c_1,c_2), (E^{univ}_R(Q))^*(c_1^*,c_2^*)$ с соответствующими парами базисных циклов $\{c_1,c_2\}$ и $\{c_1^*,c_2^*\}$:

$$(E^{univ}_R(Q))(c_1,c_2) \cong (E^{univ}_R(Q))^*(c_1^*,c_2^*), \quad c_1^* \cong c_2, \quad c_2^* \cong c_1$$

Поскольку модель леммы 5 представляет фазовую динамику именно волчка Эйлера, то выполняется равенство

$$H_1(g^s(E^{univ}_R(Q)), x_E(t)) = [\mathbf{M}(t), \omega(t)],$$

Вместе с тем, из указанной выше двойственности кривых $E^{univ}_R(Q), (E^{univ}_R(Q))^*$ следует, что

$$H_1(g^s((E^{univ}_R(Q))^*), x_E(t)) = [\mathbf{M}^*(t), \omega^*(t)]$$

где вектора $\mathbf{M}^*(t), \omega^*(t)$ – вектора трехмерного евклидова пространства, двойственные к векторам $\mathbf{M}, \omega$ относительно эквивариантной двойственности $T_*SO(3,R) \cong T^*SO(3,R)$

касательного и кокасательного пространств к универсальной конфигурационной симметрии исходной задачи – группе $SO(3,R)$.

Итак, мы установили структурную эквивалентность правых частей рассматриваемых уравнений.

Теперь установим механический смысл векторов $\omega^*(t)$, $\mathbf{M}^*(t)$.

Условие эквивариантности изоморфизма $T_*SO(3,R) \cong T^*SO(3,R)$, с учетом того, что $\omega \in T^*SO(3,R)$ и $\mathbf{M} = I \cdot \omega \in T^*SO(3,R)$, выглядит так:

$$T^*SO(3, R \otimes Z_2[t \to -t])[[\mathbf{M}(t), \omega(t)]] \overset{D}{\cong} T_*SO(3, R \otimes Z_2[t \to -t])[[\mathbf{M}^*(t), \omega^*(t)],$$

где $Z_2[t \to -t]$ – отображение инволюции обратимости по времени общих уравнений Эйлера-Пуассона, обуславливающая условие эквивариантности.

Из изоморфизма эквивариантной двойственности D следует, что вектор $\mathbf{M}^*(t)$ приобретает смысл вектора силы тяжести, момент которой в общем случае имеет уже ненулевое значение по сравнению со случаем волчка Эйлера. Следовательно, вектор $\omega^*(t)$ приобретает смысл вектора смещения центра масс аналитического возмущения волчка Эйлера.

Таким образом, установлена как структурная, так и физическая эквивалентность правых частей рассматриваемых уравнений. Поэтому векторнозначные H–инварианты $H_1(g^s(H_0+\epsilon H_1), g^s(H_0)(x_E(t)))$ действительно удовлетворяют общим уравнениям Эйлера-Пуассона.

2. Универсальность пространства H–инвариантов. Свойство универсальности (или полноты) пространства инвариантов H следует из универсальности кривой $E^{univ}_{C/R}(Q)$. Действительно, универсальность кривой $E^{univ}_{C/R}(Q)$ влечет универсальность (общность) решения $H^1(g^s(E^{univ}_{C/R}(Q)), C)$, которое, как установлено в доказательстве основной теоремы, имеет структуру комплекса и представляется функциями $\exp(L(E_Q, s))$, где $E_Q \in \{E_Q\}$.

Лемма доказана. Тем самым доказательство основной теоремы закончено.

8. Эквивариантные абелевы квадратуры волчка Эйлера и экспоненты дзета–функций эллиптических кривых над Q. 1. В качестве примера рассмотрим взаимосвязь хорошо известных квадратур волчка Эйлера и класса функций, представляющих общее решение для волчков, интегрируемых по Лиувиллю-Арнольду.

Процедура, реализующая данную взаимосвязь, по-сути, представляет эквивариантный математический анализ и сводится к взятию в конечном виде известной эллиптической квадратуры в силу уравнений движения волчка Эйлера. Именно эквивариантность исходного подинтегрального выражения (Z_2–градуированного абелевого дифференциала) и последующей процедуры его интегрирования играют решающую роль в получении результата интегрирования в конечном виде.

Учет указанного свойства эквивариантности технически реализуется использованием канонической модели фазовой динамики волчка Эйлера (л.4).

Проведем указанную процедуру интегрирования по этапам.

Решения волчка Эйлера, выражающие зависимости физических переменных задачи от времени, сводятся к обращению квадратуры (см., например, [?]):

$$n(t - t_0) = \pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

где n и k – рациональные функции от моментов инерции A, B, C волчка и параметра D, представляющего отношение постоянных квадратичных интегралов задачи.

Теперь основная идея состоит в эквивариантном учете знака "$\pm$" перед квадратурой. Оказывается, что этот знак отражает скрытую инвариантность исходных уравнений относительно симметрии $Z_2[t \to -t]$ обратимости по времени. Учет данной симметрии позволяет взять интеграл в конечном виде. При этом симметрия $Z_2[t \to -t]$ реализует эквивариантную склейку формально несвязных над R двух ветвей исходной квадратуры в связное многообразие над обратимым временем.

2. В силу модели фазовой динамики волчка Эйлера, построенной в лемме 2 и учитывающей симметрию обратимости по времени $Z_2[t \to -t]$, данную квадратуру можно преобразовать следующим образом:

$$\pm \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} (\operatorname{mod} Z_2[t \to -t]) =$$

$$= \int_{E_{R/Q}^{univ,*}}^{u_{eq}} \frac{du_{eq}}{\sqrt{(1 - u_{eq}^2)(1 - k^2 u_{eq}^2)}} = \mathbf{I}(H_E, k)$$

где u_{eq} – локальный канонический параметр на модулярной кривой $E_R^{univ,*}(Q)$, параметризующей кривую $E_R^{univ}(Q)$.

С механической точки зрения это означает, что в новой эквивариантной параметризации исходный интеграл вычисляется по времени, которое натурально параметризует образы двояко–асимптотических траекторий на при непрерывном разрешении сепаратрисы волчка Эйлера от особенностей с помощью отображения $Z_2[t \to -t]$.

3. Интеграл $\mathbf{I}(H_E, k)$ допускает каноническое представление через эквивариантные частичные суммы. Данное представление реализует эквивариантное определение интеграла Римана для квадратуры $I(H_E)$ и, в соответствии с моделью леммы 4, имеет вид:

$$\mathbf{I}(H_E, k) = \sum_p H^0(A(R) \otimes_{PSL_2(Q[k])} A(R), F_p)),$$

где $Q[k] \cong Q \otimes_R k$, A – абсолют плоскости Лобачевского.

4. Многозначная группа $H^0(A(R) \otimes_{PSL_2(Q[k])} A(R), F_p))$ представляет канонически определенную эквивариантную частичную сумму $\mathbf{I}_p(H_E, k)$ для суммы Римана интеграла $\mathbf{I}(H_E)$. Частичная сумма $\mathbf{I}_p(H_E, k)$ эффективно вычисляется на основе свойств модели фазовой динамики волчка Эйлера, лемм 4 и 6:

$$\mathbf{I}_p(H_E, k) = H^0(A(R) \otimes_{PSL_2(Q[k])} A(R), F_p)) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|E_p^{univ}(F_{p^n})| u^n}{n}),$$

где F_{p^n} – поле из p^n элементов, $u = p^{-s}$, E_p^{univ} – редукция эллиптической кривой $E_R^{univ}(Q[k])$ по модулю p.

5. Из определения локальной дзета–функции кривой E_Q (см. [**?**]) следует, что

$$\mathbf{I}_p(H_E, k) = \zeta(s, E_p^{univ}),$$

где $\zeta(s, E_p^{univ})$ – дзета–функция редукции кривой $E_Q^{univ}[k]$ на кривую $E_p^{univ} \cong E_Q^{univ}[k] (\mathrm{mod}\, p)$.

6. Объединим групповые частичные суммы п.4. Это соответствует эквивариантной склейке локальных дзета–функций $\zeta(s, E_p^{univ})$. В силу плоской структуры $E_R^{univ}(Q[k])$ (структуры абелевого многообразия) и с учетом конструкции универсальной кривой $E_R^{univ}(Q)$ в л.4 эквивариантная склейка реализуется экспоненциальным отображением:

$$\mathbf{I}(H_E, k) = \exp(\lim_{p \to \infty} \zeta(s, E_p \otimes E_R^{univ}(Q[k]))) =$$

$$= \exp(\zeta(s, E_Q \otimes E_R^{univ}(Q[k]))) = \exp(\zeta(s, \{E_{Q[k]}^{semist}\})),$$

где $\{E_Q^{semist}[k]\}$ – множество полустабильных эллиптических кривых над $Q[k]$ (это следует из замечания к лемме 4 о полустабильности кривой $E_R^{univ}(Q)$).

Поскольку имеется изоморфизм полей $Q \cong Q[k]$, то получаем, что

$$\mathbf{I}(H_E, k) = \exp(\zeta(s, \{E_{Q[k]}^{semist}\})) = \exp(\zeta(s, \{E_Q^{semist}\})),$$

где $\{E_Q^{semist}\}$ – множество полустабильных эллиптических кривых над Q.

7. Заметим, что исходный интеграл $\mathbf{I}(H_E, k)$ и его обращение (обозначим его $\mathbf{I}^{-1}(H_E, k, n)$) изоморфны как векторнозначные симметрии. Действительно, из конструкции кривых $E_R^{univ}(Q)$ и $E_R^{univ,*}(Q)$ и изоморфизма $Q \cong Q \otimes_{Q[k]} n \cong Q[n, k]$ следует, что имеют место следующие векторнозначные равенства:

$$\mathbf{I}(H_E, k) = H^1(g^s(E_R^{univ,*}(Q)), C) = H^1((g^s(E_R^{univ}(Q[n, k])))^{-1}, C) =$$

$$= H^1((g^s(E_R^{univ}(Q)))^{-1}, C) = \mathbf{I}^{-1}(H_E, k, n)$$

8. Из пп.6,7 окончательно получаем выражение для обращения квадратуры $\mathbf{I}(H_E)$:

$$\mathbf{I}^{-1}(H_E, k, n) = \exp(\zeta(s, \{E_Q^{semist}\}))$$

9. Векторнозначная симметрия $\mathbf{I}^{-1}(H_E)$ представляет динамику вектора кинетического момента волчка Эйлера $\mathbf{M}_E(t)$, поскольку в силу леммы 4 кривая $E_R^{univ}(Q)$ является спектральной кривой именно волчка Эйлера.

10. Обсудим полученный результат. Итак, случай Эйлера выделяется среди других случаев точной разрешимости тем, что его решения представляются дзета–функциями полустабильных эллиптических кривых над Q. Полустабильные эллиптические кривые E_Q^{semist} над Q составляют хотя и большое, но весьма специальное подмножество во множестве всех эллиптических кривых E_Q. В определенном смысле это кривые общего положения, поскольку в точках их самопересечения на аффинной плоскости касательные трансверсальны. Вместе с тем, полустабильные кривые E_Q^{semist} имеют меньшую собственную симметрию, чем, например, кривые E_Q с комплексным умножением (решетка такой кривой E_Q переводится в себя умножением на некоторое комплексное, не лежащее в Z).

С динамической точки зрения полустабильные кривые E_Q^{semist} после эквивариантной перенормировки ($E_Q^{semist,eq} \cong E_Q^{semist} \otimes Z_2[t \to -t]$) представляют орбиты типов непрерывного (класса C^0) эквивариантного разрешения над полем R максимального ранга (равного трем) сепаратрисы динамики волчка Эйлера:

$$\{E_Q^{semist,eq}\} \cong H_1(\{\mathrm{Isom}_{rk=3}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R)), C)$$

где $\{\mathrm{Isom}_{rk=3}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R))\}$, в соответствии с леммой 2, представляет множество неприводимых компонент подгруппы изометрий модели леммы 2, соответствующей условию равенства ранга трем.

Изменение динамических параметров уравнений волчка Эйлера индуцирует деформацию формы волчка и соответствует изменению параметра k, приобретающего смысл параметра указанной деформации.

Из полученного выражения для $\mathbf{M}_E(t)$ следует, что физической деформации волчка, соответствующей изменению его геометрии масс посредством изменения параметра k, отвечает изменение спектральной кривой волчка в классе полустабильных кривых E_Q.

9. Другие примеры. 1. Для случая Лагранжа процедура эквивариантного интегрирования соответствующих квадратур проходит по приведенной схеме для случая Эйлера. В результате для вектора кинетического момента $\mathbf{M}_L(t)$ можно получить, что

$$\mathbf{M}_L(t) = \exp(\zeta(1-s, \{E_Q^{semist}\}))$$

где $\{E_Q^{semist}\}$ – также множество полустабильных кривых E_Q.

Поскольку функции $\zeta(s, E_Q)$ и $\zeta(1-s, E_Q)$ связаны функциональным уравнением, то утверждение о структуре общего решения для уравнений Эйлера-Пуассона, интегрируемых по Лиувиллю-Арнольду в классе $\zeta(s, E_Q)$–функций (см. параграф 1), выполняется. Более того, возникает интересная каноническая двойственность волчка Эйлера и волчка Лагранжа.

2. Кинетический момент $\mathbf{M}_K(t)$ волчка Ковалевской в контексте развиваемого подхода должен (это предположение) выражаться так:

$$\mathbf{M}_K(t) = \exp(\zeta(s, E_Q^{CM}))$$

где E_Q^{CM} – некоторая кривая E_Q с так называемым "комплексным умножением" (соответствующее определение см. в [**?**]).

3. В качестве "минимальных" примеров рассмотрим математические маятники. Эллиптическая кривая, кодирующая пространственный маятник такова:

$$E_Q = \{y^2 = x^3 + 16\}$$

Данная кривая представляет орбиту непрерывного (класса C^0) эквивариантного разрешения единичного ранга сепаратрисы фазовой динамики волчка Эйлера, реализованной пространством $E_Q^{eq} \cong E_Q \otimes Z_2[t \to -t]$ следующим образом:

$$E_Q^{eq} \cong H_1(\mathrm{Isom}_{rk=1}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R), C))$$

где E_Q^{eq} – эквивариантная перенормировка кривой E_Q и соответствующие изометрии определены в модели леммы 2 (см. также п.10а параграфа 8).

Число "16" является каноническим нульмерным инвариантом следующего разрешения сепаратрисы:

$$16 = H^0(\mathrm{Isom}_{rk=1}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R), C)) \cong H^0([D_2, D_2], [D_2, D_2])$$

где D_2 – четверная группа Клейна.

4. Эллиптическая кривая, кодирующая классический (плоский) математически маятник такова:

$$E_Q = \{y^2 = x^3 + 4\}$$

Данная кривая представляет орбиту непрерывного (класса C^0) эквивариантного разрешения нулевого ранга сепаратрисы фазовой динамики волчка Эйлера, реализованной в кольце:

$$E_Q^{eq} \cong H_1(\mathrm{Isom}_{rk=0}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R), C))$$

Число "4" является каноническим нульмерным инвариантом следующего разрешения сепаратрисы:

$$4 = H^0(\mathrm{Isom}_{rk=0}(\Lambda) \otimes_{PSL_2(Q)} \mathrm{Isom}(A(R), C)) \cong H^0(\mathrm{id}[D_2, D_2], \mathrm{id}[D_2, D_2]) \cong$$

$$\cong H^0(\mathrm{Diag}[D_2, D_2], \mathrm{Diag}[D_2, D_2])$$

Автор благодарит А.М. Ковалева за отношение, стимулировавшее подготовку данной работы.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №05–01–00454, №07–01–00295 и гранта Ведущих научных школ НШ–6667.2007.1.

1. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 287 с.

2. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона. – Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. – 172 с.

3. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 384 с.

4. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 256 с.

5. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы. – Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995. – 432 с.

6. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 416 с.

7. *Абраров Д.Л.* Конструктивная разрешимость общих уравнений Эйлера-Пуассона. Приложение к задаче трех тел. – М.: ВЦ РАН, 2005. – 183 с.

8. *Абраров Д.Л.* Точная разрешимость общей задачи о тяжелом волчке. – М.: ВЦ РАН, 2007. – 194 с.

9. *Харламов П.В.* Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 2005. – 256с.

10. *Кнэпп Э.* Эллиптические кривые / Пер. с англ. Ф.Ю. Попеленского. – М.: Факториал Пресс, 2004. – 488 с.

11. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // С.В. Ковалевская. Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР. 1948. – С.153–220.

12. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения, 2-е изд., перераб. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 760 с.

13. *Шафаревич И.Р.* Основные понятия алгебры. Современные направления математики. Фундаментальные напрвления. Т.11 Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, М., 1985. – 288 с.

14. *Прасолов В.В, Соловьев Ю.П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. – М.: Изд-во "Факториал", 1997. – 288 с.

15. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 432 с.

16. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. Изд. 2-е, перераб. – М: Изд-во Физико–математической литературы, 2001. – 320 с.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва
abrarov@ccas.ru