УДК 519.85

Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. III

Многокритериальная, или параметрическая, постановка для неизвестных требований [1]

©1998 г. **Ю.Е.Малашенко, Н.М.Новикова, М.М.Смирнов**
Москва, ВЦ РАН

Поступила в редакцию 21.04.97 г.

Рассмотрены два подхода к анализу эффективности многопользовательских сетевых систем с неизвестными требованиями пользователей: параметрический, где параметром является вектор входной нагрузки (вектор требований), и многокритериальный, где критериями являются величины пропускаемых по сети потоков (вектор мультипотока). Даны соответствующие формальные постановки задачи анализа. Для обеих постановок предложен единый способ аппроксимации множества, являющегося решением. Разработаны алгоритмы аппроксимации. Обсуждаются различные процедуры организации вычислений.

Введение. Предлагаемая статья является продолжением [1], посвященной применению общей методологии исследования операций [2] для анализа допустимости многопродуктовых потоковых сетей (МП-сетей) [3, 4] с неточно или неполностью известным вектором входной нагрузки (требований тяготеющих пар). В [1] были даны соответствующие обобщенные постановки задачи о допустимости, в частности, гарантированная (предполагающая допустимость для любого вектора требований) и слабая (рассчитывающая на допустимость для хотя бы одного), указаны возможности их решения. Причем за основу взято понятие *конкурентного* распределения потоков в сети [5, 6] — максимизирующего уровень обеспеченности требований тяготеющих пар (продуктов). Настоящая работа посвящена проблеме анализа МП-сетей в случае неизвестных требований тяготеющих пар — неизвестной входной нагрузки.

Формализм МП-сетей предназначен для моделирования функционирования реальных территориально-распределенных систем, имеющих сетевую структуру и объединяющих многих пользователей. Для таких систем существенны моменты, связанные с учетом возможной неопределенности при принятии решений по использованию имеющихся сетевых ресурсов, их распределению между пользователями. Как правило, пользователи большой сетевой системы агрегированы, это

[1]Работа поддержана РФФИ по гранту N.95-01-00232а

— не отдельные лица, а целые коллективы или группы населения, так что проблема обеспечения интересов пользователей выходит на первый план. При этом каждая тяготеющая пара в равной степени заслуживает, чтобы ее интересы не были обойдены (проблема недискриминирования пользователей). Один из способов решения указанной проблемы в случае известных требований предложен в [7]. Однако в условиях недостаточной информированности нельзя дать конкретной рекомендации, а требуется проведение вариантного анализа, в ходе которого выявляется целое множество возможных решений. Теоретический и вычислительный аспекты построения соответствующего множества исследуются в данной работе.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения и понятия из [1], относящиеся к модели "МП-сеть".

Основной характеристикой допустимости МП-сети служит *уровень максиминной обеспеченности требований* :

$$\theta_0 = \theta_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i}, \tag{0.1}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_e)$ — вектор пропускной способности ребер графа сети,
$d = (d_1, \ldots, d_m)$ — вектор требований тяготеющих пар (продуктов),
$M = (1, 2, \ldots, m)$ — множество индексов i тяготеющих пар,
$X(c)$ — многогранник *распределений потоков* $\mathbf{f} = \{f_{ij}\}$ и *мультипотоков* (величин потоков) $z = (z_1, \ldots, z_m)$, достижимых в МП-сети, т.е. удовлетворяющих условию неразрывности потоков и ограничениям по пропускной способности ребер

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+e)}) \le c_k \quad \forall k = 1, 2, \ldots, e.$$

Распределение потоков, реализующее θ_0, называется *конкурентным* [5]. Следуя [7], обозначим через $X_0(c,d)$ и $Z_0(c,d)$ соответственно множества конкурентных распределений потоков и мультипотоков.

Критерий допустимости МП-сети дается условием $\theta_0 \ge 1$, которое гарантирует существование допустимого распределения потоков, т.е. такого, что соответствующий вектор мультипотока будет не меньше вектора заданных требований. При этом конкурентное распределение потоков очевидно будет допустимым.

В случае недопустимости МП-сети ($\theta_0 < 1$) стремление к максимизации

$$\min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i} \tag{0.2}$$

согласуется с концепцией недискриминирования пользователей и значение $\theta_0 < 1$ характеризует эффективность МП-сети по обеспечению данного вектора требований. К сожалению, мало реально рассчитывать на то, что в момент решения задачи оценки эффективности этот вектор окажется известным.

1. Постановка задачи. Рассмотрим крайний случай неполной информированности о входных потоках при оценке эффективности МП-сети. Предположим, что вектор требований d не известен или границы неопределенности требований пользователей сети оказываются слишком широкими. (Типичный пример подобной ситуации дает телефонная сеть, к которой могут подсоединяться абоненты с компьютерными модемами, пересылающие большие массивы данных, что сильно меняет загрузку линии, а в каком месте возникнет такая абонентская пара заранее не известно.) При этом гарантированные постановки приводят к излишне пессимистическим оценкам, а слабая постановка — к сильно завышенным, и то, и другое мало информативно.

Одним из разумных подходов к исследованию возможностей МП-сети по обеспечению требований пользователей в данном случае является вариантный анализ, когда решается несколько (много) вариантов задачи анализа МП-сети для различных векторов требований, в той или иной степени представляющих все множество. Указанная информация предоставляется ЛПР (лицу, принимающему решения, например, заказчику сети или ее диспетчеру), который делает выводы об эффективности МП-сети на основании собственных оценок важности разных групп требований, прогнозов будущих требований, анализа сделанных заявок, корректировки статистических данных и т.п. Исследователь-математик в такой ситуации должен для каждого из выбранных векторов d решить оптимизационную задачу поиска приемлемого распределения потоков и соответственно оптимального мультипотока. В результате приходим к задаче параметрического программирования типа (0.1), рассмотренной в [1], найти

$$\theta_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z\in Z(c)} \ \min_{i\in M} \frac{z_i}{d_i},$$

где параметром является вектор требований d.

Теперь заметим, что в задаче (0.1) умножение d на постоянную приводит к уменьшению во столько же раз величины $\theta_0(d)$. Следовательно, можно отнормировать вектор требований и считать, что изменение параметра происходит на единичном симплексе: $d \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbf{R}^m_+ | \ \sum_{i=1}^{m} d_i = 1\}$$

(в случае $d_{i'} = 0$ для некоторого i' этот индекс исключается из множества M в (0.1)). Задав дискретную аппроксимацию множества значений параметров и решив набор задач (0.1), получим (с определенной точностью) описание функциональных характеристик МП-сети для всех возможных вариантов требований. Имеющиеся в настоящее время методы параметрического программирования позволяют построить такое описание путем итеративного пересчета решения одной задачи (0.1) — без многократного применения процедур поиска конкурентного мультипотока (см. ниже разд.4, а также [8]).

Другой постановкой задачи анализа МП-сети в отсутствие вектора требований или заявок тяготеющих пар на передачу потока является многокритериальная постановка [9, 10]: максимизировать вектор мультипотока на множестве достижимости, т.е. найти

$$\mathrm{Max}\{z| \ z \in Z(c)\} = \mathrm{Max}\{z| \ (\mathbf{f}, z) \in X(c)\}. \tag{1.1}$$

Здесь максимизация проводится в смысле отношения частичного порядка " $\geq$ " среди векторов и Max обозначает множество максимальных (для этого отношения) элементов — значений векторного критерия, не увеличиваемых ни по одной компоненте без уменьшения по какой-либо другой [2, 11, 12], т.е. $\mathrm{Max}\{z| \ z \in Z(c)\} =$

$$= Z^{\text{эфф}}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^{\text{эфф}} \in Z(c)| \ \forall z \in Z(c) \ \ \{z \geq z^{\text{эфф}}\} \Rightarrow \{z = z^{\text{эфф}}\}\} =$$

$$= \{z^{\text{эфф}} \in Z(c)| \ \forall z \in Z(c) \ \ \{\exists i \in M\colon \ z_i > z_i^{\text{эфф}}\} \Rightarrow \{\exists j \in M\colon \ z_j < z_j^{\text{эфф}}\}\}.$$

Решением задачи (1.1) считается множество $X^{\text{эфф}}(c)$ таких распределений потоков и мультипотоков $(\mathbf{f}^{\text{эфф}}, z^{\text{эфф}}) \in X(c)$, что $z^{\text{эфф}} \in Z^{\text{эфф}}(c)$.

Точки множества $X^{\text{эфф}}(c)$ называются оптимальными по Парето и Эджворту (ПО), а само множество *эффективным*. Аналогично, $Z^{\text{эфф}}(c)$ — *множество эффективных мультипотоков*. Наряду с эффективным с задачей (1.1) ассоциируется также более широкое множество *полуэффективных* точек или точек Слейтера $X^{\mathrm{C}}(c)$, соответствующее множеству *слейтеровских мультипотоков*

$$Z^{C}(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^{C} \in Z(c)| \ \forall z \in Z(c) \ \ \exists i \in M\colon \ z_i \leq z_i^{C}\} \ -$$

не улучшаемых по всем компонентам сразу.

Например, для множества достижимых мультипотоков, изображенного на рис.1 (два вида продуктов), вся северо-восточная граница (ABCDE) является слейтеровской, а отрезки BC и CD — ПО. При этом точки полуинтервалов [A,B) и (D,E] не будут эффективными мультипотоками. Отметим, что на рис.1 показана характерная форма множества достижимости, поскольку вместе с любой своей точкой оно содержит и неотрицательный вектор с меньшими компонентами.

Рис. 1

Постановка задачи анализа МП-сети с неизвестными требованиями в форме задачи векторной оптимизации отражает многопользовательский характер сетевой системы. Не имея количественных показателей, например, заявок абонентов, естественно описывать функциональные возможности МП-сети множеством достижимости $Z(c)$, тогда как предельные возможности функционирования задает множество $Z^{\text{эфф}}(c)$ максимальных элементов множества достижимости. В условиях дефицита пропускной способности ребер сети распределение потоков для тяготеющих пар также должно выбираться из эффективного множества. Рассматриваемый случай информированности (неинформированности) не дает исследователю объективных оснований для того, чтобы предпочесть один ПО вектор другим. Поэтому приходится предоставлять ЛПР описание всего эффективного множества (или его аппроксимацию) для субъективного выбора конкретного решения.

Авторы не придерживаются той точки зрения, что ЛПР следует предъявлять мало вариантов. Напротив того, считаем необходимым указать по крайней мере все угловые точки эффективного множества, чтобы можно было представить само множество (или с частью слейтеровских точек) и принимать решения на основе полной картины. Для облегчения представления существуют общие методы, например, программы, демонстрирующие различные двух- и трехмерные грани множества ПО векторов [13, 12]. Если же ЛПР все равно трудно справиться с имеющейся информацией, то он должен либо попытаться узнать побольше (получше) о возможных требованиях пользователей, либо сформулировать дополнительные критерии, которыми он будет руководствоваться при осуществлении выбора из эффективного множества. В последнем случае придем к задаче оптимизации на множестве ПО точек. Для ее решения не обязательно сначала аппроксимировать множество, поскольку применимы методы лексикографической оптимизации (как не понадобился явный вид множества сверхконкурентных решений для поиска суперконкурентного в [7]). Поэтому для исследователя такая постановка обычно предпочтительнее, и кроме того, она позволяет объективизировать выбор конкретного распределения потоков в МП-сети. (Когда критерии известны, их можно обсуждать или с ними спорить, что безусловно лучше принятия решения по принципу недостаточного основания: "как захотела левая нога".)

Отметим, что, хотя в рассматриваемой модели предполагается централизованное принятие решений — управление потоками, нельзя не учитывать многопользовательского характера МП-сети, т.е. приемлемости решения для всех абонентских пар. Проблема согласования интересов также может потребовать предъявления эффективного множества, например, полномочным представителям отдельных групп пользователей (если речь идет о системе обеспечения различных регионов) и т.п. Так что рассматриваемая в данной статье задача описания множества ПО решений оказывается достаточно важной для МП-сетей.

Предположим теперь, что известны границы для вектора требований тяготеющих пар: $d \in D$. Тогда можно определить величину $\theta_0^{\text{ж}}$ жестко гарантированной обеспеченности требований (см. в [1]) и приемлемыми считать только те эффективные мультипотоки $z^{\text{эфф}}$, для которых $z^{\text{эфф}} \geq \theta_0^{\text{ж}} d \quad \forall d \in D$, т.е. $z^{\text{эфф}} \geq \theta_0(d^{\max})d^{\max}$, где $d_i^{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{d \in D} d_i$ $\forall i \in M$. В этом случае ЛПР предъявляется меньшее (по сравнению с предыдущим случаем) множество вариантов. Границы для z могут быть получены и исходя из каких-либо других предположений, например, путем прямого задания уровней d_i^0 необходимого минимума потоков различных продуктов (при условии $d^0 \in Z(c)$).

Еще один способ объективного сокращения количества вариантов, оставляемых на произвол ЛПР, дают условия на распределение потоков, точнее, на маршруты соединения абонентских пар, например, ограничения по числу транзитов или необходимость нескольких реберно-непересекающихся путей (см. в [1], Введение). К сожалению, здесь мы уже выходим за пределы класса линейных задач и теряем возможность применения — для аппроксимации эффективного множества — методов продолжения, описываемых ниже (в разд.3).

2. Аппроксимация эффективного множества. Традиционным способом аппроксимации множества максимумов векторного критерия является максимизация свертки частных критериев, например, их суммы или минимума с весами (т.н. линейная и логическая свертки — существуют и другие типы сверток [14]). Весовые коэффициенты обычно берутся из стандартного симплекса и каждому набору весов соответствует некоторая ПО или слейтеровская точка. Таким образом, задав аппроксимацию симплекса, можно получить в той или иной форме аппроксимацию эффективного множества путем решения параметрического семейства задач максимизации свертки (параметром служит вектор весовых коэффициентов). Качество полученной аппроксимации (например, равномерность) зависит от конкретного типа свертки. В частности, линейная свертка в линейном случае позволяет реально найти лишь угловые точки, поскольку для построения грани эффективного множества надо "угадать" вектор весовых коэффициентов, совпадающий с нормалью к этой грани.

Существенным моментом при использовании сверток (как и при других способах аппроксимации, например, по методу последовательных уступок [15]) оказывается разделение эффективных и полуэффективных точек, особенно, граней множества Слейтера [16, 17]. Для граней, не являющихся ПО, всегда найдется допустимый мультипоток, более предпочтительный для кого-либо из пользователей и не менее предпочтительный для остальных тяготеющих пар. С точки зрения эффективности сети в целом такой поток безусловно лучше. Задача состоит в том, чтобы выделить не только угловые точки, но эффективные грани, ибо полуэффективные грани также имеют эффективные граничные точки. Естественно, что эффективной будет грань, все угловые точки которой эффективные, однако, проверка всех угловых точек требует слишком большого перебора. И хотя подобные методы для общих линейных задач достаточно распространены [12, 18, 19], размерность сетевых задач сильно затрудняет их применение.

Другим важным свойством, которого ожидает ЛПР от аппроксимации, а точнее, параметризации эффективного множества, является интерпретируемость коэффициентов свертки. Содержательный смысл весовых коэффициентов позволяет ЛПР ориентироваться на них при выборе конкретной ПО точки и способствует объективизации процесса принятия решений. Так что далее в данной работе будет использоваться обратная логическая свертка (ОЛС) [20]. Максимизируемая функция для ОЛС отличается от логической свертки (ЛС) тем, что веса стоят в знаменателе (формально это отличие существенно, ибо по-прежнему вектор коэффициентов изменяется на симплексе), и для задачи (1.1) имеет вид (0.2)

$$\min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i},$$

где

$$M(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M |\ d_i > 0\}, \tag{2.1}$$

$d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ — единичный симплекс. В такой записи содержательная интерпретация каждого коэффициента очевидна, это — доля требований данной тяготеющей пары в общей сумме требований. Разные векторы коэффициентов соответствуют различным вариантам распределения суммарного запроса пользователей. Результирующий мультипоток — конкурентный [5] для получившегося вектора требований.

Для геометрической иллюстрации ОЛС в сравнении с линейной сверткой вернемся к модельному множеству достижимости с рис.1. На рис. 2 штриховкой обозначены линии уровня линейной свертки (разные наклоны линий означают разные векторы коэффициентов), а пунктиром — ОЛС, векторы коэффициентов помечены “стрелочкой”. Нетрудно видеть, что каждой внутренней точке ПО грани соответствует свой вектор коэффициентов ОЛС, тогда как линейная свертка указанным свойством не обладает. Граничным точкам B и D ПО граней соответствует бесконечное множество векторов коэффициентов, причем ОЛС не позволяет отделить эти ПО точки от не являющихся эффективными остальных точек [A,B) и (D,E] данных граней множества Слейтера (в [7] они были выделены с помощью лексикографической процедуры построения суперконкурентного решения, другой способ будет предложен ниже).

Рис. 2.

Рассмотрим формально аппроксимационные свойства ОЛС, следуя [21, 20, 22, 23]. Обозначим, как и ранее (0.1),

$$\theta_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f},z) \in X(c)} \ \min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i}$$

с учетом возможности обращения в ноль компонент вектора d в соответствии с (2.1). И сохраним остальные обозначения из введения (см. также [7]) для этого случая, в частности $X_0(c, d)$ и $Z_0(c, d)$ обозначают множества конкурентных распределений потоков и мультипотоков — реализаций $\theta_0(d)$.

В [20] доказана липшицевость $\theta_0(\cdot)$ на $\mathcal{D}$ (см. также результаты разд.3 из [7]) с константой

$$K = (\sigma^*)^2 \{\sum_{i \in M} (1/z_i^{\max})^2\}^{1/2}, \quad \text{где} \quad \sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \sum_{i \in M} z_i, \quad z_i^{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} z_i$$

$\forall i \in M$. Отметим, что согласно [20, 22] $\max\limits_{d \in \mathcal{D}} \theta_0(d) = \sigma^*$.

Для слейтеровского множества справедливо такое же представление с помощью ОЛС, как и для других сверток (линейной или ЛС),

$$X^{\mathrm{C}}(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} X_0(c, d), \quad Z^{\mathrm{C}}(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} Z_0(c, d).$$

При этом для ОЛС множество слейтеровских мультипотоков можно параметризовать и без использования всего множества реализаций максимума свертки, а именно

$$Z^{\mathrm{C}}(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \{\theta_0(d) d\}.$$

(Строгое доказательство дано в [24] для более общей постановки — задачи поиска векторного минимакса.)

К сожалению, множество конкурентных решений (реализаций $\theta_0(d)$) для многих $d \in \mathcal{D}$ содержит не являющиеся эффективными полуэффективные точки наряду с эффективными. Для выделения последних введем множество

$$X^*(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f}^*, z^*) \in X_0(c, d) | \sum_{i \in M} z_i^* = \sigma(d)\},$$

где

$$\sigma(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f}, z) \in X_0(c, d)} \sum_{i \in M} z_i.$$

Переформулировав утверждения из [20] для данного сетевого случая, получим

Утверждение 1. *Пусть $x^*(c, d)$ — произвольные точки множеств $X^*(c, d)$, тогда множество эффективных мультипотоков*

$$Z^{\text{эфф}}(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \{z^*(c, d)\}.$$

И кроме того, $\exists \alpha_0 > 0$ (называемая константой регулярности):

$$X^*(c,d) = X^\alpha(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Arg} \max_{(\mathbf{f},z)\in X(c)} \{\min_{i\in M(d)} \frac{z_i}{d_i} + \alpha \sum_{i\in M} z_i\} \tag{2.2}$$

$\forall\, 0 < \alpha < \alpha_0$. Значение последнего максимума будем обозначать $\theta_0^\alpha(d)$.

Таким образом, на практике допустимо вместо построения всего множества $X^*(c,d)$ находить произвольные его элементы, а вместо решений лексикографической задачи поиска $x^*(c,d) \in X^*(c,d)$ использовать для параметризации (и аппроксимации) множества эффективных мультипотоков векторы $x^*(c,d) \in X^\alpha(c,d)$ при некотором достаточно малом $\alpha > 0$. Отметим, что для ЛС труднее отделить от нуля параметр α (см. [20]), тогда как для ОЛС в теореме 3.2 [23] доказана равномерная регулярность $Z^{\text{эфф}}(c)$ с

$$\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} (m-1)^{-1} \cdot 3^{-n(n-1)/2},$$

где $m = |M|$ — число тяготеющих пар, n — число узлов МП-сети.

Реально ограничиваются лишь конечным числом эффективных точек, которые тем не менее дают представление о всем ПО множестве. Для этого вводится понятие конечной сети (ϵ-сети) в произвольном компакте W как такого конечного множества W_ϵ точек $w^j \in W$, $j = 1,\ldots,J$, что $h(W, W_\epsilon) < \epsilon$, где h обозначает расстояние в метрике Хаусдорфа,

$$h(W, W') \stackrel{\text{def}}{=} \max[\max_{w\in W} \rho\{w, W'\}, \max_{w'\in W'} \rho\{w', W\}].$$

При аппроксимации эффективного множества в метрике Хаусдорфа с помощью ОЛС можно утверждать следующее.

Утверждение 2 [21]. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ_1, что для любой δ-сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ при $0 < \delta \le \delta_1$ множество*

$$\bigcup_{d\in\mathcal{D}_\delta} \{z^*(c,d)\},$$

где $z^*(c,d)$ — произвольная точка из $Z^*(c,d)$, образует ε-сеть в $Z^{\text{эфф}}(c)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta > 0$ и α: $\alpha_0 > \alpha > 0$, что для любой δ-сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ множество

$$\bigcup_{d\in\mathcal{D}_\delta} \{z^\alpha(d)\},$$

где $x^\alpha(d)$ — произвольная точка из $X^\alpha(c,d)$, образует ε-сеть в $Z^{\text{эфф}}(c)$. При этом параметром ε-сети будет

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 - \alpha}(\sigma^* + (1+\alpha)K)\delta$$

($(1+\alpha)K$ — константа Липшица функции $\theta_0^\alpha(\cdot)$ на $\mathcal{D}$, α_0 — константа регулярности множества ПО, см. выше). Так что между δ и ε существует линейная связь.

В [21] также исследована возможность неточного решения задачи максимизации свертки. А именно, обозначим

$$X^{\alpha,\Delta}(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^{\alpha,\Delta}(d) = (\mathbf{f}^{\alpha,\Delta}(d), z^{\alpha,\Delta}(d)) \in X(c) |$$

$$\min_{i\in M(d)} \frac{z_i^{\alpha,\Delta}(d)}{d_i} + \alpha \sum_{i\in M} z_i^{\alpha,\Delta}(d) \geq \theta_0^\alpha(d) - \Delta\}.$$

Тогда справедливо

Утверждение 3. *Для любой δ-сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$, произвольных констант α, $0 < \alpha < \alpha_0$, и $\Delta > 0$ и произвольных точек $x^{\alpha,\Delta}(d)$ из $X^{\alpha,\Delta}(c,d)$ выполнено неравенство*

$$h(Z^{\text{эфф}}(c), \bigcup_{d\in\mathcal{D}_\delta} \{z^{\alpha,\Delta}(d)\}) < \max\Big[\Delta/\alpha, \ \ \frac{\alpha_0+1}{\alpha_0-\alpha}\{(\sigma^* + (1+\alpha)K)\delta + \Delta\}\Big].$$

Оказывается, что при аппроксимации эффективного множества с помощью ОЛС для большей части параметров $d \in \mathcal{D}_\delta$ задачу максимизации свертки можно не решать вообще. Действительно (см. [20]), основным свойством ОЛС, обусловившим ее выбор для аппроксимации эффективного множества, является возможность продолжения по параметру d решения $\theta_0^\alpha(d)$, $z^\alpha(d)$, $\mathbf{f}^\alpha(d)$ задачи максимизации свертки (при $\alpha < \alpha_0$). Фактически, найдя решение для некоторого $d \in \mathcal{D}$, его нетрудно пересчитать для близкого значения d' и затем вычислить аналитически для всех точек определенного отрезка прямой, проходящей через d, d' [22] (ибо для двух мультипотоков, принадлежащих одной ПО грани, их линейная комбинация, если она не выводит из множества достижимости, дает ПО мультипоток). Далее в алгоритмах будет использоваться другой способ: найдя решения для $T \geq 2$ точек $\{d^t\}_{t=1}^T$, выразить через них решения, соответствующие всем d из выпуклой оболочки этих точек (в подпространстве размерности $T-1$). Формально, указанный способ обосновывает (с учетом (2.2)) следующее

Утверждение 4 [20]. *Пусть $d^t \in \mathcal{D}$, $x^\alpha(d^t) \in X^\alpha(c, d^t)$,*

$$\sigma_t \stackrel{\text{def}}{=} \theta_0(d^t) \quad \forall t = 1, \dots, T,$$

и для любого $\lambda \in \Lambda^T \stackrel{\text{def}}{=} \{(\lambda_1, \dots, \lambda_T) \geq 0 | \sum_{t=1}^T \lambda_t = 1\}$

$$d(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=1}^T \lambda_t d^t, \quad x(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{t=1}^T \frac{\lambda_t}{\sigma_t})^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_t}{\sigma_t} x^\alpha(d^t). \qquad (2.3)$$

Тогда, если существует $\lambda^0 \in \Lambda^T,\ \lambda^0 > 0$, *для которого выполнено*

$$x(\lambda^0) \in X^\alpha(c, d(\lambda^0)) \tag{2.4}$$

и при этом

$$\theta_0(d(\lambda^0)) = (\sum_{t=1}^{T} \frac{\lambda_t^0}{\sigma_t})^{-1}, \tag{2.5}$$

то $x(\lambda) \in X^\alpha(c, d(\lambda))$ *для любого* $\lambda \in \Lambda^T$.

Итак, зная $x^\alpha(d^t) \in X^\alpha(c, d^t)$, можно, при выполнении условий (2.4) и (2.5), получить $x^\alpha(d) \in X^\alpha(c, d)$ при любом $d \in conv\{d^t\}$. Следующий результат дает ответ на вопрос, как часто возникает такая ситуация.

Утверждение 5 [20]. *Существует такое разбиение симплекса* $\mathcal{D}$ *на* $(m-1)$*-мерные многогранники* $D_1, \ldots, D_J$, *что для всех* $j = 1, \ldots, J$, *для любых* $\{d^t\}_{t=1}^T \subset D_j$ *и произвольных* $x^\alpha(d^t) \in X^\alpha(c, d^t)$ *выполнены условия (2.4) и (2.5) при каждом векторе* $\lambda^0 \in \Lambda^T,\ \lambda^0 > 0$.

Утверждения 4 и 5 позволяют сократить число решаемых оптимизационных задач при аппроксимации множества Парето-Эджворта. Действительно, пусть многогранники $Q_1, \ldots, Q_I$ покрывают симплекс $\mathcal{D}$. Если многогранник $Q_r \subset D_j$ при некотором $j \in \{1, \ldots, J\}$, то для его вершин (согласно утверждению 5) будут выполнены условия (2.4) и (2.5), что позволяет (по утверждению 4) находить $x^* \in X^\alpha(c, d)$ (при $d \in Q_r$), не решая соответствующей задачи. Обозначим через $\mathcal{Q}$ объединение всех таких многогранников. Если для вершин многогранника Q_r не выполнены условия (2.4) и (2.5), то этот многогранник по крайней мере пересекается с границей одного из D_j. Пусть $\mathcal{Q}'$ — объединение всех таких многогранников. Так как $(m-1)$-мера границы любого D_j $(j = 1, \ldots, J)$ равна нулю, то при достаточно малых диаметрах множеств Q_r малой окажется и мера $\mathcal{Q}'$. А это, в свою очередь, означает, что при малом $\delta > 0$ лишь незначительная доля узлов δ-сети на $\mathcal{D}$ (более или менее равномерной) попадет в $\mathcal{Q}'$. Для остальных узлов δ-сети d (принадлежащих $\mathcal{Q}$) точки $x^\alpha(d) \in X^\alpha(c, d)$ можно будет определить согласно утверждению 4.

Таким образом, процедура аппроксимации эффективного множества сводится к построению множеств $Q_1, \ldots, Q_I$, задающих подходящее покрытие симплекса $\mathcal{D}$. Предлагаемые в [20, 21, 23] итеративные алгоритмы приводятся в следующем разделе.

3. Алгоритмы разбиения.

Алгоритм 1 (*построения множеств* $Q_1, \ldots, Q_I$).

Параметрами алгоритма являются: критерий малости многогранника и процедура дробления.

Шаг 0. Положить $Q_1^0 := \mathcal{D},\ t := 0,\ k_0 := 1,\ k := 0$.

Шаг 1. Положить $k_{t+1} := 0,\ r := 1$.

Шаг 2. Если многогранник Q_r^t достаточно мал, $k := k+1,\ Q_k := Q_r^t$, перейти к шагу 5. Иначе, перейти к шагу 3.

Шаг 3. Для вершин многогранника Q_r^t проверить условия (2.4) и (2.5). Если они выполнены, то $k := k+1,\ Q_k := Q_r^t$, перейти к шагу 5. Иначе, перейти к шагу 4.

Шаг 4. Раздробить многогранник Q_r^t. Пусть $P_1, \ldots, P_{q_t}$ — результат этого дробления. Положить $Q_{k_{t+1}+s}^{t+1} := P_s\ \forall s = 1, \ldots, q_t;\ \ k_{t+1} := k_{t+1}+q_t$.

Шаг 5. Если $r < k_t$, положить $r := r+1$ и перейти к шагу 2. Иначе, $t := t+1$, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Если $k_t = 0$, — выход. Иначе, перейти к шагу 1.

После окончания работы алгоритма получим многогранники $Q_1, \ldots, Q_I$ такие, что $\cup Q_k = \mathcal{D}$, причем каждый Q_k либо достаточно мал, либо для его вершин выполнены условия (2.4) и (2.5).

Критерий малости многогранника должен давать возможность ограничиться малым числом узлов δ-сети (например одним) на этом многограннике. Таким критерием может быть, например, условие: диаметр многогранника меньше некоторого наперед заданного числа $\Delta > 0$. С критерием малости должна быть согласована процедура дробления: после конечного числа дроблений все полученные многогранники должны быть достаточно малы. Именно это условие гарантирует конечность алгоритма.

Пусть многогранник Q_r^t процедурой дробления разбит на многогранники $P_1, \ldots, P_{q_t}$. Естественно потребовать, чтобы: $\cup P_s = Q_r^t$ (для обеспечения $\cup Q_k = \mathcal{D}$), $\mathrm{dim} P_s = m-1$, а $\mathrm{ri} P_{s_1} \cap \mathrm{ri} P_{s_2} = \emptyset$ при $s_1 \neq s_2$ (тогда $\mathrm{dim} Q_k = m-1$ и $\mathrm{ri} Q_k \cap \mathrm{ri} Q_{k'} = \emptyset$ при $k \neq k'$).

Здесь и далее под относительной внутренностью $\mathrm{ri} D$ и границей $\mathrm{rd} D$ множества $D \subset \mathcal{D}$ подразумевается его внутренность и граница относительно аффинной оболочки симплекса $\mathcal{D}$.

Один из возможных способов дробления, удовлетворяющий всем указанным условиям, состоит в следующем.

Метод 1 (*дробления*). Пусть Q — $(m-1)$-мерный симплекс, $Q = conv\{d^1, \ldots, d^m\}$ и пусть $[d^l, d^i]$ — самое длинное его ребро. Положим $d \overset{\mathrm{def}}{=} (d^l + d^i)/2$, $P_1 \overset{\mathrm{def}}{=} conv(\{d^1, \ldots, d^m, d\} \backslash \{d^l\})$, $P_2 \overset{\mathrm{def}}{=} conv(\{d^1, \ldots, d^m, d\} \backslash \{d^i\})$. Легко показать, что P_1 и P_2 — также $(m-1)$-мерные симплексы и при этом $P_1 \cup P_2 = Q$, $\ \mathrm{ri} P_1 \cap \mathrm{ri} P_2 = \emptyset$.

Таким образом, начав с симплекса $\mathcal{D}$, будем в качестве многогранников получать лишь симплексы Q_k, которые будут дробиться по такой же схеме, а диаметры получаемых симплексов будут в результате стремиться к нулю.

Как уже отмечалось, дроблению в алгоритме 1 будут подвергаться лишь те симплексы Q_r^t, которые не лежат целиком ни в одном D_j. Поэтому целесообразно организовать дробление так, чтобы границы между многогранниками D_j оказывались бы и границами между Q_k. В таком случае после конечного числа шагов выполнилось бы $\bigcup\limits_{k\in J_j} Q_k = D_j$ (для некоторых $J_j \subset \{1,\ldots,I\}$) и, как следствие, $\mathcal{Q} = \mathcal{D}$, $\mathcal{Q}' = \emptyset$. Чтобы добиться подобного результата, нужно уметь отыскивать границы D_j. Здесь применимо

Утверждение 6 [20]. *1) Функция $1/\theta_0(d)$ — выпуклая кусочно-линейная на $\mathcal{D}$.*
2) На участках линейности $1/\theta_0(d)$ функция $\sigma(d)/\theta_0(d)$ — вогнутая кусочно-линейная.
3) Максимальные (по включению) подмножества симплекса $\mathcal{D}$, на которых и $1/\theta_0(d)$, и $\sigma(d)/\theta_0(d)$ линейны, суть многогранники, обладающие свойствами, декларированными в утверждении 5.

В дальнейшем под D_j будем подразумевать именно подмножества, удовлетворяющие предложению 3) утверждения 6. Их число зависит от структуры множества $Z^{\text{эфф}}(c)$. А именно, справедливо

Утверждение 7 [23]. *Многогранников линейности у функции $1/\theta_0(d)$ на $\mathcal{D}$ — ровно столько, сколько максимальных слейтеровских граней имеет множество $Z^{\mathrm{C}}(c)$ (пусть, J^{C}). Для любой F_l — максимальной слейтеровской грани $Z(c)$ — участок линейности функции $1/\theta_0(d)$, отвечающий F_l, содержит столько многогранников линейности функции $\sigma(d)/\theta_0(d)$, сколько максимальных паретовских граней имеет множество F_l (пусть, $J_l^{\text{эфф}}$). (Так что $J = \sum\limits_{l=1}^{J^{\mathrm{C}}} J_l^{\text{эфф}}$.)*

Опишем еще один способ дробления многогранника Q, предложенный в [20] на основании утверждения 6 и свойств выпуклых многогранников [25].

Метод 2 (*дробления*). Пусть $d^0 \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ и при этом $\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\tau \geq 0 |\ d^0 + \tau\lambda \in \mathcal{D}\} > 0$. Очевидно, что найдется D_j, содержащий как d^0, так и $d^0 + \tau\lambda$ при любом достаточно малом $\tau > 0$. Определим

$$\tau_1(d^0,\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\tau |\ d^0 + \tau\lambda \in D_j\}.$$

Ясно, что $d^0 + \tau_1(d^0,\lambda)\lambda \in \mathrm{rd} D_j$. Используя 1-е и 2-е предложения утверждения 6, нетрудно найти $\tau_1(d^0,\lambda)$. Действительно, функция $1/\theta_0(d^0 + \tau\lambda)$ — выпуклая кусочно-линейная на отрезке $[0,\tau_0]$, поэтому с помощью метода дихотомии [26] можно определить τ' — максимальное τ, при котором эта функция линейна на $[0,\tau]$. А на отрезке $[0,\tau']$ функция $\sigma(d)/\theta_0(d)$ будет вогнутой кусочно-линейной. Вычисляя ее значения в различных точках отрезка $[0,\tau']$, можно (по методу дихотомии) определить τ^1 — максимальное τ, при котором обе функции линейны на отрезке $[0,\tau]$. Из 3-го предложения вытекает, что $\tau^1=\tau_1(d^0,\lambda)$.

Теперь пусть $[d^0,d^1]$ — ребро Q, не лежащее целиком ни в одном D_j. Тогда найдутся такие вершины $d^2,\dots,d^{m-1}$ многогранника Q, что $\forall l=2,\dots,m-1$ выполнено $\dim conv\{d^0,d^1,\dots,d^l\}=l$ и при этом $d^0,d^1,\dots,d^l$ лежат в некоторой l-мерной грани Q [25]. С их помощью строятся $\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}$, принадлежащие $(m-2)$-мерной грани $Q\cap D_j$ для некоторого $D_j\ni d^0$, следующим образом.

Процедура 1 *(вспомогательная для метода 2 дробления).*

Шаг 1. $\bar d^1:=\tau_1(d^0,d^1-d^0)(d^1-d^0),\quad l:=1.$

Шаг 2. $\tilde d^0:=\dfrac{1}{l+1}(d^0+\sum\limits_{k=1}^{l}\bar d^k),\quad \lambda^0:=d^{l+1}-\tilde d^0,\quad \tilde d^1:=\tilde d^0+\tau_1(\tilde d^0,\lambda^0)\lambda^0,$ $t:=1.$

Шаг 3. $\tilde d^{2t}:=\dfrac{1}{l+1}(\tilde d^{2t-1}+\sum\limits_{k=1}^{l}\bar d^k),\ \ \lambda^t:=\tilde d^{2t}-d^0,\ \ \tilde d^{2t+1}:=d^0+\tau_1(d^0,\lambda^t)\lambda^t.$

Шаг 4. Если $\tilde d^{2t+1}\neq\tilde d^{2t}$, то $t:=t+1$, переход к шагу 3. Иначе, $\bar d^{l+1}:=\tilde d^{2t},\quad l:=l+1$, переход к шагу 5.

Шаг 5. Если $l\le m-1$, переход к шагу 2. Иначе, разделить Q на P_1 и P_2 плоскостью, проходящей через точки $\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}$, — выход.

Можно показать [23], что за конечное число шагов процедура 1 построит точки $\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}$, удовлетворяющие условиям:

1) найдется многогранник $D_j\ni d^0$ такой, что $\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}$ принадлежат некоторой грани $Q\cap D_j$,

2) $\dim conv\{\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}\}=m-2$,

3) $conv\{\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}\}\cap \mathrm{ri}Q\neq\emptyset$.

Условия 2) и 3) гарантируют, что через точки $\bar d^1,\dots,\bar d^{m-1}$ можно провести $(m-2)$-мерную плоскость, разделяющую Q на два многогранника P_1 и P_2, причем, $\dim P_1=\dim P_2=\dim Q$, и $\mathrm{ri}P_1\cap\mathrm{ri}P_2=\emptyset$. Пусть $d^0\in P_1$. Условие 1) обеспечит $\mathrm{ri}D_j\cap P_2=\emptyset$, а из свойств D_j, сформулированных в утверждении 6, будет следовать, что найдется $D_{j'}$, для которого $\mathrm{ri}D_{j'}\cap P_1=\emptyset$.

Итак, после разбиения Q на P_1 и P_2 плоскостью, определяемой точками, построенными по процедуре 1, каждое из полученных множеств содержится в объединении меньшего числа многогранников D_j, т.е. за конечное число дроблений останутся только многогранники, целиком принадлежащие некоторым D_j, $j=1,\dots,J$.

Процедуру 1 можно применить лишь к такому многограннику Q, у которого хотя бы одно ребро не лежит целиком ни в одном D_j. Если это условие нарушено, предлагается поступить следующим образом.

Процедура 2 *(вспомогательная для метода 2 дробления).* Пусть любая l-мерная грань Q лежит целиком в одном из множеств D_j, но существует $(l+1)$-мерная грань F_{l+1}, не лежащая целиком ни в одном из D_j (если такой грани, возможно несобственной, ни для какого $l < m$ не существует, то $Q \subset D_j$ для некоторого D_j).

Пусть $\hat{d}^1, \ldots, \hat{d}^s$ — все вершины F_{l+1}. Выберем минимальное p, при котором $\{\hat{d}^1, \ldots, \hat{d}^p\} \subset D_j$, а $\{\hat{d}^1, \ldots, \hat{d}^{p+1}\} \not\subset D_j$. (Такое $p \leq s-1$ обязательно существует в силу условий на F_{l+1}.) Положим

$$\hat{d} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p} \hat{d}^l,$$

очевидно $\{\hat{d}, \hat{d}^{p+1}\} \not\subset D_j$. Всегда можно построить гиперплоскость H, проходящую через точки $\hat{d}$ и $\hat{d}^{p+1}$, не опорную к Q. Укажем конкретный способ.

Так как $\dim F_{l+1} = l+1 \geq 2$, и $\lambda^1 \stackrel{\text{def}}{=} \hat{d}^{p+1} - \hat{d} \neq 0$, то найдется вектор $\tilde{d} \in F_{l+1}$, такой, что векторы λ^1 и $\lambda^2 \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{d} - \hat{d}$ линейно независимы. Положим

$$\lambda^0 \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^2 - \frac{\langle \lambda^1, \lambda^2 \rangle}{\langle \lambda^1, \lambda^1 \rangle}\lambda^1 \neq 0.$$

Гиперплоскость H с нормалью λ^0, проходящая через $\hat{d}$ удовлетворяет нашим требованиям. Действительно

$$\langle \hat{d}^{p+1}, \lambda^0 \rangle = \langle \hat{d}^{p+1} - \hat{d} + \hat{d}, \lambda^0 \rangle = \langle \lambda^1 + \hat{d}, \lambda^0 \rangle = \langle \hat{d}, \lambda^0 \rangle.$$

Поэтому $\hat{d}^{p+1} \in H$, а так как $\hat{d} \in \mathrm{ri} F_{l+1}$, а λ^0 принадлежит афинной оболочке F_{l+1}, то для некоторого $\varepsilon > 0$ точки $\hat{d} + \varepsilon\lambda^0$ и $\hat{d} - \varepsilon\lambda^0$ принадлежат F_{l+1} и разделяются гиперплоскостью H.

Таким образом, H разбивает Q на два многогранника P_0 и P_1. Очевидно, что при этом

1) $P_0 \cup P_1 = Q$,

2) H — опорная гиперплоскость как для P_0, так и для P_1,

3) H не содержит ни P_0, ни P_1, т.е. $\dim P_0 = \dim P_1 = \dim Q$,

4) $H \cap F_{l+1}$ — грань и P_0, и P_1 размерности меньше, чем l, причем $H \cap F_{l+1} \not\subset D_j$, т.е. получили исходные условия процедуры с $l := l - 1$.

Так, после конечного числа дроблений можно добиться, чтобы во всех полученных из Q многогранниках, не принадлежащих какому-либо из D_j, оказалось хотя бы одно ребро, не лежащее целиком ни в одном D_j, а затем переходить на процедуру 1.

Результатом работы метода 2 на начальных итерациях алгоритма построения покрытия симплекса $\mathcal{D}$ будут выходные многогранники процедуры 2, а на последующих — процедуры 1.

Если в алгоритме 1 удалить шаг 2, а в качестве метода дробления на шаге 4 использовать описанный метод 2, то модифицированный таким способом алгоритм — *Алгоритм 2* — за конечное число шагов построит многогранники $Q_1, \dots, Q_I$, для которых $\mathcal{Q}' = \emptyset$, $\mathcal{Q} = \mathcal{D}$. И тогда эффективное множество будет получено в виде объединения конечного числа многогранников (см. Утверждение 7).

В [23] указано, что для аппроксимации множества ПО $Z^{\text{эфф}}(c)$ при помощи ОЛС достаточно решить задачу максимизации свертки лишь в узлах некоторой δ-сети для множества $\mathcal{D}^* = \{d = z/\sum z_i \mid z \in Z^{\text{эфф}}(c)\}$, которое заранее не известно, но которое обычно значительно уже чем стандартный симплекс $\mathcal{D}$. Этот факт может быть использован для удаления узлов δ-сети, заведомо далеких от $\mathcal{D}^*$. А именно, Пусть в узлах $d^1, \dots, d^T$ решена задача максимизации ОЛС (найдены значения $\sigma_t \overset{\text{def}}{=} \theta_0(d^t)$ и $\sigma(d^t)$ для $t = 1, \dots, T$). Для любого $\lambda \in \Lambda^T$ по формуле (2.3) определим $d(\lambda)$. Как показано в [23], во всех точках $d \in \mathcal{D}^*$ справедливо равенство $\sigma(d) = \theta_0(d)$. Если для любого номера $t = 1, \dots, T$ выполнено строгое неравенство $\sigma(d^t) > \theta_0(d^t)$, то при определенных условиях многогранник $conv\{d^1, \dots, d^T\}$ не пересекается с множеством $\mathcal{D}^*$. В таком случае данный многогранник может быть целиком выброшен из симплекса.

Утверждение 8 [23]. *Пусть* $d^t \in \mathcal{D}$, $\sigma_t \overset{\text{def}}{=} \theta_0(d^t) < \sigma(d^t)$ $(t = 1, \dots, T)$. *Тогда, если существует* $\lambda^0 \in \Lambda^T$, $\lambda^0 > 0$, *для которого верно (2.5), т.е.*

$$\theta_0(d(\lambda^0)) = \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{\lambda_t^0}{\sigma_t} \right)^{-1},$$

то $conv\{d^1, \dots, d^T\} \cap \mathcal{D}^* = \emptyset$.

Отметим принципиальную разницу между утверждениями 4 и 8. В последнем множество $conv\{d^1, \dots, d^T\}$ может быть выброшено в связи с тем, что решения задачи максимизации свертки не дадут новых ПО точек. Иными словами указанный многогранник выбрасывается вместе со своими решениями. В утверждении же 4 многогранник $conv\{d^1, \dots, d^T\}$ отбрасывается потому, что все соответствующие решения могут быть построены по формуле (2.3).

Описанный способ может быть добавлен в качестве критерия отбраковки многогранников в алгоритмы 1 и 2, что позволяет еще более повысить их эффективность. Соответствующая схема метода ветвей и границ приведена в [21, 23].

Алгоритмы 1 (с методом 1) и 2 были тестированы при аппроксимации эффективного множества в трехкритериальной задаче максимизации МП-сети, граф которой представлен на рис. 3.

Рис. 3.

Множество $Z^{\text{эфф}}(c)$ состоит из трех "усов" — отрезков, выходящих из точки (1,20,27) в точки (21,0,7), (0,21,26) и (0,19,28). Последние два отрезка имеют на порядок меньшую длину, что затрудняет их обнаружение известными методами аппроксимации, ибо требует слишком мелкой сетки, т.е. решения большого числа однокритериальных задач. Использование алгоритмов 1, 2 дало возможность на 2 порядка уменьшить число решаемых задач максимизации свертки. Для малого шага по сетке метод 2 показал значительно лучшие результаты, чем метод 1.

4. Задача вариантного анализа. Указанные алгоритмы безусловно применимы и к решению задачи вариантного анализа, рассмотренной в начале разд.1 данной статьи, поскольку поставленные задачи параметрической оптимизации совпадают. В этом — еще один плюс параметризации с помощью ОЛС.

5. Устойчивость решения. В заключение данной статьи рассмотрим случай, когда, как и в разд.3,4 [7], вектор пропускной способности $c > 0$ известен не очень точно или может подвергаться небольшим возмущениям (возможность существенных изменений вектора c учитывается, например, в [27, 24]). Такая ситуация реально возникает, если пропускная способность является агрегированной характеристикой, например, не просто число каналов связи, а в пересчете на их качество, на которое уже влияют внешние факторы, скажем, метеоусловия.

Воспользуемся результатами [28, 29] по устойчивости множеств крайних точек Парето-Эджворта и Слейтера (см. также [30, 31, 32]).

Обозначим $E(\cdot)$ множество крайних точек аргумента. Для начала заметим, что отображение $c \mapsto E(X(c))$ Липшиц-непрерывно в точке $c > 0$, ибо возмущениям подвергается лишь правая часть линейных ограничений. Нетрудно увидеть также (см. доказательство теоремы 1 в [33]), что при $c < \infty$ множество $X(c)$ ограничено (возмущенная задача разрешима) и константа Липшица не зависит от c. Согласно [28, 29] из Липшиц-непрерывности отображения линейных ограничений в множество крайних точек задаваемого ими полиэдра следует Липшиц-полунепрерывность снизу множества эффективных крайних точек этого полиэдра и Липшиц-полунепрерывность сверху множества его полуэффективных крайних точек. Отсюда с помощью несложного обобщения (перенесения результата с Z на X путем рассмотрения лишь z-х компонент вектора x в качестве вектора критериев) получаем

Утверждение 9. *Многозначное отображение вектора пропускной способности ребер МП-сети в множество эффективных (полуэффективных) крайних точек* $c \mapsto E(X^{\text{эфф}}(c))$ ($c \mapsto E(X^{\text{С}}(c))$) *Липшиц-полунепрерывно снизу (сверху) на множестве* $0 < c < \infty$.

Список литературы

1. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.2

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.

4. *Карзанов А.В.* Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

5. *Matula D.W.* Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.Y.: Wiley-Intersci., 1985.

6. *Shahrokhi F., Matula D.W.* The maximum concurrent flow problem // J. Assoc. Comput. Math. 1990. V.37. N.2.

7. *Давидсон М.Р., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. Свойства суперконкурентного распределения потоков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. N.3.

8. *Папернов Б.А.* Массовое решение мультипотоковых задач // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып.3. М.: ВНИИСИ, 1979.

9. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

10. *Малашенко Ю. Е.* Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ АН СССР, 1993.

11. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

12. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.

13. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984.

14. *Абрамова М.В.* Некоторые аспекты векторной оптимизации и ее приложения: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1987.

15. *Нефедов В.Н.* Метод минимальных уступок // Некоторые вопросы прикладной математики и программного обеспечения ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1982.

16. *Попов Н.М.* Об аппроксимации множества Парето методом сверток // Вест. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика. 1982. N.2.

17. *Нефедов В.Н.* Аппроксимация множества оптимальных альтернативных решений // Новые задачи оптимизации авиационных систем. М.: Изд-во МАИ, 1989.

18. *Злобин А.С.* Параметрические методы решения линейных минимаксных и многокритериальных задач: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1984.

19. *Yu P.L. Zeleny M.* The set of all nondominated solutions in linear cases and multicriterial simplex method // J. of Math. Analysis and Appl. 1975. V.49.

20. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика. 1996. N.3.

21. *Смирнов М.М.* Метод обратной логической свертки в задачах векторной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.

22. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // ЖВМ и МФ. 1996. Т.36. N.5.

23. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1996.

24. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // ЖВМ и МФ. 1997. Т.37. N.12.

25. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

26. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

27. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

28. *Давидсон М.Р.* Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение для исследования многопродуктовых сетевых моделей: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: ВЦ РАН, 1995.

29. *Давидсон М.Р.* Липшиц-непрерывность Парето-оптимальных крайних точек // Вестн. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика, 1996. N 4.

30. *Naccache P.H.* Stability in multicriteria optimization, // J. Mathematical Analysis and Applications, 1979. V.68.

31. *Перевозчиков А.Г.* О полунепрерывности сверху прицИпов Парето-оптимальности // Вест. МГУ. Вычисл. матем. и кибернетика. 1983. N.3.

32. *Молодцов Д.А.* Устойчивость принципов оптимальности. М.: Наука, 1987.

33. *Давидсон М.Р.* Условия устойчивости множества крайних точек полиэдра и их применение в сетевой оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.

Рис. 1

Рис. 2.

Рис. 3.