Аннотация. В работе рассматривается метод потенциальных функций, предложенный в [1], для приближенного решения линейной двухэтапной задачи стохастического программирования, детерминированным эквивалентом которой является задача линейного программирования. Структура ограничений этой задачи такова, что метод имеет смысл применить к ее двойственной формулировке. Однако возникает вопрос, как по приближенному решению двойственной задачи построить приближенное решение исходной. В статье рассматриваются эти проблемы и предлагается модификация метода потенциальных функций, позволяющая их решить.

1 Введение

В настоящей статье рассматривается алгоритм для приближенного решения линейной двухэтапной задачи стохастического программирования. Алгоритм основан на применении метода потенциальных функций.

Предполагая, что пространство элементарных исходов конечно, детерминированный эквивалент рассматриваемой задачи сводится к задаче линейного программирования со значительным (вообще говоря) числом переменных и разреженной матрицей ограничений:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min & \langle c,x\rangle & + & p_1\langle q_1,y_1\rangle & + & \dots & + & p_L\langle q_L,y_L\rangle & & \\
x,y_1\dots,y_L: & Ax & & & & & & & = & b \\
 & T_1x & + & W_1y_1 & & & & & = & d_1 \\
 & \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
 & T_Lx & & & & & + & W_Ly_L & = & d_L
\end{array}
\tag{1}
$$

$$
l \le x \le u,
$$

$$
l_\omega \le y_\omega \le u_\omega,\ \omega = 1,\dots,L.
$$

В последнее время заметен растущий интерес к методу потенциальных функций в применении к задачам оптимизации большой размерности, которые обладают специальной структурой ограничений. Один из примеров такой структуры - это блочность при наличии дополнительных связывающих ограничений. Для многих задач, связанных с оптимальным распределением ресурсов, и, в частности, для ряда многопродуктовых потоковых задач, такая структура является характерной.

Идея метода потенциальных функций для этого типа задач основана на агрегировании связывающих ограничений с использованием гладкой потециальной функции, которая добавляется к функции цели. Далее эта сумма минимизируется при блочных ограничениях, и таким образом достигается приближенное решение задачи. Этот подход с использованием логарифмического потенциала применялся Schultz и Meyer [2] для решения многопродуктовых задач большой размерности. Идея использования экспоненциального потенциала для этого класса задач принадлежит Shahrokhi и Matula [3]. В работе Leighton и др. [4] метод получил дальнейшее развитие и оценки трудоемкости были существенно улучшены. Grigoriadis и Khachiyan [1] разработали общую схему метода потенциальных функций для решения выпуклых задач типа "оптимального распределения ресурсов" с блочно-диагональной структурой ограничений. Тесты показали, что методы этого типа весьма эффективны (см. [5]), что стимулирует интерес к ним исследователей.

В работе [1], в качестве примера, указывалась возможность применения разработанной схемы к решению двухэтапной стохастической задачи. В настоящей работе используется, однако иной подход. В основе его лежит тот факт, что задача, двойственная к (1) имеет как раз ту структуру ограничений, о которой говорилось выше. Можно ожидать, что метод потенциальных функций, прмененный к двойственной задаче, окажется эффективным. Однако возникает вопрос, как приближенное решение двойственной задачи можно использовать для построения решения прямой. Оказывается, что для этого можно воспользоваться некоторой модификацией общей схемы метода потенциальных функций, предложенной в [1]. А именно, изменения касаются построения самой функции, а также критерия останова.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 рассматривается некоторое преобразование исходной задачи, требуемое для определения потенциальной функции. Раздел 2 посвящен описанию потенциальной функции, опрелению критерия останова и процедуре отыскания решения исходной задачи (1). В разделе 3 дается алгоритм минимизации потенциальной функции, а также дается оценка числа его итераций для достижения заданной точности.

2 Анализ задачи

Двух-этапная задача стохастического программирования, приведенная выше, может быть переписана в следующей форме.

$$\begin{array}{cc} \max & \langle b,\alpha\rangle + \langle c,\beta\rangle \\ \alpha,\beta: & \\ & D^T\alpha + A^T\beta = d \\ & l \le \alpha \le u \\ & \beta \ge 0 \end{array} \qquad (P)$$

Здесь α и β представляют переменные, соответствующие первому и второму этапу. Двойственная к (P) записывается следующим образом

$$\begin{array}{cc} \min & \langle d,x\rangle + \langle u,s_u\rangle - \langle l,s_l\rangle \\ x,s_l,s_u: & \\ & Dx + s_u - s_l = b \\ & Ax \ge c \\ & s_u,\ s_l \ge 0 \end{array} \qquad (D)$$

Предположим, что (P) разрешима, тогда (D) также разрешима и пусть известен интервал $[x^-,x^+]$, содержащий оптимальное x^*. Таким образом можно добавить следующие неравенства $x^- \le x \le x^+$ к множеству ограничений (D). Выразим также переменные s_l из первого равенства (D):

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x, s_u:} & \langle d - D^T l, x\rangle + \langle u - l, s_u\rangle \\
& Dx + s_u \geq b \\
& Ax \geq c \\
& x^- \leq x \leq x^+ \\
& s_u \geq 0
\end{array}
$$

Пусть (x^*, s_u^*) оптимальное решение. Поскольку $u - l$ неотрицательный, s_u^* можно положить равным $\max[0, c - Dx^*]$. Поэтому накладывается дополнительное ограничение на s_u: $s_u \leq c - ke$, где $e^T = [1, \ldots, 1]$,

$$
k = \min_{1\leq j\leq K} \min_{x\in[x^-, x^+]} \langle D_j, x\rangle.
$$

Таким образом добавление этого ограничения не изменит оптимального решения. Наконец, перепишем (D) в форме:

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x, s_u:} & \langle d - D^T l, x\rangle + \langle u - l, s_u\rangle \\
& Dx + s_u \geq 0 \\
& Ax \geq b \\
& x^- \leq x \leq x^+ \\
& 0 \leq s_u \leq c - ke
\end{array}
\qquad (DD)
$$

Обозначим двойственную к (DD) через (PP). (PP) эквивалентна (P) в том смысле, что значения двух задач совпадают и каждой паре (α, β) допустимой для (P) соответствует $(\alpha, \beta, 0)$, удовлетворяющая ограничениям (PP) (дополнительные переменные в (PP), соответствующие добавленным ограничениям в (DD) полагаются равными 0). Аналогичное соответствие имеется для оптимальных решений (P) и (PP).

Ниже приводится алгоритм отыскания δ-приближенных решений (PP) и (DD), где $\delta > 0$ произвольная заданная точность.

Нам понадобится оценка для двойственных переменных к ограничениям $Dx + s_u - c \geq 0$. В терминах (D) эти ограничения есть $s_l \geq 0$. Пусть $\gamma_l \geq 0$ вектор двойственных переменных к $s_l \geq 0$ в (D). Тогда γ_l удовлетворяет равенству $\gamma_l = \alpha - l$. Но α не превышает u (см. (P)). Таким образом, для γ_l имеем $0 \leq \gamma_l \leq u - l$. Далее, используя Лагранжеву двойственность можем переписать (DD) следующим образом

$$\max_{\substack{\gamma_l: \\ 0 \leq \gamma_l \leq u - l}} \min_{\substack{x, s_u: \\ Ax \geq c \\ x^- \leq x \leq x^+ \\ 0 \leq s_u \leq c - ke}} \langle d - D^T l, x\rangle + \langle u - l, s_u\rangle + \langle \gamma_l, c - Dx - s_l\rangle$$

Обозначим $y^T = [x, s_u]$, $b_0^T = [d - D^T l, u - l]$, $B = [D \;\; -E]$. Множество ограничений в задаче минимизации обозначим $Y = \{y | Qy \geq q\}$. Из сказанного выше следует, что Y компактно и матрица ограничений имеет блочную структуру. В этих обозначениях задача будет выглядеть так

$$\max_{0 \leq \gamma_l \leq u - l} \min_{y \in Y} \langle b_0, y\rangle + \langle \gamma_l, c - By\rangle. \tag{2}$$

Пусть

$$\lambda = \sum_{i=1}^{K} (\gamma_l)_i, \quad \lambda_+ = \sum_{i=1}^{K} u_i - l_i,$$

$$\phi(y) = \max[c_i - \langle B_i, y\rangle | i = 1, \ldots, K].$$

Тогда

$$\max_{\substack{\gamma_l : \\ 0 \le \gamma_l \le u - l}} \min_{\substack{y : \\ y \in Y}} \langle b_0, y\rangle + \langle \gamma_l, c - By\rangle \le$$

$$\max_{\substack{\lambda, r : \\ 0 \le \lambda \le \lambda_+ \\ \langle r, e\rangle = 1 \\ r \ge 0}} \min_{\substack{y : \\ y \in Y}} \langle b_0, y\rangle + \lambda\langle r, c - By\rangle =$$

$$\max_{\substack{\lambda : \\ 0 \le \lambda \le \lambda_+}} \min_{\substack{y : \\ y \in Y}} \langle b_0, y\rangle + \lambda \max_{\substack{r : \\ \langle r, e\rangle = 1 \\ r \ge 0}} \langle r, c - By\rangle =$$

$$\max_{\substack{\lambda : \\ 0 \le \lambda \le \lambda_+}} \min_{\substack{y : \\ y \in Y}} \langle b_0, y\rangle + \lambda\phi(y) \le \tag{3}$$

$$\max_{\lambda : \lambda \ge 0} \min_{y : y \in Y} \langle b_0, y\rangle + \lambda\phi(y) =$$

$$\min_{\substack{y : y \in Y \\ \phi(y) \le 0}} \langle b_0, y\rangle.$$

Последняя задача минимизации эквивалентна (2) и отсюда все неравенства в действительности выполнены как равенства. Ограничение $\lambda \le \lambda_+$ в (3) доказывает, что двойственный оптимальный множитель к ограничению $\phi(y) \le 0$ находится в интервале $[0, \lambda_+]$.

Далее мы рассмотрим метод для приближенного решения (3).

3 Построение приближенного решения

В этом разделе мы опишем потенциальную функцию, которая будет использоваться для решения (DD) и приведем некоторые ее свойства Исходная задача (DD) сводится к минимизации гладкой потенциальной функции на Y. Далее мы определим δ-приближенное решение указанной задачи и покажем, что по нему можно построить приближенное решение (PP).

Введем некоторые обозначения. Обозначим

$$f_0(y) = \langle b_0, y\rangle;\ f_j(y) = c_j - \langle B_j, y\rangle.$$

Пусть a наибольшее из максимумов модулей функций f_j на компакте Y:

$$a := \max_{0\le j\le K} \max\{|f_j(y)| \ \ |y \in Y\}.$$

Нам понадобится нормированная положительная срезка функции ϕ

$$\Phi_a(y) := \max\{0, \phi(y)/a\}$$

и ее гладкая аппроксимация

$$\Psi_a(y,\varepsilon) = \varepsilon \log\left[1 + \sum_{j=1}^{K} \exp\{f_j(y)/a\varepsilon\}\right].$$

Для удобства записи формально положим $f_{K+1}(y) \equiv 0$ и перепишем $\Psi_a(y,\varepsilon)$ в виде

$$\Psi_a(y,\varepsilon) = \varepsilon \log \left[\sum_{j=1}^{K+1} \exp\{f_j(y)/a\varepsilon\} \right].$$

Аналогичная потенциальная функция была использована в работе [1] в алгоритме для решения больших оптимизационных задач со специальной структурой ограничений.

Функция $\Psi_a(y,\varepsilon)$ монотонно возрастает по ε при каждом фиксированном y. Дйствительно, пусть максимум среди $f_j(y)$ достигается на $f_1(y)$ и пусть $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Тогда

$$\Psi_a(y,\varepsilon) = \varepsilon \log[\exp\{f_1/a\varepsilon\}] + \varepsilon \log[1 + \sum_{j\neq 1}^{K+1} \exp\{(f_j - f_1)/a\varepsilon\}] \geq$$

$$\varepsilon' \log[\exp\{f_1/a\varepsilon'\}] + \varepsilon' \log[1 + \sum_{j\neq 1}^{K+1} \exp\{(f_j - f_1)/a\varepsilon'\}] = \Psi_a(y,\varepsilon').$$

Следующие полезные оценки можно найти в [1]. Для произвольного y и $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Psi_a(y,\varepsilon) - \varepsilon \log[K+1] \leq \Phi_a(y) \leq \Psi_a(y,\varepsilon).$$

Пусть $p = p(y,\varepsilon)$ обозначает вектор частных производных Ψ_a по $f_j/a,\ j = 1,\ldots,K+1$:

$$p_j = \frac{\exp\{f_j/(a\varepsilon)\}}{\sum_{i=1}^{K+1} \exp\{f_i/a\varepsilon\}}.$$

Для всех y выполнена следующая оценка ([1], lemma 2):

$$\sum_{j=1}^{K} p_j f_j(y)/a \geq \Phi_a(y) - \varepsilon \log[K+1]. \qquad (4)$$

Далее в этом разделе мы полагаем, что произвольное положительное ε зафиксировано и обозначаем $\Psi_a(y, \varepsilon)$ просто $\Psi_a(y)$.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации

$$\min_{y\,:\,y \in Y} \quad \langle b_0, y \rangle + \theta \Psi_a(y). \tag{5}$$

Функция $\Psi_a(y)$ выпукла по y и значит целевая функция в (5) выпукла. Пусть $y(\theta)$ ее оптимум. Далее определим δ-приближенное решение (5) y_δ (также зависящее от θ). Рассмотрим следующую вспомогательную задачу ЛП:

$$\min_{z\,:\,z \in Y} \quad \langle b_0, z \rangle + \theta \langle \nabla \Psi_a(y), z \rangle. \tag{6}$$

Пусть w – решение (6). Точка y_δ, $\delta > 0$, есть δ-приближенное решение (5) если

$$\langle b_0 + \theta \nabla \Psi_a(y_\delta), w - y_\delta \rangle \geq -\delta. \tag{7}$$

Поскольку целевая функция (5) выпукла, мы получим

$$\begin{gathered}
\langle b_0, y(\theta) \rangle + \theta \Psi_a(y(\theta)) \geq \\
\langle b_0, y_\delta \rangle + \theta \Psi_a(y_\delta) + \langle b_0 + \theta \nabla \Psi_a(y_\delta), y(\theta) - y_\delta \rangle \geq \\
\langle b_0, y_\delta \rangle + \theta \Psi_a(y_\delta) + \langle b_0 + \theta \nabla \Psi_a(y_\delta), w - y_\delta \rangle \geq \\
\langle b_0, y_\delta \rangle + \theta \Psi_a(y_\delta) - \delta.
\end{gathered}$$

Таким образом, из условия (7) следует, что зеначение целевой функции в y_δ является δ-оптимальным.

Положим θ равным $a\lambda$, где $\lambda = 2\lambda_+$ и положим $\delta = \theta\varepsilon\log[K+1]$. Покажем, что ограничения $c - Bx \leq 0$, вычисленные в y_δ, выполнены с точностью до величины порядка ε. Именно, имеют место следующие соотношения

$$\Phi_a(y_\delta) \leq 4\varepsilon\log[K+1]. \tag{8}$$

Пусть (λ^*, y^*) решение (3). Из условий дополняющей нежесткости $\lambda^*\phi(y^*) = 0$ и поэтому $\lambda^*\Phi_a(y^*) = 0$. Опуская тривиальный случай, когда $\lambda^* = 0$, получаем, что $\Phi_a(y^*) = 0$. Поскольку $0 \leq \Phi_a(y) \leq \Psi_a(y)$ и $\lambda^* \leq \lambda_+ \leq \lambda$, выполнено следующее

$$\langle b_0, y_\delta\rangle + a\lambda\Psi_a(y_\delta) \geq \langle b_0, y_\delta\rangle + a\lambda^*\Psi_a(y_\delta) \geq$$
$$\langle b_0, y_\delta\rangle + a\lambda^*\Phi_a(y_\delta) \geq \langle b_0, y_\delta\rangle + \lambda^*\phi(y_\delta) \geq$$
$$\min_{y\in Y} \langle b_0, y\rangle + \lambda^*\phi(y) = \langle b_0, y^*\rangle.$$

Отсюда следует

$$a\lambda^*\Psi_a(y_\delta) \geq \langle b_0, y^* - y\rangle. \tag{9}$$

В то же время из δ-оптимальности y_δ

$$\langle b_0, y_\delta\rangle + a\lambda\Psi_a(y_\delta) \leq \langle b_0, y(a\lambda)\rangle + a\lambda\Psi_a(y(a\lambda)) + a\lambda\varepsilon\log[K+1] \leq$$
$$\langle b_0, y^*\rangle + a\lambda\Phi_a(y^*) + 2a\lambda\varepsilon\log[K+1] =$$
$$\langle b_0, y^*\rangle + 2a\lambda\varepsilon\log[K+1],$$

т.е.

$$a\lambda\Psi_a(y_\delta) \leq \langle b_0, y^* - y\rangle + 2a\lambda\varepsilon\log[K+1]. \tag{10}$$

Вычитая (9) из (10), получаем

$$(\lambda - \lambda^*)\Psi_a(y_\delta) \le 2a\lambda\varepsilon \log[K+1].$$

Поскольку $\lambda = 2\lambda^*$ и $\Phi_a(y) \le \Psi_a(y)$, получаем (8).

Теперь покажем, что по δ-приближенному решению (5) можно тааже построить приближенное решение (PP) и (DD). Выпишем необходимые и достаточные условия оптимальности для (6):

$$b_0 - \frac{\theta}{a}B^T p - Q^T\kappa = 0,$$
$$\langle \kappa, Qw - q\rangle = 0,$$
$$Qw \ge q$$
$$\kappa \ge 0,$$

где $p = p(y_\delta)$ и w оптимальное решение (6). (Заметим, что $-(1/a)B^T p(y) = \nabla\Psi_a(y)$.) Домножим первое равенство на w. Тогда

$$0 = \langle b_0, w\rangle - \frac{\theta}{a}\langle B^T p, w\rangle - \langle Q^T\kappa, w\rangle =$$
$$\langle b_0 - \frac{\theta}{a}B^T p, w\rangle - \langle \kappa, q\rangle =$$
$$\langle b_0 - \frac{\theta}{a}B^T p, w - y_\delta\rangle + \langle b_0, y_\delta\rangle - \langle \kappa, q\rangle - \frac{\theta}{a}\langle B^T p, y_\delta\rangle. \qquad (11)$$

Оценим последнее слагаемое в (11).

$$-\frac{\theta}{a}\langle B^T p, y_\delta\rangle = -\frac{\theta}{a}\langle p, By_\delta\rangle =$$
$$-\frac{\theta}{a}\langle p, c\rangle + \frac{\theta}{a}\langle p, c - By_\delta\rangle =$$

$$-\frac{\theta}{a}\langle p, c\rangle + \frac{\theta}{a}\sum_{j=1}^{K} p_j f_j(y_\delta) \geq$$

$$-\frac{\theta}{a}\langle p, c\rangle + \theta\Phi_a(y_\delta) - \theta\varepsilon\log[K+1] \geq$$

$$-\frac{\theta}{a}\langle p, c\rangle - \theta\varepsilon\log[K+1].$$

Последние два неравенства были получены с использованием (4) и (8). Подставляя эти оценки в (11) и пользуясь тем, что y_δ δ-приближенное решение, приходим к следующему неравенству:

$$2\lambda_+\langle c, p\rangle + \langle q, \kappa\rangle \geq \langle b_0, y_\delta\rangle - 4a\lambda_+\varepsilon\log[K+1]. \qquad (12)$$

Здесь мы учли, что $\theta = 2a\lambda_+$.

Запишем (2) как задачу ЛП

$$\begin{array}{cl} \min & \langle b_0, y\rangle \\ y: & \\ By \geq c & \\ Qy \geq q & \end{array} \qquad (13)$$

Из (8) y_δ удовлетворяет ограничениям (13) с точностью не менее $4a\varepsilon\log[K+1]$. В то же время, пара $(2\lambda_+p, \kappa)$ удовлетворяет ограничениям двойственной к (13) (из условий оптимальности к (6)). Последнее вместе с неравенством (12) показывает, что $(2\lambda_+p, \kappa)$ и y_δ являются приближенными решениями (PP) и (DD) с точностью не менее, чем $O(a\varepsilon\max\{\lambda_+, 1\})$. Предположим, что $\lambda = 2\lambda_+ \geq 1$ (в противном случае можно взять $\lambda = 1$ и все предыдущие оценки будут верны).

4 Алгоритм

В этом разделе описывается алгоритм для поиска δ-приближенного решения (5). Фактически, решение (5) с относительной точностью $\theta\varepsilon\log[K+1]$ эквивалентно решению

$$\min_{y\,:\,y\in Y} \langle b_0, y\rangle/\theta + \Psi_a(y,\varepsilon) \;\equiv\; \min_{y\,:\,y\in Y} \psi_\varepsilon(y) \tag{14}$$

с абсолютной точностью $\varepsilon\log[K+1]$. На вход алгоритма подается начальное приближение $y^0 \in Y$ и параметр ε, и алгоритм возвращает $\varepsilon\log[K+1]$-приближенное решение (14).

Вспомогательная задача ЛП

$$\min_{z\,:\,z\in Y} \langle \nabla\psi_\sigma(y), z\rangle \tag{15}$$

решается на каждой итерации метода и $w = w(y,\sigma)$ ее оптимум. Покажем, что если y не является $\sigma\log[K+1]$-приближенным решением то есть возможность уменьшить функцию цели.

Лемма 1. Пусть $y \in Y$, $\sigma \le 1/2$ и пусть

$$\langle \nabla\psi_\sigma(y), w - y\rangle \le -\sigma\log[K+1]. \tag{16}$$

Положим $\tau = \sigma^2$ и $w_\tau = \tau w + (1-\tau)y$. Тогда

$$\psi_\sigma(w_\tau) - \psi_\sigma(y) \le -\sigma^3(\log[K+1]-1).$$

Доказательство основано на тех же рассуждениях, что и в [1]. Оценим вначале разность

$$\Psi_a(w_\tau,\sigma)-\Psi_a(y,\sigma)=\sigma\log\left[\sum_{j=1}^{K+1}p_j\exp\left\{\frac{\tau(f_j(w)-f_j(y))}{\sigma a}\right\}\right].$$

Здесь мы воспользовались линейностью f_j. Поскольку log вогнутая функция и $\sum p_j=1$, последнее выражение можно далее оценить как

$$\sigma\sum_{j=1}^{K+1}p_j\left(\exp\left\{\frac{\tau(f_j(w)-f_j(y))}{\sigma a}\right\}-1\right).$$

По определению f_{K+1} последнее слагаемое в этой формуле есть 0. По определению a и τ имеем $|\tau(f_j(w)-f_j(y))/\sigma a|\leq\sigma\leq 1/2$. Поэтому последнее выражение не больше, чем

$$\tau\sum_{j=1}^{K}p_j\frac{f_j(w)-f_j(y)}{a}+\frac{\tau^2}{\sigma}\sum_{j=1}^{K}p_j\left(\frac{f_j(w)-f_j(y)}{a}\right)^2\leq$$

$$\tau\sum_{j=1}^{K}p_j(f_j(w)-f_j(y))/a+\tau^2/\sigma.$$

Таким образом, уменьшение функции цели можно оценить следующим образом:

$$\psi_\sigma(w_\tau)-\psi_\sigma(y)=\tau\langle b_0,w-y\rangle/\theta+\Psi_a(w_\tau)-\Psi_a(y)\leq$$

$$\tau[\langle b_0,w-y\rangle/\theta+\sum_{j=1}^{K}p_j(f_j(w)-f_j(y))/a]+\tau^2/\sigma=$$

$$\tau\langle b_0/\theta+\nabla\Psi_a(y),w-y\rangle+\tau^2/\sigma.$$

По предположению, последнее не превосходит

$$-\tau\sigma \log[K+1] + \tau^2/\sigma = \sigma^3(\log[K+1] - 1).$$

Лемма доказана.

В алгоритме будет использоваться процедура σ-масштабирования. Далее понадобятся следующие оценки. Для всех y и $\sigma > 0$ имеем

$$\psi_{2\sigma}(y) \geq \psi_\sigma(y),$$

как следствие моннотонного роста $\Psi_a(y, \sigma)$ по σ (см. предыдущий раздел). Пусть ψ^*_σ оптимальное значение (14) (с $\varepsilon := \sigma$). Тогда

$$\psi^*_{2\sigma} \leq \psi^*_\sigma + 2\sigma \log[K+1].$$

Это следует из

$$\Psi_a(y, 2\sigma) \leq \Phi_a(y) + 2\sigma \log[K+1] \leq \Psi_a(y, \sigma) + 2\sigma \log[K+1].$$

Тогда, из условия

$$\psi_{2\sigma}(y) - \psi^*_{2\sigma} \leq 2\sigma \log[K+1] \tag{17}$$

следует

$$\psi_\sigma(y) - \psi^*_\sigma \leq \ 4\sigma \log[K+1]. \tag{18}$$

Теперь приведем алгоритм приближенного решения (14).

Алгоритм

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим вначале, что для $\sigma \leq 1/2$ найдено $y^0 \in Y$ такое, что (18) выполнено. Положим $\sigma = 1/2$, $t = 0$, $\tau = \sigma^2$.

Шаг 1.
Решить (15) (с $y = y^t$) и положить $y^{t+1} = \tau w + (1-\tau) y^t$,
где w – решение (15).
Шаг 2.
Если (16) (с $y = y^t$) выполнено, то
А: положить $t = t+1$ и перейти к шагу 1;
в противном случае
В: если $\sigma > \varepsilon$, то положить $\sigma = \sigma/2$, $t = t+1$ и перейти к шагу 1;
если $\sigma \leq \varepsilon$, остановиться и возвратить y^{t+1} в качестве решения.

Рассмотрим данный алгоритм. В начале заметим, что если на итерации t реализовалась альтернатива В, то на итерации $t+1$ для $y = y^{t+1}$ имеет место оценка (18) (это следует из того, что критерий останова (16) предполагает (17) (см. предыдущий раздел), а также из импликации (17)$\Rightarrow$(18)). Пусть $t_+ \geq t+1$ миримальный номер итерации, где снова реализовалась альтернатива В. Из леммы 1 и из (18) следует, что

$$t_+ - t \leq \frac{4\log[K+1]}{\sigma^2(\log[K+1]-1)}.$$

Отсюда, можно оценить общее число N итераций алгоритма:

$$N = C \sum_{n:2^{-n}\geq\varepsilon} 2^{2n} \frac{\log[K+1]}{\log[K+1]-1} \leq O\left(\varepsilon^{-2}\log[1/\varepsilon]\right)$$

где C - абсолютная константа.

Далее покажем, каким образом можно реализовать предположение алгоритма относительно начального приближения y^0. Для этого возьмем произвольное $y \in Y$ и оценим разность $\psi_{1/2} - \psi^*_{1/2}$. Пусть u есть минимум $\psi_{1/2}(y)$ на Y. По определению a и поскольку $\lambda \geq 1$ (см. конец предыдущего раздела), имеем

$$|\langle b_0, y - u\rangle/(a\lambda)| \leq 2.$$

Кроме того,

$$\Psi_a(y, 1/2) \leq 1 + \log[K+1]/2.$$

Таким образом,

$$\psi_{1/2}(y) - \psi^*_{1/2} \leq 3 + \log[K+1]/2.$$

Поэтому, если K достаточно велико (например, $K \geq 8$), предположение автоматически выполнено. В противном случае, дополнительно нужно выполнить несколько итераций с $\sigma = 1/2$.

Список литературы

[1] Grigoriadis, M.D. and Khachiyan, L.G. Fast approximation schemes for convex programs with many blocks and coupling constraints. SIAM J. Optimization, 1994. V.4. P.86-107.

[2] Schultz, G.L. and Meyer, R.R. An interior point method for block-angular optimization, SIAM J. Optimization, 1 (1991), pp. 583-602.

[3] Shahrokhi, F. and Matula, D.W. The maximum concurrent flow problem. J. Assoc. Comput. Mach., 1990, 37:318-334.

[4] Leighton, T., Makedon, F., Plotkin, S., Stein, C., Tardos, E., and Tragoudas, S. Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems. Proceeding of the 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1991. P.101-111.

[5] Leong, T., Shor, P., and Stein, C. A combinatorial multicommodity flow algorithm. Working paper, 1995.

Сведения об авторе:

Давидсон Михаил Рувимович,

служебный адрес и адрес для переписки: 119899, Воробьевы горы,

МГУ, ф-т ВМиК

тел: (095)-939-24-91

e-mail: davidson@ccas.ru