КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ШТРАФОВ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Станюкова И. В.
(Москва)

1. Многие задачи математической физики формулируются как задачи минимизации интегрального функционала J, определенного на некотором множестве K из гильбертова пространства H функций вещественного аргумента $x \in \Omega,\ \Omega \subset \mathbf{R}^n$:

$$\min_{v \in K} J(v), \quad J(v) = \int\limits_{\Omega} \Phi(v, x)\ dx. \tag{1}$$

Предположим, что
функционал $J(v)$ непрерывный, сильно выпуклый в H с константой μ;
K — замкнутое выпуклое множество из H:

$$K = \{v \in H |\ g(v, x) \leq 0 \text{ п.в. в } \Omega\};$$

$\forall\ x \in \Omega$ функционал $g(v, x)$ непрерывный и выпуклый по v;
Ω — многогранная область в $\mathbf{R}^n$, на границе которой Γ заданы условия нулевого следа. В дальнейшем будет рассматриваться плоская (не обязательно выпуклая) область Ω, поскольку все принципы, которые будут применяться для двумерного анализа, обобщаются и на случай большего числа измерений.

Существование и единственность решения $u(x)$ задачи (1) гарантированы теоремой Вейерштрасса ввиду сильной выпуклости и непрерывности целевого функционала [1](с.55).

Характерным примером задачи (1) служит задача упругопластического кручения [2] (с.293), [3] (с.135), [4], соответствующая следующим данным: $n = 2,\ H = H_0^1(\Omega)$ —пространство Соболева 1-го порядка с нулевым следом на границе Γ;

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v), \tag{A}$$

$$a(v, u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\ dx\ =\ \int\limits_{\Omega} \nabla v(x) \nabla u(x)\ dx\ -$$

симметричная билинейная форма, определенная и непрерывная на $H_0^1(\Omega)$;
$l(v)$ — линейная непрерывная на $H_0^1(\Omega)$ форма,

$$l(v) = \int\limits_{\Omega} f(x) v(x)\ dx\ =\ (f, v), \qquad f(x) \equiv \text{const на } \Omega$$

Для численного решения сложных как по характеру ограничений, так и по виду функционала J задач типа (1) возможно комбинировать метод штрафов с методом конечных элементов (МКЭ), поскольку первый является универсальным способом сведения задач условной оптимизации к безусловной, а второй приводит бесконечномерную задачу к конечномерной благодаря важному свойству — заменять интегральные функционалы суммой интегралов по подобластям. Последние интегралы легко могут быть вычислены приближенно за счет удачного выбора базисных функций и хорошей триангуляции.

Рассматриваемый подход предполагает большую свободу в выборе конкретных функций штрафа. В частности, в [5, 6] подробно исследован комбинированный метод штрафов и конечных элементов на основе гладкой аппроксимации негладкого штрафа.

Представляется удобным освободиться от ограничений задачи (1) с помощью интегрального штрафа, поскольку искомый функционал J также интегральный, а число ограничений $g(v,x)$ — бесконечно. В литературе достаточно распространен интегральный штраф типа "срезки" [7, 8, 9]. Этот способ учета ограничений будем предполагать далее в настоящей работе. Тогда на основании метода штрафов задача (1) сводится к последовательности задач безусловной минимизации

$$\min_W J_c, \quad J_c = J(v) + C\mathcal{H}(v),\ C \uparrow \infty,$$

где

$$\mathcal{H}(v) = \int\limits_\Omega \left[g^+(v,x)\right]^t\, dx,\ -$$

функционал штрафа и при каждом $x \in \Omega$ функционал

$$\left[g^+(v,x)\right]^t \ = \ \left[\max(0; g(v,x)\right]^t$$

означает t-ю степень "срезки" функционала $g(v,x)$, $t \geq 1$.

Для корректности определения функционала штрафа $\mathcal{H}(v)$ достаточно предположить, что оператор, задающий ограничения задачи (1), действует в пространство Q-интегрируемых функций, т.е. $g(v)\ :\ \ H \to L_Q(\Omega)$, где $Q \geq 1$, — и выбирать $t \leq Q$, $(t \geq 1)$. Вследствии этого область определения функционала со штрафом J_c — пространство W— может отличаться от пространства H, в котором определен исходный функционал J. Соответствующие примеры рассмотрены в [8]. В частности, в качестве W может

H, причем K — выпуклое замкнутое подмножество в W и H. Эта ситуация при $W = W_0^{1,2t}$ имеет место в задаче упругопластического кручения. Здесь и в последующем изложении обозначение $W^{m,q}(\Omega)$ будет применяться для банахова пространства, состоящего из всех измеримых на Ω функций, суммируемых по Ω со степенью q вместе со всеми обобщенными производными до порядка m включительно.

$$W_0^{m,q}(\Omega) = \{v \in W^{m,q}(\Omega) |\ tr\ v|_\Gamma = 0\},$$

$tr\ v$ – след функции v. Обозначение $X \hookrightarrow Y$ указывает, что нормированное линейное пространство X содержится в нормированном линейном пространстве Y с непрерывным вложением. Будем обозначать через $\mathcal{W}$ пространство W, если $W \hookrightarrow H$ и пространство H в противном случае. Тогда $\|\cdot\|_\mathcal{W} = \max(\|\cdot\|_W, \|\cdot\|_H)$. В силу сильной выпуклости функционала J в пространстве H и выпуклости функционала $\mathcal{H}$ в $\mathcal{W}$ функционал J_c по меньшей мере строго выпуклый в $\mathcal{W}$. В случае, когда $W \hookrightarrow H$, задача со штрафом не обязана иметь решение в $\mathcal{W}$, так как $J(v) \to \infty$ при $\|v\|_H \to \infty$, но не при $\|v\|_\mathcal{W} \to \infty$. Для существования решения дополнительно потребуем, чтобы $\lim\limits_{\|v\|_\mathcal{W}\to\infty} J_c(v) = \infty$, что влечет соответствующие условия на конкретный вид функционала штрафа $\mathcal{H}$ (выбор степени t). Как отмечено в [1], данное требование позволяет искать минимум задачи со штрафом на ограниченном множестве. Поэтому введем предположение о существовании такого множества

$$S_r(0) = \{v |\ v \in \mathcal{W},\ \|v\|_\mathcal{W} \le r\}, \tag{2}$$

что

$$\min_\mathcal{W} J_c(v) \ = \ \min_{S_r(0)} J_c(v),$$

и далее будем рассматривать последовательность задач минимизации на простом множестве $S_r(0)$:

$$\min_{S_r(0)} J_c(v). \tag{1_c}$$

Замечание 1. Множество ограничений K задачи (1) также можно считать ограниченным по норме пространства $\mathcal{W}$, поскольку минимум сильно выпуклого функционала $J(v)$ может достигаться лишь на ограниченном подмножестве

$$K_0 = \{v \in K \mid J(v) \le J(v^{'})\},\ v^{'} \in K$$

(см. [1], с.55), а радиус r в формуле (2) всегда можно выбрать настолько большим, чтобы $K_0 \subset S_r(0)$ и задача (1) была эквивалентна задаче минимизации на множестве $K \cap S_r(0)$.

интегральных штрафов в гильбертовом пространстве рассматривались в [10]. Поскольку аналитическое решение задач (1_c) возможно лишь в редких случаях, необходима их аппроксимация для решения численными методами минимизации.

2. Следуя терминологиии и описанию из [2, 11], для численного решения задачи (1_c) с помощью МКЭ зададим на множестве $\bar{\Omega}$ триангуляцию $\mathcal{T}_h$. Для этого разобьем $\bar{\Omega}$ на треугольники T так, чтобы любые два треугольника либо не пересекались, либо имели одну общую сторону, либо одну общую вершину. При этом граница многоугольной области Γ аппроксимируется точно: $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{T \subset \mathcal{T}_h} T$. Определим $\Sigma_h = \{x_k, \ k = 1, 2 \ldots N\}$ — множество вершин триангуляции $\mathcal{T}_h, \ N = N_h$. Вершины треугольников T образуют в $\bar{\Omega}$ нерегулярную сетку узлов. Шагом h такой сетки называется размер максимальной из сторон треугольников, входящих в $\mathcal{T}_h$. От $\mathcal{T}_h$ потребуем, чтобы при $h \to 0$

1) все стороны треугольников были одного порядка с h, т. е. $\exists\, C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$ — не зависящие от h постоянные такие, что

$$C_1 \leq \frac{h}{h_{min}} \leq C_2,$$

h_{min} —- длина наименьшей из сторон треугольников триангуляции;

2) треугольники не вырождались, т. е. минимальный угол в любом треугольнике T был не менее $\Theta_0 > 0, \Theta_0$ не зависит от h.

С каждым узлом x_k свяжем функцию φ_k, непрерывную в $\bar{\Omega}$, являющуюся полиномом степени p на всех элементах T, ассоциируемых с узлом x_k, имеющую объединение этих элементов своим носителем и принимающую значения $\varphi_k(x_j) = \delta_{kj}$ в узлах триангуляции $\mathcal{T}_h$, где δ_{kj} — символ Кронекера. Натянутое на функции φ_k конечномерное пространство

$$V_h = \{v_h(x) | \ v_h(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k(x), \ a_k \in \mathbf{R}^1\}, \ a_k = v_h(x_k), \tag{3}$$

называемое пространством конечных элементов, является кусочно-полиномиальной аппроксимацией пространства $\mathcal{W}$. Функции φ_k — базисные функции МКЭ.

Будем искать приближенное решение задачи (1_c) среди функций, принадлежащих пространству V_h. Являясь полиномами степени p, базисные функции должны принадлежать пространству $\mathcal{W}$, чтобы обеспечить необходимую гладкость приближенного решения. Ограничимся случаем, когда ства $\mathcal{W}$, не превышает единицы. В этом случае для аппроксимации пространства $\mathcal{W}$ достаточно кусочно-линейных функций. Результатом конечноэлементной аппроксимации задачи (1_c) является приближенная задача

$$\min_{v_h \in V_h \cap S_r(0)} J_c(v_h), \tag{$1_{c,h}$}$$

$$J_c(v_h) = \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} \int_T \Phi_T(v_h, x)\ dx \ + \ C \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} \int_T [g_T^+(v_h, x)]^t\ dx,\ C \uparrow \infty,\ h \downarrow 0,$$

где

$$\Phi_T = \Phi \Upsilon_T,\ \forall x \in \Omega\ g_T(\cdot, x) = g(\cdot, x) \Upsilon_T,$$

Υ_T — индикаторная функция треугольника T.

Так как конечномерное пространство V_h является подпространством пространства $\mathcal{W}$, то задача $(1_{c,h})$ также однозначно разрешима. Примем для ее решения обозначение u_h^c. С учетом взаимно однозначного соответствия функций $v_h \in V_h$ $N-$мерным векторам коэффициентов $a = (a_k)^T$, задаваемого формулой (3), задача $(1_{c,h})$ эквивалентна задаче минимизации в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^N$:

$$\min_{a \in S_N} I_c(a), \tag{$\hat{1}_c$}$$

$$I_c(a) = I(a) + CG(a), \quad I(a) = \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} \int_T F_T(a, x)\ dx,$$

$$G(a) = \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} \int_T [\sigma_T^+(a, x)]^t\ dx,\ C \uparrow \infty,\ h \downarrow 0,$$

где функции I, G, F_T, σ_T вещественного аргумента соответствуют функционалам $J, \mathcal{H}, \Phi_T, g_T$; S_N – шар в пространстве $\mathbf{R}^N$, соответствующий множеству $S_r(0) \cap V_h$. Решение задачи $(\hat{1}_c)$ обозначим $a_c^* = (a_{c\,k}^*)^T$, $k = \overline{1, N}$. Очевидно, что $u_h^c(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_{c\,k}^* \varphi_k(x)$.

Наряду с рассмотренной аппроксимацией метода штрафов в гильбертовом пространстве к последовательности задач $(\hat{1}_c)$ приводит метод штрафов, примененный к аппроксимированной задаче с ограничениями (при условии непустоты множества $K_h = K \cap V_h \cap S_r(0)$). Определенные подобным образом множества $K_h, h \downarrow 0$:

$$K_h = \{v_h |\ v_h \in V_h \cap S_r,\ g(v_h, x) \leq 0 \quad \text{п.в. в } \Omega\}, -$$

ничений. Переопределив K_h через ограничения $g_T(v_h, x)$, заданные на элементах, и перейдя на каждом треугольнике T от бесконечного числа ограничений к одному интегральному, получим конечномерную задачу

$$\min_{a\in \hat{K}} I(a), \tag{$\hat{1}$}$$

$$\hat{K} = \{a \in S_N | \ \forall T \subset \mathcal{T}_h \quad \int\limits_T [\sigma_T^+(a,x)]^t \ dx = 0\}$$

с конечным числом ограничений-равенств, зависящим только от параметров триангуляции. Возможность применения к подобным задачам штрафования типа "срезки" изучена в [12, 13]. С помощью предложенных в указанных работах методик оценки скорости сходимости метода штрафов могут быть выражены через параметры штрафа и дискретизации.

Утверждение 1. Пусть функционал J локально липшицев с константой $L_J = L_J(r)$, а функционал $\mathcal{H}(v)$ удовлетворяет на классе кусочно-линейных функций условию регулярности

$$\mathcal{H}(v_h) \geq \beta\rho^{\Theta}(v_h, K_h)h^{\xi} \quad \forall \ v_h \in V_h \setminus K_h, \tag{4}$$

где $\Theta \geq 1, \xi$ — некоторое (обычно неотрицательное) число, постоянная β не зависит от h. Тогда в случае $\Theta > 1$ метод штрафов сходится со скоростью

$$\|u_h - u_h^c\| \leq \underline{O}((\frac{1}{Ch^{\xi}})^{\frac{1}{2(\Theta-1)}}) \tag{5}$$

к решению u_h аппроксимированной задачи, а при $\Theta = 1$ значения и решения u_h и u_h^c задач совпадают уже для конечных значений параметра штрафа.

Замечание 2. Требование регулярности (4) в пространстве кусочно-линейных функций слабее аналогичного предположения, выдвинутого в [10], и, следовательно, позволяет получить оценку скорости сходимости данного метода и условия согласования его управляющих параметров для более широкого по характеру ограничений класса задач, чем при аппроксимации метода штрафов в функциональных пространствах.

Для задачи упругопластического кручения условие регулярности (4) имеет место со значениями $\Theta = t, \ \xi = n, \ n = \dim\Omega$.

Замечание 3. Условие $\Theta = 1$, как правило, соответствует случаю $t = 1$ и, следовательно, негладкому штрафу. Существующие методы оптимизации негладких функций обычно обладают невысокой скоростью сходимости. Поэтому на практике отдается предпочтение задачам с $t > 1$, которые и будут рассматриваться ниже.

димость последовательности $\{u_h^c\}$ к решению $u(x)$ возможна лишь при условии достаточно точной аппроксимации: $\|u_h - u\| \to 0,\ h \downarrow 0$. Однако, удобнее совместить измельчение шага дискретизации с увеличением штрафных множителей в одной процедуре счета. Методы, позволяющие вместо решения большого числа разных аппроксимированных задач искать минимум задачи (1) в рамках одного итеративного процесса с изменяющимися параметрами, называются итеративными [1, 14, 15, 16].

Далее для задач типа (1) будем рассматривать итеративный метод штрафов и конечных элементов (ниже — МИКЭШ). В его основе лежит постепенное увеличение параметра C вместе с итеративным увеличением размерности аппроксимирующего пространства (числа узлов МКЭ). При этом отпадает необходимость для каждого значения $h_s \to 0, s \to \infty$ стремить C_s к бесконечности.

3. Перед описанием итеративного метода выведем ряд полезных оценок.

Предположим, что

(i) $\forall v \in \mathcal{W}$ существует производная Гато функционала штрафа $\mathcal{H}(v)$: $\mathcal{H}'(v) \in \mathcal{W}', \mathcal{W}'$ — пространство, двойственное к $\mathcal{W}$. (Достаточным условием существования $\mathcal{H}'(v)$ при $t > 1$ может служить наличие $\forall x \in \Omega$ непрерывной слабой производной у функционала $g(v, x)$.)

(ii) $\mathcal{H}'(v)$ локально удовлетворяет условию Липшица с константой $L_{\mathcal{H}'}$.

Из вида функционала $\mathcal{H}(v)$ следует, что $\mathcal{H}'(v)$ есть нулевой элемент пространства $\mathcal{W}'$ $\forall v \in K$. Вследствие этого для производной Гато выпуклого функционала $\mathcal{H}'(v)$ справедливы следующие неравенства:

$$\mathcal{H}(w) \leq \mathcal{H}(v) + \langle\, \mathcal{H}'(w), w - v \,\rangle_{\mathcal{W}} \;=\; \langle\, \mathcal{H}'(w) - \mathcal{H}'(v), w - v \,\rangle_{\mathcal{W}} \;\leq$$
$$\leq\; \|\mathcal{H}'(w) - \mathcal{H}'(v)\|_{\mathcal{W}'} \|w - v\|_{\mathcal{W}} \;\leq\; L_{\mathcal{H}'} \|w - v\|^2_{\mathcal{W}} \quad \forall v \in K, \forall w \in \mathcal{W},$$

т. е.

$$\mathcal{H}(w) \;\leq\; L_{\mathcal{H}'} \|w - v\|^2_{\mathcal{W}} \quad \forall v \in K, \forall w \in \mathcal{W}. \tag{6}$$

Оценим норму $\|w - v\|_{\mathcal{W}}$ в случае, когда в качестве w берется кусочно-линейный интерполянт $\tilde{v}_h$ функции $v(x)$.

Получение оценки $\|v - \tilde{v}_h\|_{\mathcal{W}}$ основывается на свойствах конечноэлементной аппроксимации, теоремах вложения Соболева и, как отмечает Ф. Сьярле в [2], возможно лишь в предположении достаточной гладкости функции $v(x)$.

Предположим, что для некоторых целых чисел $m \geq 0, k \geq 0$ и некоторых чисел $p, q \in [1, \infty]$ функция

$$v(x) \in H^{k+1,p}(\Omega), \tag{7}$$

$$\mathcal{W} = W^{m,q}(\Omega)$$

и выполняются непрерывные вложения

$$W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \tag{8_1}$$

$$W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \tag{8_2}$$

$$V_h \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega), \tag{8_3},$$

где $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ — пространство непрерывных в $\bar{\Omega}$ функций.

Заметим, что для конкретных задач зачастую точно удается установить тот порядок гладкости, которым обладает решение [2, 3]. К примеру, в задаче упругопластического кручения [3]

$$k = 1,\ u(x) \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}),\ 1 < p < \infty,$$

в задаче о мембране и ряде других задач, рассмотренных в [2, 8]

$$k = 1,\ p = 2,\ u(x) \in H^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}).$$

Поэтому предположения (7), (8_2) не следует считать очень жесткими.

Благодаря включению (8_2) функция $v(x) \in W^{k+1,p}(\Omega)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и, следовательно, корректно определен ее кусочно-линейный интерполянт $\tilde{v}_h(x)$. Являясь элементом пространства кусочно-линейных функций V_h, интерполянт

$$\tilde{v}_h(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x),\ a_i = v(x_i)$$

принадлежит в силу условия (8_3) пространству $W^{m,q}$.

Тогда с помощью вложения (8_1) на каждом элементе T триангуляции $\mathcal{T}_h$ погрешность интерполяции оценивается следующим образом [2], (с.128):

$$\|v - \tilde{v}_h\|_{m,q,T} \leq P\ (\mathrm{mes}(T))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T},$$

где P — не зависящая от h постоянная, $|\cdot|_{k+1,p,T}$ — полунорма в $W^{k+1,p}(T)$. Из неравенства на элементе T несложно получить оценку $\|v - \tilde{v}_h\|_{m,q,\Omega}$:

$$\|v - \tilde{v}_h\|^q_{m,q,\Omega} \ = \ \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} \|v - \tilde{v}_h\|^q_{m,q,T} \ \leq$$

$$\leq \ P h^{[\frac{n(p-q)}{pq}+k+1-m]q} \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} |v|^q_{k+1,p,T} \ \leq$$

$$\leq \ P h^{\frac{n(p-q)}{p}} h^{(k+1-m)q} \sum_{T \subset \mathcal{T}_h} (\int_T \sum_{|\alpha|=k+1} |\partial^\alpha v|^p \ dx)^{q/p} \ \leq$$

$$\leq P h \ldots h \ldots |v|_{k+1,p,\Omega},$$

так как из определения пространства $\mathcal{W}$ $q \geq p$ и $h = \max_T h_T$. Следовательно,

$$\|v - \tilde{v}_h\|_{m,q,\Omega} \leq \ P|v|_{k+1,p,\Omega}\ h^{k+1-m+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}. \tag{9}$$

Замечание 4. Применительно к задаче упругопластического кручения указанные вложения и оценка при $n=2,\ p=2$ примут вид:

$$\mathcal{W} = W^{1,2t}(\Omega);\ k=1,\ t>1;$$

$$H^2(\Omega) = W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2t}(\Omega)$$

$$W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega});$$

$$V_h \hookrightarrow W^{1,2t}(\Omega),$$

где первое из вложений имеет место $\forall\ t>1$ в соответствии с включением ([2], с.118)

$$W^{l,j}(\Omega) \hookrightarrow L_z(\Omega)\ \forall\ z \in [1,\infty) \text{ при } l = \frac{n}{j}$$

и вытекающим из него преобразованием порядков дифференцирования вложением

$$W^{l+1,j}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,z}(\Omega)\ \forall\ z \in [1,\infty) \text{ при } l = \frac{n}{j}$$

$$\|v - \tilde{v}_h\|_{1,2t,\Omega} \leq \ P h^{1/t}\|v\|_{H^2(\Omega)},$$

причем последнее неравенство имеет место в силу эквивалентности нормы и полунормы в пространстве $H^2(\Omega)$ при нулевых граничных условиях, т.е. в $H_0^2(\Omega)$.

Неравенство (9) позволяет оценить значение функционала штрафа в точке $\tilde{v}_h$, аппроксимирующей функцию $v(x)$, удовлетворяющую ограничениям, следующим образом:

$$\mathcal{H}(\tilde{v}_h) \leq \mathrm{const}(L_{\mathcal{H}'}, P)\ |v|^2_{k+1,p,\Omega}\ h^{2(k+1-m+n(1/q-1/p))};$$

$$\mathcal{H}(\tilde{v}_h)\ \leq\ O(h^{2(k+1-m+n(1/q-1/p))}). \tag{10}$$

Введем следующие обозначения: убывающей последовательности параметров аппроксимации $h_s,\ s\to\infty$ соответствует возрастающая последовательность размерностей аппроксимирующих пространств N_s. Запись $(a\|s)$ подчеркивает принадлежность вектора $a = (a_i)^T,\ i = \overline{1,N_s}$ N_s-мерному пространству коэффициентов; S_{N_s} — шар в пространстве $\mathbf{R}^{N_s}$, соответствующий множеству $S_r(0)\cap V_{h_s}$. Ниже пространство V_{h_s} и кусочно-линейные соответственно.

Опишем МИКЭШ. Выберем возрастающую последовательность штрафных констант $C_s \uparrow \infty$ и убывающую последовательность параметров аппроксимации $h_s \downarrow 0$ так, чтобы

$$\forall v \in K \quad C_s \mathcal{H}(\tilde{v}_s) \to 0 \quad \text{при } s \to \infty, \tag{11}$$

$\tilde{v}_s = (\tilde{a}\|s)\varphi_s$ — интерполянт функции v.

На множествах S_{N_s} рассмотрим последовательность задач оптимизации в конечномерных пространствах:

$$\min_{a \in S_{N_s}} I_{c_s}(a\|s), \tag{$\hat{1}_{c,s}$}$$

$$I_{c_s}(a\|s) = I(a\|s) + C_s G(a\|s), \quad C_s \uparrow \infty, \; h_s \downarrow 0, \; s = 1, 2, ...$$

Функции $I_{c_s}(a\|s)$ аппроксимируют оштрафованный целевой функционал задачи (1). Для каждого значения s реализацию минимума функции $I_{c_s}(a\|s)$ в пространстве $\mathbf{R}^{N_s}$ обозначим $a^*\|s$. Соответствующую ей кусочно-линейную функцию — u_s^c. Требуемое в (11) согласование C_s и h_s (соответственно $C_s G(\tilde{a}\|s) \to 0, s \to \infty$) всегда возможно в силу непрерывности G и предполагает достаточно медленный рост C_s. Например, для задач, удовлетворяющих предположениям (i), (ii), (7), (8), достаточно выбрать C_s из условий

$$C_s = \bar{o}((\frac{1}{h_s})^{2(k+1-m+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}))}, \; \frac{1}{q} > \frac{n - p(k+1-m)}{np}, \tag{12}$$

чтобы в соответствии с (10)

$$C_s \mathcal{H}(\tilde{v}_s) \to 0 \text{ при } s \to \infty \; (C_s G(\tilde{a}\|s) \to 0, \; s \to \infty).$$

При $k = 1, m = 1, n = 2, p = 2$, (что имеет место для ряда задач математической физики) для выполнения (11) достаточно, чтобы

$$C_s h_s^{\frac{4}{q}} \to 0, \; s \to \infty,$$

откуда следует, что имеется довольно большой выбор различных последовательностей $C_s \uparrow \infty$, не обязательно медленно растущих.

Заметим, что вообще говоря, $\tilde{v}_s$ может не принадлежать множеству K.

Теорема 1. В предположениях (2), (11) последовательность $\{u_s^c\}$, реализующая метод итеративного штрафования и итеративной аппроксимации дачи (1).

Доказательство. Для любого s функция u_s^c есть минимум функционала $J_{c_s}(v_s)$ на множестве $V_s \cap S_r(0)$, и в силу предположения (2) — на пространстве V_s. Следовательно, справедливо неравенство

$$J_{c_s}(u_s^c) \leq J_{c_s}(\tilde{u}_s).$$

В силу условия (11) и непрерывности функционала $J(v)$ получаем ограниченность сверху последовательности $\{J_{c_s}(u_s^c)\}$:

$$\limsup_{s\to\infty} J_{c_s}(u_s^c) \leq \limsup_{s\to\infty} J(\tilde{u}_s) = J(u).$$

Поэтому $\mathcal{H}(u_s^c) \to 0,\ s \to \infty$, так как $C_s \uparrow \infty$.

Поскольку $u_s^c \in S_r(0)$, то по свойству слабой полунепрерывности снизу функционала $\mathcal{H}(v)$ как непрерывного и выпуклого для любой слабой предельной точки u' последовательности $\{u_s^c\}$ можно записать неравенство

$$0 = \lim_{s\to\infty} \mathcal{H}(u_s^c) \geq \mathcal{H}(u') \geq 0,$$

из которого следует, что любая слабая предельная точка последовательности $\{u_s^c\}$ принадлежит множеству ограничений задачи (1).

Функционал $J(v)$ также слабо полунепрерывен снизу. Поэтому справедлива цепочка неравенств

$$J(u) \leq J(u') \leq \liminf_{s\to\infty} J(u_s^c) \leq \limsup_{s\to\infty} J(u_s^c) \leq \limsup_{s\to\infty} J_{c_s}(u_s^c) \leq J(u)$$

и

$$J(u) \leq \liminf_{s\to\infty} J(u_s^c) \leq \liminf_{s\to\infty} J_{c_s}(u_s^c) \leq \limsup_{s\to\infty} J_{c_s}(u_s^c) \leq J(u),$$

$$\text{т.е. } J(u') = J(u) = \lim_{s\to\infty} J(u_s^c),\ \lim_{s\to\infty} J_{c_s}(u_s^c) = J(u),$$

и последовательность $\{u_s^c\}$, построенная с помощью итеративной аппроксимации метода штрафов, является минимизирующей по функционалу в том смысле, что $\lim_{s\to\infty} J(u_s^c) = J(u)$. Это на основании сильной выпуклости функционала J_{c_s} в H гарантирует ее сильную сходимость к единственному решению задачи (1), т. е. к функции $u(x)$:

$$\frac{\mu}{2}\|u(x) - u_s^c(x)\|_H \leq J_{c_s}(u) - J_{c_s}(u_s^c) = J(u) - J_{c_s}(u_s^c) \to 0, \quad s \to \infty;$$

$$\|u(x) - u_s^c(x)\|_H \to 0, \quad s \to \infty,$$

причем $\lim_{s\to\infty} C_s\mathcal{H}(u_s^c) = 0$, т. е. $C_sG(a^*\|s) \to 0,\ s \to \infty$.

аппроксимированных множеств ограничений, так как предполагает штрафование исходных ограничений и аппроксимацию задачи безусловной оптимизации. В тех же случаях, когда для всех значений s гарантирована непустота множеств $K_s = K \cap V_s \cap S_r(0)$, как, например, в задаче упругопластического кручения, в схеме $(\hat{1}_{c,s})$ можно отказаться от условия (11) медленного роста штрафа.

Теорема 2. Пусть аппроксимированное множество ограничений $K_s = K \cap V_s \cap S_r(0)$ непусто $\forall\ s$ и имеет место сходимость последовательности конечноэлементных аппроксимаций:

$$\|u - u_s\|_H \to 0,\ s \to \infty,\ u_s = \operatorname{argmin}_{v_s \in K_s} J(v_s).$$

Тогда МИКЭШ сходится при произвольном темпе роста последовательности штрафных констант.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично теореме 1. Достаточно вместо интерполянта $\tilde{u}_s$ взять функцию $u_s = \operatorname{argmin}_{v_s \in K_s} J(v_s)$. Так как $K_s \subset K, u_s \in K_s$, то
$J_{c_s}(u_s) = J(u_s)$ и $J_{c_s}(u_s^c) \leq J(u_s)\ \forall\ s = 1, 2, \ldots$.
В силу предположения (2) последовательность $\{J_{c_s}(u_s^c)\}$ ограничена сверху:

$$\sup J_{c_s}(u_s^c) \leq \mathcal{M}(r),\ \limsup_{s \to \infty} J_{c_s}(u_s^c) \leq \limsup_{s \to \infty} J(u_s) = J(u), -$$

точное равенство имеет место, поскольку последовательность конечноэлементных аппроксимаций $\{u_s\}$ сходится в норме пространства H к решению $u(x)$ задачи (1): $\|u_s - u\| \to 0,\ s \to \infty$.

Замечание 5. В случае, когда функционал $J(v)$ минимизируется на множестве

$$K = \{v \in H |\ g(v, x) \leq 0 \text{ п.в. в } \Omega, \pi(v, y) \leq 0 \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

причем $\forall y \in \Gamma\ \pi(v, y)$ есть непрерывный и выпуклый по v функционал, для сходимости МИКЭШ достаточно, чтобы $\forall\ v \in K$ выполнялось условие

$$C_s \mathcal{H}(\tilde{v}_s) + \mathrm{A}_s P(\tilde{v}_s) \to 0 \quad \text{при } s \to \infty, \tag{11'}$$

где

$$P(\tilde{v}_s) = \int_\Gamma [\pi^+(\tilde{v}_s, y)]^t dy,\ \mathrm{A}_s \uparrow \infty.$$

Теоремы 1, 2, однако, ничего не говорят о скорости сходимости последовательности $\{u_s\}$ к $u(x)$, которая в рамках этих теорем может быть сколь

также имеются оценки скорости сходимости метода штрафов в функциональном или конечномерном пространствах, скорость сходимости итеративных методов может быть оценена, например, следующим образом:
при штрафовании дискретной задачи с ограничениями

$$\|u - u_h^c\| \ \leq \ \|u - u_h\| + \|u_h - u_h^c\| \ \leq \ 2\max(\|u - u_h\|, \|u_h - u_h^c\|) \qquad (13_1)$$

или при аппроксимации метода штрафов

$$\|u - u_h^c\| \ \leq \ \|u - u^c\| + \|u^c - u_h^c\| \ \leq \ 2\max(\|u - u^c\|, \|u^c - u_h^c\|). \qquad (13_2)$$

В оценках (13) $h = h_s$, $C = C_s$ и через u_c обозначено решение задачи (1_c) при $C = C_s$.

Из приведенных неравенств видно, что при неточном учете ограничений нет смысла в достаточно точной аппроксимации и наоборот. Другими словами, для оптимальной скорости сходимости итеративных методов параметры штрафа и дискретизации должны быть согласованы так, чтобы обеспечить одинаковую точность аппроксимации и метода штрафов.

На основе известной ошибки аппроксимации $\|u - u_h\|$ и неравенства (13_1) можно для описанного в утверждении 1 класса задач вывести условия на темп роста штрафных коэффициентов, обеспечивающие оптимальную скорость сходимости итеративного метода интегральных штрафов и конечных элементов.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия утверждения 1 и последовательность конечноэлементных аппроксимаций $\{u_h\}$, $h = h_s$, сходится со скоростью $O(h^\delta)$ к решению $u(x)$ исходной задачи. Тогда при выборе штрафного параметра $C = C_s$ согласованно с h следующим образом:

$$C = O((\frac{1}{h})^{2\delta(\Theta-1)+\xi}), \ - \qquad (14)$$

метод интегральных штрафов и КЭ также сходится со скоростью $O(h^\delta)$.

Оценка (14) не улучшаема (по порядку), поскольку при выборе штрафного множителя меньшего, чем требуется в (14), ухудшается точность учета ограничений. Оценка $\|u_h - u_h^c\|$ будет хуже погрешности аппроксимации, что замедлит сходимость. Наоборот, сколь точно ни решалась бы задача $(\hat{1}_c)$ при $C \uparrow \infty$, ее решение будет не более, чем приближением решения $u(x)$ порядка $O(h^\delta)$, и скорость сходимости итеративного метода не изменится.

Отметим, что вывод оценок погрешности аппроксимации $\|u^c - u_h^c\|$, $\|u - u_h\|$ или скорости сходимости метода штрафов в функциональных пространствах для нелинейных задач — трудоемкий процесс, основывающийся функционалов и конкретных множеств ограничений. Некоторые примеры такого рода имеются в [2]. Оценку $\|u-u_h\|$ в общем случае нельзя свести к оценке погрешности интерполяции $\|u-\tilde{u}_h\|$, поскольку возможна ситуация, когда $\tilde{u}_h \notin K_h$. Так для задачи упругопластического кручения при $n=2$ $\tilde{u}_h \notin K_h$. На основании результатов о регулярности решения $u(x)$ из [3]

$$u(x) \in W^{2,p}(\Omega)\ \forall\ p \in (1;\infty),$$

и оценка $\|u-\tilde{u}_h\|_{H,\Omega}$ дается формулой (9) $\forall\ p \in [2;\infty)$, $k=1$:

$$\|u-\tilde{u}_h\|_{H,\Omega}\ \leq\ O(h^{1+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}).$$

Оценку же скорости сходимости последовательности $\|u-u_h\|_H$ можно получить лишь для $p \in (2;\infty)$ [2], (с.295):

$$\|u-u_h\|_H = O(h^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}).$$

Поэтому для многих задач реальна ситуация, когда оценить погрешность интерполяции $\|u-\tilde{u}_s\|_{\mathcal{W}}$ проще, чем доказать сходимость последовательности конечноэлементных аппроксимаций $\{u_s\}$ к решению $u(x)$. Тогда для их решения с помощью МИКЭШ предпочтительнее обеспечить согласование C_s с h_s в соответствии с (11) или (12), чем заботиться о непустоте $K \cap V_s \cap S_r(0)$ или о сходимости МКЭ, тем более, что возможностей "хорошего" выбора констант штрафа в рамках (11), (12) немало.

4. Скажем еще несколько слов о преимуществах итеративных схем с медленным ростом штрафа, когда для решения задачи (1) они сочетаются с численными методами безусловной минимизации, например, с методом градиентного спуска. Несмотря на оптимальность, оценки (13), (14) — асимптотические. На практике же приходится ограничиваться конечными значениями h и C. Поэтому обычно требуется решить большое число сходных конечномерных подзадач, каждая из которых является аппроксимацией задачи (1) со своими согласованными значениями константы штрафа и шага дискретизации, до получения близких решений. Из оценки (14) следует, что условия сходимости комбинированного метода с оптимальной скоростью при подобном способе штрафования ограничений предъявляют довольно жесткие требования к росту штрафного множителя: $C_s > O(\frac{1}{h_s^{\xi}})$, и при $\xi \geq 1$ для каждого уменьшения шага дискретизации вдвое, константа штрафа должна увеличиться более, чем в 2^{ξ} раз. При решении задач $(\hat{1}_{c,s})$ градиентным методом подобный рост штрафа создает серьезные вычислительные трудности, так как ведет к увеличению "овражности" линий ние к минимуму имеет слишком замедленный зигзагообразный характер. Если начинать счет на измельченной сетке с больших значений константы C_s из произвольной точки, не близкой к оптимуму, то из-за зигзагообразного спуска, малости шага по антиградиенту и накапливающейся погрешности вычислений реализовывать с уменьшением h подобные схемы на практике становится очень непросто.

В этой связи интерес представляет совмещение штрафования, аппроксимации и оптимизации градиентными методами в рамках одной итеративной проуедуры. При этом заданием достаточно медленной скорости роста штрафных множителей можно добиться лучшей обусловленности минимизируемой функции на каждой итерации. Ее линии уровня менее вытянуты, и движение к минимуму происходит ровнее, с бо́льшим шагом по антиградиенту. Каждый раз после очередного дробления сетки спуск с увеличенным значением параметра штрафа начинается уже не с произвольной, возможно, далекой от решения точки, а с некоего приближения, полученного на предыдущих шагах. Это приближение каждый раз улучшается за счет уточнения аппроксимации, не слишком резкого возрастания штрафа и довольно большого числа шагов по антиградинту на предыдущих итерациях. В этом смысле подобные итеративные схемы можно рассматривать как методы поиска хорошего приближения к решению с малыми затратами, что делает их актуальными. При совмещении в рамках одной итеративной процедуры штрафования, аппроксимации и оптимизации градиентными методами следует согласовывать параметры штрафа не только с размерностью аппроксимирующего пространства, но и с точностью конечномерной минимизации в соответствующих аппроксимирующих пространствах.

Список литературы

1. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

3. Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.

управления. М.: Наука, 1973.

5. Grossmann C., Kaplan A. On the solution of discretized obstacle problems by an Adapted Penalty Method // Computing. V. 35. N 3-4, 1985.

6. Каплан А. А. Об устойчивости методов решения задач выпуклого программирования и вариационных неравенств //Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1988.

7. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

8. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

9. Федоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

10. Станюкова И. В. О сходимости метода штрафов для одного класса задач выпуклой оптимизации в гильбертовом пространстве // Вестник Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн., 1993. N 3.

11. Андреев В. Б., Руховец Л. А. Проекционные методы. М.: Серия Знание. Математика и кибернетика, 1986. N 11.

12. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

13. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

14. Новикова Н. М. Об итеративной регуляризации аппроксимации метода штрафов в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. N 6.

15. Новикова Н. М. Итеративные стохастические методы решения вариационных задач математической физики и исследования операций: Автореферат дис. . . . д. ф. -м. н. . М.: ВЦ АН СССР, 1991.

16. Kaplan A. , Tichatschke R. Prox-regularization and Solution of Ill-Pozed Elliptic Variational Inequalities. Report of Inst. fur Angewandte Mathem. Berlin: Humboldt-Univ. , 1993