# Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. V.

## Задачи и методы исследования допустимости в условиях случайной пропускной способности [1]

©1998 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова**
Москва, ВЦ РАН
Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассмотрена задача анализа эффективности многопользовательских сетевых систем со случайной пропускной способностью ребер физического графа сети. Предложен ряд вероятностных и стохастических формулировок соответствующей задачи о допустимости многопродуктовых потоковых сетей. Исследованы постановки, учитывающие возможную неинформированность (неполную или неточную информированность) о функции распределения случайных факторов. Указаны методы решения возникающих задач стохастической оптимизации.

**Введение.** Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] с неточно или неполностью известным вектором входной нагрузки (требований тяготеющих пар). В [1] были даны адекватные обобщенные постановки задачи о допустимости, в частности, гарантированная (предполагающая допустимость для любого вектора требований) и слабая (рассчитывающая на допустимость для хотя бы одного), указаны возможности их решения. В [5] изучалась задача о допустимости в случае неизвестных требований и были предложены методы ее решения с помощью параметрического анализа. Завершающее рассмотрение задачи о допустимости в условиях неполной информированности о векторе требований, т.е. в условиях субъективной неопределенности (см. [1, Введение]), проведено в [6]. В [6] требования тяготеющих пар считаются случайными величинами с не обязательно известной функцией распределения. Здесь возник ряд новых обобщенных постановок задачи о допустимости, зависящих как от отношения к случайности (гарантированный подход или допускающий осреднение), так и от этапности поступления информации о реализации случайного фактора.

Настоящая работа посвящена проблеме анализа МП-сетей, когда случайность влияет на пропускную способность ребер физического (а

[1] Работа поддержана РФФИ по грантам N.96-01-00786 и N.98-01-00233

ки задачи о допустимости во многом симметричны постановкам из [6] за счет того, что вектор требований является столбцом матрицы ограничений, а вектор пропускной способности входит в их правую часть. Тем не менее содержательно указанные варианты неопределенных факторов существенно различаются (прежде всего тем, что неопределенность, исследуемая в настоящей работе, является объективной). Это обусловливает и специфические особенности исследуемого класса задач, и отличие от [6] в математических формулировках.

Укажем также, что небольшими изменениями пропускной способности и вектора требований можно пренебречь при решении задачи анализа МП-сети. Действительно, в [7, 8] исследована устойчивость решения указанной задачи (суперконкурентного распределения потоков) по отношению к небольшим возмущениям исходных данных и доказана его Липшиц-непрерывность.

**1. Основные предположения.** Рассмотрим вероятностные постановки задачи о допустимости МП-сети, связанные с неопределенностью вектора $c$ пропускной способности ребер физического графа $\mathcal{G}$ сети. Предположим, что вектор $c$ является реализацией с.в. $c(\cdot)$, изменяющейся в пределах $c' \le c \le c''$. Таким образом могут быть учтены как случайные потери пропускной способности каналов связи (из-за изменений внешней среды, например, метеоусловий), так и случайный выход из строя отдельных ребер сети (в результате аварий или поломок). В 1-й ситуации границы $c'$ и $c''$ несильно отличаются, изменения $c$ происходят сравнительно быстро и имеет смысл рассматривать *жесткую* постановку задачи анализа МП-сети — не допускающую апостериорного перераспределения потоков после каждой новой реализации с.в. $c(\cdot)$. Для 2-й — вектор $c'$ может иметь нулевые компоненты, обнуляющие поток для какой-либо тяготеющей пары на довольно продолжительное время (до восстановления), что приводит к необходимости перераспределения потоков. В данной ситуации условие недискриминирования пользователей становится еще более важным, и эта важность обосновывает выбор конкурентного [10], или максиминного [9], распределения потоков в качестве приемлемого поставарийного варианта.

Напомним (см. [1]), что *конкурентным* называется распределение потоков, максимизирующее уровень обеспеченности требований тяготеющих пар в сети, т.е. реализующее

$$\theta_0(c,d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{z\in Z(c)} \min_{i\in M(d)} \frac{z_i(f)}{d_i}. \tag{1.1}$$

$M(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M |\ d_i \neq 0\}$, $M \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, m\}$ — множество индексов тяготеющих пар, или продуктов в МП-сети, $d = (d_1, \ldots, d_m)$ — вектор требований, или заявок, на потоки различных продуктов (будем в данной статье считать фиксированным и известным всюду, где не оговаривается его случайность), $z(f)$ — вектор значений потоков продуктов, или мультипоток, соответствующий распределению потоков $f = \{f_{ij}\}$, потоковые переменные $f_{ij}$ обозначают потоки $i$-го вида продуктов по ребрам $k \in E$ физического графа МП-сети в прямом $(f_{ik})$ и обратном $(f_{i(k+e)})$ направлениях, $E \stackrel{\text{def}}{=} \{k = 1, 2, \ldots, e\}$ — множество индексов ребер, $Z(c)$ — множество достижимых мультипотоков, а именно, множество $z(f)$ для всех $f$, удовлетворяющих ограничениям по пропускной способности ребер МП-сети, определяемым вектором $c = (c_1, \ldots, c_e)$, и условиям неразрывности потоков, т.е. для $f \in \mathcal{F}(c)$. Формально $\mathcal{F}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \geq 0|$

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+e)}) \leq c_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, e, \tag{1.2}$$

$$\exists z = z(f) \geq 0 : \quad f_i A = z_i B_i, \quad i \in M\}, \tag{1.3}$$

где $A$ — матрица инциденций “дуги-вершины” физического графа сети, а $B$ — матрица связей логического графа сети, и нижний индекс у матрицы обозначает соответствующую вектор-строку.

На практике для перераспределения потоков в поврежденной сети, как правило, известен стандартный набор “обходных” маршрутов. В частности, в телефонии существует понятие “графика обходов и замен”, задающего для всех возможных случаев аварий порядок перераспределения потоков тяготеющих пар, с тем чтобы компенсировать потери наиболее пострадавших за счет не затронутых данной аварией пользователей. Это — практический аналог максиминного правила (1.1). Конечно, получающийся мультипоток не всегда точно соответствует конкурентному, но в принципе маршрутные таблицы тоже можно совершенствовать. Поэтому мы будем, как и ранее, считать, что потоки распределяются оптимальным образом (ибо указанное предположение позволяет при решении задачи анализа получать незаниженные гарантированные оценки). Методы поиска конкурентного распределения потоков см. в работах [11, 12, 13, 14, 15].

Для жестких постановок идея конкурентного распределения потоков реализуется формулами, отличными от (1.1). Тем не менее, содержательно эти формулы будут также соответствовать задаче максимизации уровня обеспеченности требований тяготеющих пар (о.т.п.), под лученного потока к заданным требованиям.

**2. Формализация условий жесткой постановки.** Обсудим специфику жесткой постановки задачи о допустимости МП-сети со случайной пропускной способностью. В отсутствие возможности перераспределения потоков необходимо предусмотреть выполнение физических ограничений (1.2) на потоки при уменьшении пропускной способности ребер. Разумным представляется следующее допущение: при уменьшении (увеличении) пропускной способности ребра все (ненулевые) потоки по нему пропорционально изменяются, т.е. вместо потоков $f_{ik}$ и $f_{i(k+e)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, проходивших по $k$-му ребру пропускной способности $c_k$, будут проходить потоки

$$f_{ik}c_k(\omega)/c_k \;\text{ и }\; f_{i(k+e)}c_k(\omega)/c_k, \quad i \in M, \tag{2.1}$$

зависящие от случайной реализации $\omega \in \Omega$. Однако, при этом для распределения потоков нарушается условие неразрывности (1.3), задающее мультипоток в принятой модели МП-сети (см. [1]). Чтобы определить мультипоток для рассматриваемого случая нам понадобится ввести пути передачи потоков, т.е. использовать смешанную модель МП-сети в "дуго-вершинной" форме (1.3) и в "дуго-путевой" форме (см. например, в [16]).

Представим значение $z_i(f)$ $\forall i \in M$ в виде суммы потоков $z_i^\xi$ по отдельным путям (цепочкам смежных дуг, соединяющим источник и сток $i$-го продукта) $\xi \in \Xi_i$. Аналогично, поток $f_{ij}$ каждого $i$-го вида продукта по произвольной $j$-й дуге разделяется на потоки $f_{ij}^\xi$ по путям $\xi \in \Xi_i$ этого продукта. Тогда для любого пути $\xi \in \Xi_i$ выполнено

$$z_i^\xi = \min_{j \in \xi} f_{ij}^\xi. \tag{5.3}$$

В общем случае, если обозначить через $F$ произвольный набор

$$F \overset{\text{def}}{=} \{f_{ij}^{\xi_i} \geq 0 |\; \xi_i \in \Xi_i,\; i \in M,\; j = k, k+e,\; k \in E\},$$

а через $\tilde{z}(F)$ — мультипоток с компонентами

$$\tilde{z}_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{\xi_i \in \Xi_i} z_i^{\xi_i}, \tag{2.3}$$

то можно определить *обобщенные дуговые потоки*

$$\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_{ij}(F) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\xi_i \in \Xi_i} f_{ij}^{\xi_i}. \tag{2.4}$$

ведливо условие (1.3) неразрывности потока, то выполнено равенство $\tilde{z}(F) = z(\tilde{f})$, т.е. мультипоток определяется с помощью (1.3) согласно "дуго-вершинной" модели. В противном случае для вычисления мультипотока в МП-сети следует воспользоваться представлением (2.2)–(2.3).

В рассматриваемой ситуации, когда перераспределения потоков не происходит, а их значения на дугах меняются достаточно произвольным образом (вслед за изменением пропускной способности), выполнение условия неразрывности (1.3) оказывается исключительным явлением. Отметим, что жесткая постановка не допускает переброски части потока с одного пути на другой даже той же самой тяготеющей пары (подобное ослабление см. далее в разд.3.3). А если поток одной тяготеющей пары проходит несколькими (различными) путями, то его величина на каждом пути может лимитироваться отведенной пропускной способностью на разных дугах — реализациях минимума в (2.2). Значит, такие пути нужно учитывать по отдельности. Поэтому мы вынуждены, несмотря на значительное увеличение размерности, прибегнуть к разделению обобщенных дуговых потоков по путям их прохождения, задаваемому набором $F$ — *обобщенным дуго-путевым распределением потоков.*

Независимо от формы представления, обобщенные дуговые потоки в МП-сети должны удовлетворять ограничениям (1.2) по пропускной способности ее ребер. С учетом предположения о пропорциональном сокращении обобщенных потоков при уменьшении пропускной способности, ограничения (1.2) для рассматриваемой постановки естественнее записать как равенства. Введем для допустимого множества обобщенных распределений потоков обозначение

$$\tilde{\mathcal{F}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{f} \mid \tilde{f}_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} (\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)}) = c_k \quad \forall k \in E\}. \tag{2.5}$$

Фактически, потоковые переменные $\tilde{f}_{ij}$ в такой постановке имеют смысл той части пропускной способности $j$-й дуги, что отведена на передачу $i$-го вида продукта (например, число стандартных телефонных каналов, зарезервированных для $i$-й тяготеющей пары). Однако, эта величина не обязательно является физической, т.е. указанное отведение может осуществляться умозрительно. Пример такой ситуации дает поток машин на участке шоссе после развилки, в которой соединились два потока, когда светофором отведено одинаковое время на пропускание потоков с разных сторон (при этом просто полагаем, что данной дуги потокам).

**3. Постановки с осреднением.** Начнем с исследования задачи о допустимости в среднем, или *о средней допустимости* МП-сети со случайной пропускной способностью. Как уже обсуждалось в [6] и разд.1, задача о средней допустимости может быть формализована разными (в том числе, и по содержанию) способами, причем мы стараемся в данной работе следовать идее конкурентного распределения потоков, т.е. максимизации уровня обеспеченности по всей сети требований тяготеющих пар. Этот уровень определяется минимальным из значений обеспеченности требований (см. (1.1)) и для жесткой постановки, согласно сказанному в предыдущем разделе (см. (2.1)), равен

$$\vartheta(F,c,d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\tilde z_i(\{f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j}{c''_j}\}) = \min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}c_j/c''_j, \tag{3.1}$$

если формально положить $c_{k+e} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_k$. Здесь $F=\{f_{ij}^{\xi_i}\}$ — обобщенное дуго-путевое распределение потоков на МП-сети с вектором $c''$ (максимумом) пропускной способности, выражение в фигурных скобках задает его изменение в результате сокращения пропускной способности до $c=c(\omega)$, $\tilde z_i(\{\cdot\})$ соответствует измененному распределению по (2.3), а последнее равенство получено на основании (2.2)–(2.3).

Заметим, что при известном $c$ задача максимизации $\vartheta(F,c,d)$ эквивалентна задаче (1.1), а именно, $\forall c,\quad c'\le c\le c''$:

$$\max_{F:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')}\vartheta(F,c,d)=\theta_0(c,d)$$

и реализация $F^*$ максимума может быть найдена в виде $f_{ij}^{*\,\xi_i}=f_{ij}^{0\,\xi_i}c''_j/c_j$ $\forall i\in M,\ j=\overline{1,2e}$, для любого дуго-путевого распределения потоков $F^0$, соответствующего решению $f^0(c,d)$ задачи (1.1) [17]. Но в рассматриваемом случае значение $c$ заранее не известно (является случайным) и поэтому исследуются различные вероятностные формулировки, в том числе, допускающие осреднение.

**3.1. Жесткие постановки задачи о средней допустимости.** Аналогично [6], для жесткой постановки задачи о средней допустимости считаем, что надо так выбрать исходное распределение потоков, чтобы максимизировать среднее значение уровня (3.1) обеспеченности требований всех тяготеющих пар. В результате, приходим к поиску

$$\hat\theta_0^{жC} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{F:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')}\int_\Omega \vartheta(F,c(\omega),d)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \tag{3.2}$$

$$= \max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \int_\Omega \min_{i\in M}\{\frac{1}{d_i}\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Как и в статье [6], примем следующие обозначения: $\Omega$ — пространство элементарных событий $\omega$ (от которых зависит значение $c$), $\mathbf{P}$ — вероятностная мера на соответствующей $\sigma$-алгебре борелевских множеств из $\Omega$, функция $c(\cdot)$ $\mathbf{P}$-измерима на $\Omega$, $\mathbf{P}(\{\omega\in\Omega|\ c'\le c(\omega)\le c''\})=1$. Вместо $\mathbf{P}(\{\omega\in\Omega|\ c(\omega)\in C\})$ будем также использовать укороченную запись $\mathbf{P}(c(\cdot)\in C)$ или просто $\mathbf{P}(C)$.

Другая возможная формулировка — когда осредняется не общий уровень $\vartheta$, а значения потоков для каждой тяготеющей пары, и максимизируется не средний уровень обеспеченности, а уровень средней обеспеченности требований тяготеющих пар (см. определение $\theta_0^{\text{ж}C'}$ в [6]) — дает следующую задачу оптимизации: найти $\hat\theta_0^{\text{ж}C'} \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\max_{F:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \int_\Omega \vartheta(F,c(\omega),d)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\int_\Omega \tilde z_i(\{f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\})\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) =$$

$$= \max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\int_\Omega \sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega). \qquad (3.3)$$

Однако, мы не будем на ней подробнее останавливаться в силу аналогии с (3.2), укажем только очевидную оценку

$$\hat\theta_0^{\text{ж}C} \le \hat\theta_0^{\text{ж}C'} \le \theta_0(\hat c, d).$$

Сведение, аналогичное [1,(1.13)], в задаче (3.2) приводит (согласно [18]) к максимизации в пространстве непрерывных функций

$$\max_{F:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \max_{\theta(\cdot)\in\mathbf{C}(\Omega)} \{\int_\Omega \theta(\omega)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)|\ \theta(\omega)d_i \le \tilde z_i(\{f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\})\ \ \forall i\in M,\ \omega\in\Omega\}$$

или для конечных $\Omega$ — к задаче ЛП большой размерности

$$\hat\theta_0^{\text{ж}C} = \max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \max_{\{\theta_\omega\}_{\omega\in\Omega}} \max_{\{\phi_{i\omega}^\xi|\ \xi\in\Xi_i,\ i\in M,\ \omega\in\Omega\}} \{\sum_{\omega\in\Omega}\theta_\omega\mathbf{P}(\omega)|\ d_i\theta_\omega \le \sum_{\xi\in\Xi_i}\phi_{i\omega}^\xi,$$

$$\phi_{i\omega}^\xi \le f_{ij}^\xi\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\ \ \forall j\in\xi,\ \forall\xi\in\Xi_i,\ \forall i\in M,\ \forall\omega\in\Omega\}.$$

Поэтому прямое решение (3.2), например, с помощью метода проекций обобщенных градиентов [19], может оказаться более предпочтительным. Подчеркнем, что максимизируемая функция в (3.2) является ния.

Если ф.р. с.в. $\omega$ не известна, но доступно наблюдению сколько угодно независимых реализаций с.в. $c(\omega)$, то (3.2) относится к классу двухэтапных игровых задач стохастического программирования, и для ее решения применйм метод стохастических квазиградиентов [20]. Этот метод аналогичен методу проекций суперградиента — переход к следующей точке осуществляется путем перемещения (с шагом убывающей длины) в направлении суперградиента в текущей точке — но вместо суперградиента интеграла в (3.2) используется суперградиент подынтегральной функции, взятый для случайно выбираемого на каждой итерации значения $c(\omega)$. Указанная процедура применяется и при решении задач с известной ф.р. (чтобы избежать вычисления интегралов по $\omega$), тогда случайная последовательность значений $c(\omega)$ генерируется посредством симуляции. Отметим, что суперградиент интеграла равен интегралу от суперградиента подынтегральной функции.

Поиск суперградиента по $F$ подынтегральной функции в (3.2) — стохастического квазиградиента для задачи (3.2) — проводится довольно просто. А именно, в качестве указанного суперградиента в точке $(\{f_{ij}^{\xi_i}\},\omega)$ может быть выбран произвольный вектор $\psi=\psi(F,\omega)$ с компонентами $\psi_{ij}^{\xi},\ \ j\in\xi,\ \ \xi\in\Xi_i,\ \ i\in M$, такой, что для некоторого $i^0$, реализующего минимум по $i$ в (3.2) в данной точке, и для одного из наборов $j^0(\xi)$, реализующего в (3.2) соответствующий минимум по $j$, выполнено

$$\psi_{i^0 j^0(\xi)}^{\xi}=\frac{1}{d_{i^0}}\frac{c_{j^0(\xi)}(\omega)}{c''_{j^0(\xi)}}\quad \forall\xi\in\Xi_{i^0}$$

$$(j^0(\xi)=j^0(i,\xi)\stackrel{\text{def}}{=}\arg\min_{j\in\xi}f_{ij}^{\xi}\frac{c_j(\omega)}{c''_j},\quad i^0\stackrel{\text{def}}{=}\arg\min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\sum_{\xi\in\Xi_i}f_{ij^0(\xi)}^{\xi}\frac{c_{j^0(\xi)}(\omega)}{c''_{j^0(\xi)}}),$$

а остальные компоненты — нулевые.

Таким образом, на каждом шаге метода стохастических квазиградиентов для тяготеющей пары с наименьшей (на этом шаге) обеспеченностью требований увеличивается ее относительный поток по дуге, оказавшейся для нее узким местом (при данной реализации $c(\omega)$ с.в. $c(\cdot)$). Если подобных $i^0$, $j^0(\xi)$ несколько, например, $K'$ и $K(i^0,\xi)$, то можно взять ненулевыми все такие компоненты стохастического квазиградиента и положить

$$\psi_{i^0 j^0(i^0,\xi)}^{\xi}=\frac{1}{K'K(i^0,\xi)}\frac{c_{j^0(i^0,\xi)}(\omega)}{d_{i^0}c''_{j^0(i^0,\xi)}}\quad\forall\xi\in\Xi_{i^0}.$$

Зададимся произвольным начальным приближением $F^0$, таким, чтобы $\{\tilde f^0_{ij}\} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')$ (2.5), в частности, взяв конкурентное распределение потоков, увеличим потоки произвольных тяготеющих пар на ребрах с ненулевой остаточной пропускной способностью (для которых окажутся в (1.2) строгие неравенства). Дальнейшие приближения определяются с помощью итеративной процедуры

$$F^{t+1} = \mathrm{Pr}_{\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\{F^t + \alpha_t \psi(F^t, \omega^t)\}, \quad \alpha_t \downarrow 0, \quad \sum \alpha_t = \infty, \tag{3.4}$$

где $\omega^t$ — $t$-я независимая реализация с.в. $\omega$, а Pr обозначает оператор проектирования, $t = 0, 1, \ldots$.

Ограничения $\tilde{\mathcal{F}}(c)$ — блочно-симплексные (поскольку мы не отслеживаем выполнения условий неразрывности (1.3)), и можно использовать стандартную процедуру проектирования на симплекс (см. например, в [21]). Согласно [20] $F^t$ сходится к $F^*$ — решению (3.2) — с вероятностью 1. Однако сходимость метода (3.4) — довольно медленная (из-за убывающего шага).

**3.2. О жестких постановках с осреднением коэффициента увеличения пропускной способности.** Отметим, что для жесткой постановки нет смысла вычислять среднюю (по $\omega$) характеристику $\nu_0(c(\omega), d) \overset{\text{def}}{=} 1/\theta_0(c(\omega), d)$ — коэффициента увеличения/уменьшения пропускной способности ребер, требующегося для передачи вектора $d$ требований (см. [1, разд.1.3]). Действительно, в отсутствие возможности динамического перераспределения потоков, даже если есть способы динамического приобретения недостающей пропускной способности, то вряд ли найдется способ динамической продажи лишней взамен. И поэтому соответствующий средний коэффициент не представляет интереса. Определенную практическую ценность может иметь жесткая постановка, в которой осредняется положительная срезка $\nu_0$, т.е. величина $\nu_0^+ \overset{\text{def}}{=} \max[0, \nu_0]$. С учетом невозможности апостериорного управления потоками, здесь получаем следующую задачу оптимизации: найти

$$\min_{\{f^{\xi_i}_{ij}\}:\ \tilde f \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')} \int_\Omega \min\{\nu \geq 1 | \sum_{\xi_i \in \Xi_i} \min_{j \in \xi_i} f^{\xi_i}_{ij} \frac{c_j(\omega)}{c''_j} \geq d_i/\nu \ \ \forall i \in M\} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega).$$

Полученная задача сложнее для счета, чем (3.2), но для нее также можно выписать субградиентный алгоритм. Мы, однако, исследуем ниже более простую и распространенную (например, для телефонных сетей) ется (считается фиксированным), а надо оценить средний коэффициент требуемого увеличения пропускной способности.

Будем предполагать, что исходное распределение потоков удовлетворяло ограничениям по пропускной способности для ее верхней границы: $f \in \mathcal{F}(c'')$, причем, эти ограничения выполнялись как равенства: $f \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')$, и $z(f) = d$, т.е. требования удовлетворялись и лишней пропускной способности не арендовалось. Тогда для дуго-путевой формы выполнено

$$\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i} = f_{ij}^{\xi_i} \quad \forall j \in \xi_i, \quad \sum_{\xi_i\in\Xi_i} \min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i} = d_i \quad \forall i \in M, \tag{3.5}$$

и верхняя оценка значения

$$\int_\Omega \min\{\nu \geq 1 | \sum_{\xi_i\in\Xi_i} \min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i} \frac{c_j(\omega)}{c_j''} \geq d_i/\nu \quad \forall i \in M\}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)$$

может быть найдена как решение задачи поиска

$$\int_\Omega \min\{\nu \geq 1 | \min_{k\in E} \frac{c_k(\omega)}{c_k''} \geq 1/\nu\}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega 1/(\min_{k\in E} \frac{c_k(\omega)}{c_k''})\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) =$$

$$= \int_\Omega \max_{k\in E} \frac{c_k''}{c_k(\omega)}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \tag{3.6}$$

— среднего коэффициента уменьшения пропускной способности наиболее пострадавшего (под воздействием с.в. $\omega$) ребра. Здесь уже можно применить метод Монте-Карло без обращения к сетевой оптимизации.

В случае $|\Xi_i| = 1$ указанная оценка (3.6) является (для жесткой постановки) точной. Но в общем случае она может оказаться сильно завышенной. Поэтому для каждой $\omega \in \Omega$, генерируемой в процессе симуляции, придется найти все ребра $\mathbf{r}_k$, для которых $c_k(\omega) < c_k''$, и все пути $\xi_i$, проходящие по этим ребрам, а потом пересчитать для них коэффициенты изменения потоков по путям

$$\theta_i^{\xi_i}(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{k:\ \xi_i\cap\{k,k+e\}\neq\emptyset} c_k(\omega)/c_k''.$$

В результате определятся коэффициенты обеспеченности требований тяготеющих пар как

$$\theta^i(\omega) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{\xi_i\in\Xi_i} \theta_i^{\xi_i}(\omega) z_i^{\xi_i}/d_i,$$

и можно посчитать значения

$$\hat{\theta}(\omega) = \min_{i\in M} \theta^i(\omega) \quad \text{и} \quad \hat{\nu}(\omega) = 1/\hat{\theta}(\omega), \tag{3.7}$$

ствующих средних коэффициентов.

Однако в целом еще раз подчеркнем нерациональность осреднения коэффициента $\nu$ в контексте постановок настоящей статьи (мы останавливаемся на этом коэффициенте лишь в силу принятой в литературе замены (1.1) задачей минимизации $\nu_0$ [13]). Более адекватной практическим интересам представляется оценка затрат на обеспечение допустимости МП-сети, получаемая простым сравнением векторов $c''$ — используемой вектором $d$ пропускной способности — и $\hat{c}$ — среднего значения с.в. $c(\cdot)$. К сожалению такой простой способ не годится, когда мы хотим оценить не дополнительные затраты, а возможный ущерб для потребителей в отсутствие подобных затрат, чему собственно и посвящена предлагаемая статья.

**3.3. Полужесткая постановка.** Рассмотрим еще один вариант жесткой постановки задачи о средней допустимости МП-сети со случайной пропускной способностью. Он возникает в ситуации, когда после каждой реализации с.в. $c(\cdot)$ разрешается переброска потока с одного пути на другой той же тяготеющей пары, хотя перераспределение отведенной пропускной способности ребер между тяготеющими парами по-прежнему считается невозможным. В этом смысле данная постановка является ослаблением исследованной в предыдущих пунктах, будем называть ее *полужесткой*. Нетрудно видеть, что для полужесткой постановки заметно сокращается размерность вектора переменных по сравнению с (3.2).

Обозначим через $Z_i(c), \quad i \in M$, множество достижимых значений потока $i$-й тяготеющей пары (в однопродуктовой сети с вектором $c$ пропускной способности ребер графа $\mathcal{G}$). Тогда уровень обеспеченности требований в сети с исходным распределением потоков $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')$ в результате сокращения пропускной способности $c''$ до $c$ будет определяться как

$$\vartheta'(\tilde{f}, c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in M} \frac{1}{d_i} \max\Big\{ z_i \big| \ z_i \in Z_i(\{(f_{ik} + f_{i(k+e)})c_k/c''_k\}_{k=1}^{e})\Big\}. \qquad (3.8)$$

Приходим от (3.2) к поиску

$$\hat{\theta}_0^{ж'C} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')} \int_\Omega \vartheta'(\tilde{f}, c(\omega), d) \ \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) = \qquad (3.9)$$

$$= \max_{\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')} \int_\Omega \max_{\theta(\omega), z(\omega)} \{\theta(\omega) | \ \forall i \in M \quad \theta(\omega) d_i \le z_i(\omega),$$

$$z_i(\omega) \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)}) \frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k \in E})\} \mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)$$

$$\max_{\tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')} \max_{\{\theta_\omega, z_\omega\}_{\omega\in\Omega}} \{\sum_{\omega\in\Omega}\theta_\omega |\ \theta_\omega d_i \le z_{i,\omega},\quad z_{i,\omega}\in Z_i(\{(\tilde f_{ik}+\tilde f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})$$

$$\forall i\in M,\quad \omega\in\Omega\}.$$

Для применения метода обобщенных (или стохастических квази-) градиентов — в случае больших $\Omega$ (или неизвестной ф.р. с.в. $c(\cdot)$) — удобнее вместо внутренней задачи максимизации в (3.9) выписать двойственную, получим

$$\hat\theta_0^{\text{ж}'C} = \max_{\tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')}\int_\Omega \min_{i\in M}\min_{\lambda^i\in\Lambda^i}\frac{1}{d_i}\sum_{k\in E}\lambda^i_k(\tilde f_{ik}+\tilde f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega), \qquad (3.10)$$

$\Lambda^i = \{(\lambda^i,\pi^i)|\ \pi^i_{t_i}-\pi^i_{s_i}=1,\ \ \lambda^i_k-|\pi^i_{t(k)}-\pi^i_{s(k)}|\ge 0\ \ \forall \mathbf{r}_k \overset{\text{def}}{=} (s(k),t(k))\in R\}$ — ограничения задачи, двойственной к максимизации однопродуктового потока $z_i$ на сети с физическим графом $\mathcal G$ (с вектором пропускной способности ребер, равным $\{(\tilde f_{ik}+\tilde f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E}$).

Суперградиент подынтегральной функции в (3.10) вычисляется достаточно просто — через решение $m$ стандартных однопродуктовых задач (для которых применимы методы потокового программирования [?]). А именно, находим $i^* = i^*(\omega,\tilde f)$ и $\lambda^{*i^*} = \lambda^{*i^*}(\omega,\tilde f)$, реализующие минимум в (3.10), и задаем $ij$-ю компоненту суперградиента как

$$\varphi_{i^*j}(\omega,\tilde f) := d_{i^*}{\lambda^*}^{i^*}_k\frac{c_k(\omega)}{c''_k},\quad j=k,k+e,\quad k\in E,$$

$$\varphi_{ij}(\omega,\tilde f) := 0\ \ \forall i\ne i^*.$$

Теперь можно использовать вычислительную схему (3.4):

$$\tilde f^{t+1} = \mathrm{Pr}_{\tilde{\mathcal F}(c'')}\{\tilde f^t + \alpha_t\varphi(\omega^t,\tilde f^t)\},\quad \omega^t\in\Omega,\quad t=0,1,\ldots,\ -$$

и результат [20] о ее сходимости (учитывая вогнутость целевой функции).

Задача максимизации уровня средней обеспеченности требований тяготеющих пар в МП-сети для полужесткой постановки формализуется как и (3.3) для жесткой: найти

$$\hat\theta_0^{\text{ж}'C'} = \max_{\tilde f\in\tilde{\mathcal F}(c'')}\min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\int_\Omega \max\{z_i(\omega)|\ z_i(\omega)\in Z_i(\{(\tilde f_{ik}+\tilde f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\}\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega).$$

И справедливы аналогичные оценки

$$\hat\theta_0^{\text{ж}'C} \le \hat\theta_0^{\text{ж}'C'} \le \theta_0(\hat c, d).$$

средней допустимости МП-сети со случайной пропускной способностью приводит к проблеме типа (1.7) из [6]: найти

$$\hat{\theta}_0^c(d) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \theta_0(c(\omega), d)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

и трудности ее решения — те же (см. [6]). Не проще оказывается и поиск среднего значения величины $\nu_0(c(\omega), d) = 1/\theta_0(c(\omega), d)$. Таким образом, при осреднении нежесткая постановка сложнее для счета, чем жесткая, как и в задаче со случайными требованиями.

Заметим, что задача осреднения $\nu_0(c(\omega), d)$ по трудоемкости эквивалентна поиску $\theta_0^C$ (1.6) из [6], а поиск $\hat{\theta}_0^c(d)$, наоборот, эквивалентен осреднению $\nu_0(c, d(\omega))$, т.е. поиску $\nu_0^C$ (1.7) из [6]. Действительно, для задач ЛП, определяющих $\theta_0(c(\omega), d)$ или $\nu_0(c, d(\omega))$, случайность входит лишь в правую часть. Поэтому при достаточно близких $c'$ и $c''$ (если им соответствует одна и та же базисная подматрица, задающая решение) выполнено $\hat{\theta}_0^c(d) = \theta_0(\hat{c}, d)$, где $\hat{c}$ — среднее значение с.в. $c(\cdot)$.

Можно рассмотреть нежесткую постановку и для общей задачи о средней допустимости, когда случайны как требования пользователей, так и пропускная способность ребер графа сети. Сохраним обозначение $\omega$ для с.в., состоящей из двух компонент $\omega^1$ и $\omega^2$, считая, что $d$ зависит только от 1-й, а $c$ — от 2-й. Тогда получаем задачу вычисления

$$\tilde{\theta}_0^c \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \theta_0(c(\omega), d(\omega))\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

не отличающуюся принципиально от (1.6) из [6], так что методы ее решения далее обсуждать не будем. (Тем более, что в общем случае мы уже не можем говорить о кусочной линейности по $(c, d)$ ни для $\theta_0$, ни для $\nu_0$.)

**4. Вероятностные постановки задачи о допустимости.** Перейдем теперь к вероятностным постановкам задачи о допустимости МП-сети со случайной пропускной способностью, которые не предполагают осреднение.

**4.1. Жесткий случай.** В жестком случае мы интересуемся вероятностью допустимости (или достижимости уровня $\theta$) для МП-сети и возможностью максимизировать эту вероятность путем изначального выбора обобщенного дуго-путевого распределения потоков в сети. Аналогично разд.3.1 приходим к задачам поиска

$$\tilde{p}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(\vartheta(F, c(\omega), d) \geq 1) = \mathbf{P}\Big(\sum_{\xi_i \in \Xi_i} \min_{j \in \xi_i} f_{ij}^{\xi_i} \frac{c_j(\omega)}{c_j''} \geq d_i \ \ \forall i \in M\Big)$$

$$\text{или}\quad p(\theta)=\mathbf{P}(\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\geq\theta d_i\quad\forall i\in M),\quad 0<\theta<1,$$

которые могут быть решены по методу Монте-Карло (на базе значений $\hat{\theta}(\omega)$ — см. (3.7) в конце разд.3.2), а также к оптимизационным задачам

$$\max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\mathbf{P}(\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\geq d_i\quad\forall i\in M)\quad\text{или}$$

$$\max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\mathbf{P}(\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\geq\theta d_i\quad\forall i\in M),\quad 0<\theta<1,\quad\text{и}\tag{4.1}$$

$$\tilde{\theta}(p)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{\theta,\ \{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\{\theta|\ \mathbf{P}(\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\geq\theta d_i\quad\forall i\in M)\geq p\},\tag{4.2}$$

$0<p\leq 1$. Очевидна оценка

$$\tilde{\theta}(1)\geq\max_{\theta,\ \{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\{\theta|\ \sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c'_j}{c''_j}\geq\theta d_i\quad\forall i\in M\}=$$

$$=\max_{\{f_{ij}^{\xi_i}\}:\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')}\min_{i\in M}\frac{1}{d_i}\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i}f_{ij}^{\xi_i}\frac{c'_j}{c''_j}=\theta_0(c',d).\tag{4.3}$$

Если носитель п.р. с.в. $c(\omega)$ содержит вектор $c'$, то полученная оценка точна, т.е. вероятностная постановка сводится к гарантированной.

Для вычисления значения (4.3) можно заменить $\tilde{\mathcal{F}}$ под максимумом на условие (1.2) с $c''$ для $\tilde{f}$, т.е. ограничения равенства $c''$ на неравенства (в силу неубывания по $\tilde{f}$ целевой функции). Тогда найдется такая реализация $F^0$ максимума, что $\forall k\in E$

$$\sum_{i=1}^{m}(\tilde{f}_{ik}+\tilde{f}_{i(k+e)})\leq c''_k\quad\text{и}\quad\forall i\in M\quad\forall\xi_i\in\Xi_i:\quad f_{ij}^{0\,\xi_i}\frac{c'_j}{c''_j}=z_i^{0\,\xi_i}\quad\forall j\in\xi_i,\tag{4.4}$$

и формально приходим к задаче ЛП

$$\tilde{\theta}^{\text{жг}}=\max_{\theta,\ F^0\geq 0:\ (4.4)}\{\theta|\ \sum_{\xi_i\in\Xi_i}z_i^{0\,\xi_i}\geq\theta d_i\quad\forall i\in M\}.$$

Тем не менее, необходимость использования дуго-путевой формы для жесткой постановки приводит (из-за экспоненциального числа путей) к задачам столь больших размерностей, что вопрос об оптимальном выборе обобщенного дуго-путевого распределения потоков в любой формулировке, (3.2) или (4.1)–(4.3), вряд ли является актуальным. В этом смысле более реалистичной оказывается полужесткая постановка (см.

можно применение методов (или эвристик), не гарантирующих оптимальность, но улучшающих имеющееся распределение. Существуют также частные задачи, допускающие явное решение. Для задач оценки качества имеющегося распределения отметим следующие простые варианты: в случае (3.5) выполнено $\tilde{p}(1) = \mathbf{P}(c(\omega) = c'')$, а если при этом $c(\omega) = \omega c''$, $\Omega = [0,1]$, то $\tilde{p}(\theta) = \mathbf{P}(\omega \geq \theta)$.

**4.2. Полуесткий случай.** Для полужесткой постановки, введенной в разд.3.3, задачи из предыдущего раздела формализуются следующим образом.

Для заданного $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')$ — найти

$$\hat{p}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(\vartheta'(\tilde{f}, c(\omega), d) \geq 1) = \mathbf{P}(d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik}+\tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\ \forall i \in M)$$

$$\text{или}\ \ \hat{p}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(\theta d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\ \ \forall i \in M),\quad 0 < \theta < 1.$$

В оптимизационном варианте — найти значение и реализацию

$$\max_{\tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')} \mathbf{P}(d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\ \ \forall i \in M)\ \ \text{или}$$

$$\max_{\tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')} \mathbf{P}(\theta d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik}+\tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\ \forall i \in M),\ \ 0 < \theta < 1,\ \ \text{а также}$$

$$\hat{\theta}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\theta,\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')} \{\theta |\ \mathbf{P}(\theta d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\ \ \forall i \in M) \geq p\},$$

$0 < p \leq 1$.

Если исходному распределению $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}(c'')$ соответствовало $F$, удовлетворяющее (3.5), то $\hat{p}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(c(\omega) = c'')$. В общем случае для поиска $\hat{p}(\theta)$ примени́м метод Монте-Карло. Это предполагает решение $m$ однопродуктовых задач на max потока

$$z_i(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{z_i|\ z_i \in Z_i(\{(f_{ik} + f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k\in E})\}\ \ \forall i \in M$$

для определения $\theta(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{i\in M} z_i(\omega)/d_i$ в случайно выбираемых точках $\omega \in \Omega$.

Естественно, запоминая найденные значения $z_i(\omega^t)$, можно сэкономить на пересчете очередных $\theta(\omega^{t'})$, $t' > t$. В частности, если задано конкретное значение $\theta$ (а не надо искать максимальное $\theta$, обеспечиваемое с данной вероятностью), то из условия $\theta(\omega) < \theta$ следует $\theta(\omega') < \theta$

случаев $\theta(\omega')$ уже можно не вычислять. В целом, ситуация здесь аналогична рассмотренной в [6] (разд.1.2) для стохастического вектора требований (при поиске $p(\theta)$ и $\theta^*(p)$), и используемые идеи схожи.

Как и для жесткой постановки, если носитель меры $\mathbf{P}(c(\omega))$ содержит $c'$, то

$$\hat{\theta}(1) = \max_{\theta,\ \tilde{f}\in\tilde{\mathcal{F}}(c'')} \{\theta|\ \theta d_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik} + \tilde{f}_{i(k+e)})\frac{c'_k}{c''_k}\}_{k\in E})\ \ \forall i \in M\} = \theta_0(c', d).$$

Последнее равенство доказано в [17].

**4.3. Нежесткий случай.** Нежесткие вероятностные постановки задачи о допустимости МП-сети со случайной пропускной способностью формулируются так же, как и для случайного вектора требований в [6] (разд.1.2), с той лишь разницей, что зависимость от $\omega$ предполагается у вектора $c$. А именно, рассматриваются задачи поиска

$$p_c(1) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\Big(d \in Z(c(\omega))\Big),\ \ p_c(\theta) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\Big(\theta d \in Z(c(\omega))\Big),\ \ 0 < \theta < 1,$$

$$\theta^*_c(p) = \max\{\theta|\ p_c(\theta) \ge p\},\ \ 0 < p \le 1.$$

В предположении, что и $c$, и $d$ случайны, приходим к постановкам общего вида: найти

$$\mathbf{P}\Big(d(\omega) \in Z(c(\omega))\Big),\ \ \mathbf{P}\Big(\theta d(\omega) \in Z(c(\omega))\Big),\ \ 0 < \theta < 1,$$

$$\max\{\theta|\ \mathbf{P}\Big(\theta d(\omega) \in Z(c(\omega))\Big) \ge p\},\ \ 0 < p \le 1.$$

(Отметим, что с.в. $c$ и $d$ здесь не обязательно зависимы, так как они могут зависеть каждая от своей компоненты вектора $\omega$.)

Все эти постановки исследуются аналогично задачам поиска $p(\theta)$, $\theta^*(p)$ из [6] (разд.1.2), и поэтому мы на них подробнее останавливаться не будем.

**5. Неполная информированность о функциях распределения.** Обсудим для рассматриваемых задач стохастические постановки при наличии неопределенности в ф.р. имеющихся с.в., в данном случае, пропускной способности ребер МП-сети.

В отсутствие информации о ф.р. интеграл по $\Omega$ (как и в начале разд.2 из [6]) заменяется на инфимум, и если носитель п.р. с.в. $c(\cdot)$ содержит $c'$, то минимум достигается на $\omega'$ таком, что $c(\omega') = c'$. Вероятностные постановки задачи о допустимости при этом также сводятся полученной в разд.4 (см. в частности (4.3) для жесткой постановки).

При известных ограничениях на некоторые моменты [2] применяется утверждение 2 из [6]. В случае $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{c}, \hat{c}, \bar{0}, \sigma^2)$, т.е. симметричности п.р. с.в. $c(\cdot)$, известного ее математического ожидания $\hat{c}$ и ограничений $\sigma^2$ на дисперсии компонент (пусть, для простоты, $\sigma_k = (c''_k - c'_k)/2 \quad \forall k \in E$) — из этого утверждения следует, что для нежесткой постановки с осреднением

$$\max_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}_c(\hat{c},\hat{c},\bar{0},\sigma^2)} \hat{\theta}_0^c(d) = \theta_0(\hat{c}, d) \quad \text{и}$$

$$\min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}_c(\hat{c},\hat{c},\bar{0},\sigma^2)} \hat{\theta}_0^c(d) = \min_{\{\Delta|\ \Delta_k=\pm\sigma_k\ \forall k\in E\}} \{\theta_0(\hat{c}-\Delta, d) + \theta_0(\hat{c}+\Delta, d)\}/2$$

в силу вогнутости $\theta_0$ по $c$. Также и интеграл в (3.2) (жесткая постановка) для получения его гарантированной оценки при $\mathbf{P}(\cdot) \in \mathcal{A}_c(\hat{c}, \hat{c}, \bar{0}, \sigma^2)$ заменяется на минимум по $\{\Delta|\ \Delta_k = \Delta_{k+e} = \pm\sigma_k\ \forall k \in E\}$ от

$$\Big(\min_{i\in M}\{\frac{1}{d_i}\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}\frac{\hat{c}_j+\Delta_j}{c''_j}\} + \min_{i\in M}\{\frac{1}{d_i}\sum_{\xi_i\in\Xi_i}\min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}\frac{\hat{c}_j-\Delta_j}{c''_j}\}\Big)/2,$$

а интеграл в (3.9) (полужесткая постановка) — на

$$\min_{\{\Delta|\ \Delta_k=\pm\sigma_k\ \forall k\in E\}}\Big(\min_{i\in M}\max\{z_i/d_i|\ z_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik}+\tilde{f}_{i(k+e)})(\hat{c}_k+\Delta_k)/c''_k\}_{k=1}^{e})\}+$$

$$+\min_{i\in M}\max\{z_i/d_i|\ z_i \in Z_i(\{(\tilde{f}_{ik}+\tilde{f}_{i(k+e)})(\hat{c}_k-\Delta_k)/c''_k\}_{k=1}^{e})\}\Big)/2;$$

оценки сверху даются п.р., сосредоточенной в $\hat{c}$. (Отметим, что аналогичные равенства для $\nu_0$, вообще говоря, не верны.) Конкретные значения результирующих оценок для оптимизационных задач (3.2), (3.9) зависят от конфигурации сети и могут варьироваться от $\theta_0(c', d)$ (при последовательном соединении ребер между источником и стоком) до $(\theta_0(c', d) + \theta_0(c'', d))/2$ (при параллельном соединении). Для их поиска применимы общие методы выпуклого программирования, ибо максимизируемые функции (найденные гарантированные оценки интегралов) остались вогнутыми по максимизирующим переменным $f_{ij}$.

Если и $c$, и $d$ случайны, то данные формулы комбинируются с полученными в [6]. В частности, для нежесткой постановки, обозначая через $\sigma'^2$ оценку дисперсии с.в. $d(\cdot)$, можем записать (поскольку внутренний минимум также будет вогнутой функцией $c$), что

$$\min_{\mathbf{P}(c(\cdot))\in\mathcal{A}_c(\hat{c},\hat{c},\bar{0},\sigma^2)}\ \min_{\mathbf{P}(d(\cdot))\in\mathcal{A}_c(\hat{d},\hat{d},\bar{0},\sigma'^2)} \tilde{\theta}_0^C = \min_{\{\Delta|\ \Delta_k=\pm\sigma_k\ \forall k\in E\}} \frac{1}{2}\Big\{\min_{\{\Delta'^j,p_j\}_{j=1}^m\in\mathcal{B}}\{\theta_0(\hat{c}-$$

$$-\Delta, \hat{d})(1-\sum_{j=1} p_j)+\sum_{j=1}(\theta_0(\hat{c}-\Delta, \hat{d}+\Delta'^j)+\theta_0(\hat{c}-\Delta, \hat{d}-\Delta'^j))p_j/2\}+$$

$$+\min_{\{\Delta'^j, p_j\}_{j=1}^m \in \mathcal{B}} \{\theta_0(\hat{c}+\Delta, \hat{d})(1-\sum_{j=1}^m p_j)+\sum_{j=1}^m(\theta_0(\hat{c}+\Delta, \hat{d}+\Delta'^j)+\theta_0(\hat{c}+\Delta, \hat{d}-\Delta'^j))p_j/2\}\Big\},$$

где

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\{\Delta'^j, p_j\}_{j=1}^m \mid \sum_{j=1}^m p_j \leq 1,\ p_j \geq 0,\ |\Delta'^j_i| \leq \hat{d}_i,\ (\Delta'^j_i)^2 p_j \leq \sigma'^2_i\ \forall i, j \in M\Big\}.$$

Для формулировок без осреднения приходим к следующим результатам.

В нежесткой постановке

$$p_c^\Gamma(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} p_c(\theta) = \lim_{\varepsilon\to+0} \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_\Omega \chi^{+\varepsilon}_{\geq\theta}\Big(\theta_0(c(\omega), d)\Big)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega) \ \ \text{и}\ \ p_{cd}^\Gamma(\theta) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \mathbf{P}\Big(\theta d(\omega) \in Z(c(\omega))\Big) = \lim_{\varepsilon\to+0} \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_\Omega \chi^{+\varepsilon}_{\geq\theta}\Big(\theta_0(c(\omega), d(\omega))\Big)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

в полужесткой постановке $\hat{p}^\Gamma(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \hat{p}(\theta) =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_\Omega \prod_{i\in M} \chi^{+\varepsilon}_{\geq\theta d_i}\Big(\max\Big\{z_i \mid z_i \in Z_i(\{(f_{ik}+f_{i(k+e)})\frac{c_k(\omega)}{c''_k}\}_{k=1}^e)\Big\}\Big)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega)$$

и в жесткой постановке

$$\tilde{p}^\Gamma(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \tilde{p}(\theta) = \lim_{\varepsilon\to+0} \min_{\mathbf{P}(\cdot)\in\mathcal{A}(a)} \int_\Omega \prod_{i\in M} \chi^{+\varepsilon}_{\geq\theta d_i}\Big(\sum_{\xi_i\in\Xi_i} \min_{j\in\xi_i} f_{ij}^{\xi_i}\frac{c_j(\omega)}{c''_j}\Big)\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega),$$

где $\chi^{+\varepsilon}_{\geq b}\Big(y\Big)$ обозначает сглаженную извне индикатриссу множества $\{y \geq b\} \subset \mathbf{R}^1$.

Минимумы в правых частях вычисляются на основании утверждения 2 из [6].

При информированности $\mathbf{P}(c(\cdot)) \in \mathcal{A}_c(\hat{c}, \hat{c}, \bar{0}, \sigma^2)$ отсюда выводим явные формулы — в предположении $\sigma = (c'' - c')/2$ —

$$p_c^\Gamma(\theta) = \begin{cases} 1 & \forall\theta \leq \theta_0(c', d), \\ 0 & \forall\theta > \hat{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{\Delta:\ \Delta_k\in\{0,\pm\sigma_k\}} \max[\theta_0(\hat{c}+\Delta, d), \theta_0(\hat{c}-\Delta, d)], \\ 1/2 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\tilde{p}^\Gamma(\theta) = \begin{cases} 1 & \forall\theta \leq \vartheta'(\tilde{f}, c', d), \\ 0 & \forall\theta > \hat{\vartheta}' \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{\Delta:\ \Delta_k\in\{0,\pm\sigma_k\}} \max[\vartheta'(\tilde{f}, \hat{c}+\Delta, d), \vartheta'(\tilde{f}, \hat{c}-\Delta, d)], \\ 1/2 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\hat{p}^{\Gamma}(\theta) = \begin{cases} 0 & \forall \theta > \hat{\vartheta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\limits_{\Delta:\ \Delta_k \in \{0, \pm\sigma_k\}} \max[\vartheta(F, \hat{c}+\Delta, d), \vartheta(F, \hat{c}-\Delta, d)], \\ 1/2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нулевое значение в этих формулах достигается на п.р., сосредоточенной (с вероятностями 1/2) в $\hat{c} \pm \Delta$ для $\Delta$, реализующей минимум, а значение 1/2 — на п.р., сосредоточенной в $\hat{c} \pm \sigma$, т.е. в $c'$ и $c''$. Последняя ситуация возникает, когда при любых $\Delta$ таких, что $|\Delta_k| \le \sigma_k$ $\forall k \in E$, для достижимости мультипотока $\theta d$ достаточно пропускной способности либо $\hat{c} - \Delta$, либо $\hat{c} + \Delta$. Здесь любопытно отметить следующее.

Пусть при решении задачи (1.1) с вектором $c = c''$ все ограничения по пропускной способности (1.2) были существенными. Тогда, если в некотором пути имеется хотя бы 2 ребра, то худший (гарантированный в рамках рассматриваемой информированности) вариант п.р. эквивалентен — с точки зрения возможности пропускания потока — установлению нижней границы пропускной способности ребер по всему пути. (Действительно, поскольку на этой границе будет достигаться минимум потока, то достаточно, чтобы она реализовалась лишь для одного ребра.) И так для каждого неоднореберного пути. Для однореберных путей, соответствующих разным тяготеющим парам, верхняя и нижняя границы их пропускной способности также будут в худшем случае выпадать асинхронно. В результате может оказаться, что $\hat{\theta} = \theta(c', d)$ ($\hat{\vartheta} = \vartheta(c', d)$, $\hat{\vartheta}' = \vartheta'(c', d)$). Таким образом, для ряда конфигураций сети (например, кольцевой при $m > 3$) в указанных выше формулах остаются лишь две первые возможности, т.е. исчезает элемент случайности. Обеспеченность требований в подобной сети будет такой, как если бы вектор пропускной способности был детерминированным и имел наименьшее значение $c'$, несмотря на то, что п.р. сосредоточена с вероятностями 1/2 в $c'_k$ и $c''_k$ — наименьшем и наибольшем значениях — для каждого ребра $k \in E$. В этом, в частности, проявляется сетевая специфика исследуемых систем.

Обобщение для случайных и $c$, и $d$ не приводит к принципиально другим формулам. Так, при $\mathbf{P}(d(\cdot)) \in \mathcal{A}_c(\hat{d}, \hat{d}, \bar{0}, \sigma'^2)$, $D = [0, 2\hat{d}]$, $\sigma' = \hat{d}$ и прежних предположениях относительно п.р. с.в. $c(\cdot)$ будем иметь

$$p^{\Gamma}_{cd}(\theta) = \begin{cases} 1 & \forall \theta \le \theta_0(c', 2\hat{d}), \\ 0 & \forall \theta > \min\limits_{\Delta:\ \Delta_k \in \{0, \pm\sigma_k\}} \ \min\limits_{\Delta':\ \Delta'_i \in \{0, \pm\sigma'_i\}} \max\,[\theta_0(\hat{c}+\Delta, \hat{d}+\Delta'), \\ & \qquad \theta_0(\hat{c}-\Delta, \hat{d}+\Delta'),\ \theta_0(\hat{c}+\Delta, \hat{d}-\Delta'),\ \theta_0(\hat{c}-\Delta, \hat{d}-\Delta')], \\ 1/2 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

достаточно оставить только 1-й и последний элементы). Ситуация, когда $\sigma' \leq \hat{d}$, $\sigma \leq c'' - \hat{c}$, рассматривается по аналогии с разд.2.1 из [6].

Теперь в сделанных предположениях нетрудно выписать гарантированные оценки для соответствующих величин $p$-обеспеченности требований тяготеющих пар. В частности, для максиминной $p$-обеспеченности $\theta_c^*(p)$ (нежесткая постановка) получим, что

$$\theta_c^{*\,\Gamma}(p) = \begin{cases} \theta_0(c', d), & 1/2 < p \leq 1, \\ \hat{\theta}, & 0 < p \leq 1/2, \end{cases}$$

и достигается на мере $\mathbf{P}_p^\Gamma$, сосредоточенной с вероятностями 1/2 в:

$\hat{c} \pm \Delta$, для $\Delta$, реализующего $\hat{\theta}$, при $p \leq 1/2$,

$c'$ и $c''$ при $p > 1/2$.

Оценки для остальных постановок вычисляются точно так же.

Задачи максимизации найденных гарантированных оценок для жесткой и полужесткой постановок за счет выбора изначального распределения потоков (задачи (4.1), (4.2) и т.п. с найденными вариантами $\mathbf{P}(\cdot)$) свелись теперь к детерминированным и решаются как задачи максимизации по $F$ уровня $\vartheta(F, c', d)$ или $\hat{\vartheta}$ (жесткая постановка) и по $\tilde{f}$ уровня $\vartheta'(\tilde{f}, c', d)$ или $\hat{\vartheta}'$ (полужесткая постановка). Конкретный выбор при этом зависит от заданного $\theta$ для $\tilde{p}^\Gamma(\theta)$ и $\hat{p}^\Gamma(\theta)$ или от заданного $p$ для $\tilde{\theta}^\Gamma(p)$ и $\hat{\theta}^\Gamma(p)$. (Здесь верхний индекс "Г" означает, что в формулах для $\tilde{\theta}$ (4.2) или $\hat{\theta}$ используется мера $\mathbf{P}(\cdot) = \mathbf{P}_p^\Gamma$.) Подробное рассмотрение случая $p \leq 1/2$, по-видимому, не имеет практического смысла, так что укажем лишь оценку $\tilde{\theta}^\Gamma(p) \leq \hat{\theta}^\Gamma(p) \leq \theta_c^{*\,\Gamma}(p)$. При $p > 1/2$ из полученных результатов следует, что $\tilde{\theta}^\Gamma(p) = \hat{\theta}^\Gamma(p) = \theta_0(c', d)$.

**Заключение.** В заключение отметим, что в отличие от неопределенности, связанной с вектором требований пользователей сетевой системы, которая является субъективной и, в принципе, может быть уменьшена путем сбора дополнительной информации, более точного учета реальных потребностей, фиксации предварительных заявок и т.п., поскольку ее источник находится в рамках самой рассматриваемой системы, неопределенность вектора пропускной способности зачастую объективна, т.е. зависит от внешних по отношению к системе причин и обстоятельств. Субъективными могут считаться лишь мелкие неисправности, вызванные неидеальным техническим состоянием элементов сети.

сти допустимо моделировать случайностью лишь в той ситуации, когда это — "природная" неопределенность, т.е. случайные изменения во внешней среде, влияющие на пропускную способность. Очевидно, исследованные в предыдущих пунктах модели не применимы для изучения возможных последствий крупных аварий и техногенных катастроф, а также целенаправленных разрушающих воздействий. (Действительно, разве разумно было при создании междугородной телефонной сети в СССР рассчитывать на распад Союза или на выход из строя именно грозненского узла связи — ключевого для указанной сети?) Никакие вероятностные модели при этом не дают полезных оценок, ибо нет оснований предполагать наличие такой информации о ф.р., которая привела бы для сети к результату, существенно лучшему, чем гарантированный (см. в разд.5). Общее рассмотрение задачи живучести сетевых систем выходит за рамки настоящего цикла статей, поэтому ограничимся лишь ссылками на работы авторов [22, 23, 24, 25, 9, 26, 27, 28], развивающие предложенный подход.

## Список литературы


1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. I. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М., Смирнов М.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III. Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.4.

сетевых систем с учетом неопределенности. IV. Задача о допустимости со случайными требованиями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.5

7. *Давидсон М.Р.* Устойчивость лексикографической максиминной задачи распределения потоков в многопродуктовых сетях // ЖВМ и МФ. 1995. Т.35. N.3.

8. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. II. Свойства суперконкурентного распределения потоков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.3.

9. *Малашенко Ю. Е.* Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

10. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

11. *Малашенко Ю.Е., Станевичюс А.-И.А.* О решении многопродуктовой задачи с целочисленными потоками // ЖВМ и МФ, 1982. Т.22. N.3.

12. *Shahrokhi F., Matula D.W.* The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math. 1990. V.37. N.2.

13. *Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Stein C., Tardos E., Tragoudas S.* Fast approximation algorithms for multicommodity flow problems // J. Computer and Syst. Sci., 1995. V.50. N.1.

14. *Leong T., Shor P., Stein C.* Implementation of a combinatorial multicommodity flow algorithm // DIMACS Working paper, 1992.

15. *Kamath A., Palmon O.* Improved interior-point algorithms for exact and approximate solutions of multicommodity flow problems // Proceeding of the 6th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1995.

16. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

17. *Новикова Н.М.* Решение некоторых стохастических задач оценки допустимости многопродуктовой сети // ЖВМ и МФ, 1998. Т.38. N.5.

problems of mathematical physics and operations research // Journal of Math. Sciences (Contemprorary Mathematics and Its Applications, Vol.3), New York - London, Plenum Publ. Corp., 1994. N1.

19. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

20. *Ермольев Ю.М.* Стохастическое программирование. М.: Наука, 1976.

21. *Held M., Wolfe P., Crowder H.* Validation of subgradient optimization // Math. Prog., 1974. V.6.

22. *Козлов М.В., Малашенко Ю.Е., Рогожин В.С. и др.* Живучесть систем энергетики: методология, модель, реализация. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

23. *Малашенко Ю.Е.* Гарантированные оценки живучести сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1988. N.6.

24. *Малашенко Ю.Е., Рогожин В.С., Ферапонтов Е.В.* Детерминированные модели оценки живучести и уязвимости сетей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1989. N.2.

25. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

26. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. и др.* Математические постановки задач восстановления и обеспечения живучести для многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 1993.

27. *Давидсон М.Р.* Субградиентный метод решения задачи развития многопродуктовых сетей с гарантией живучести // ЖВМ и МФ, 1993. Т.33. N.4.

28. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // ЖВМ и МФ, 1997. Т.37. N.12.