

Модели неопределенности в многопользовательских сетях

Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.

Глава 3. Задача анализа многопродуктовой потоковой сети в случае неизвестного вектора требований

§1. Многокритериальная постановка задачи анализа

1.1. Формализация решения задачи. Рассмотрим теперь другой крайний случай неполной информированности. Предположим, что при оценке эффективности МП-сети вектор требований d не известен или границы неопределенности требований тяготеющих пар в сети оказываются слишком широкими. (Типичный пример подобной ситуации дает телефонная сеть, к которой могут подсоединяться пользователи с компьютерными модемами, пересылающие большие массивы данных, что сильно меняет загрузку линии, а в каком месте возникнет такая абонентская пара заранее не известно.) При этом гарантированные постановки дают излишне пессимистические оценки, а слабая — сильно завышенную, и то и другое мало информативно.

Одним из разумных подходов к исследованию возможностей МП-сети по обеспечению требований пользователей в данном случае является вариантный анализ, когда решается несколько (много) вариантов задачи анализа МП-сети для различных векторов требований, в той или иной степени представляющих все множество. Указанная информация предоставляется ЛПР (лицу, принимающему решения, например, заказчику сети или ее диспетчеру), который делает выводы об эффективности МП-сети на основании собственных оценок важности разных групп требований, прогнозов будущих требований, анализа сделанных заявок, корректировки статистических данных и т.п. Исследователь-математик в такой ситуации должен для каждого из выбранных векторов d решить оптимизационную задачу поиска приемлемого распределения потоков и соответственно оптимального мультитопотка. В результате приходим к задаче параметрического программирования типа (1.11), где параметром является вектор требований d . Заметим, что в задаче (1.11) умножение d на постоянную приводит к уменьшению во столько же раз величины $\theta_0(d)$. Следовательно, мы можем отнормировать вектор требований и считать, что изменение параметра происходит на единич-

ном симплексе: $d \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbf{R}_+^m \mid \sum_{i=1}^m d_i = 1\}$$

(в случае $d_{i'} = 0$ для некоторого i' этот индекс исключается из множества M в (1.11)). Задав дискретную аппроксимацию множества значений параметров и решив набор задач (1.11), получим (с определенной точностью) описание функциональных характеристик МП-сети для всех возможных вариантов требований. Имеющиеся в настоящее время методы параметрического программирования позволяют построить такое описание путем итеративного пересчета решения одной задачи (1.11) — без многократного применения процедур поиска конкурентного мультипотока (см. ниже §2, а также [64]).

Другой постановкой задачи анализа МП-сети в отсутствие вектора требований или заявок тяготеющих пар на передачу потока является многокритериальная постановка: максимизировать вектор мультипотока на множестве достижимости, т.е. найти

$$\text{Max}\{z \mid z \in Z(c)\} = \text{Max}\{z \mid (\mathbf{f}, z) \in X(c)\}. \quad (1)$$

Здесь максимизация проводится в смысле отношения частичного порядка “ $\geq$ ” среди векторов и Max обозначает множество максимальных (для этого отношения) элементов — значений векторного критерия, не увеличиваемых ни по одной компоненте без уменьшения по какой-либо другой [11, 67, 76], т.е. $\text{Max}\{z \mid z \in Z(c)\} =$

$$\begin{aligned} &= Z^\varnothing(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^\varnothing \in Z(c) \mid \forall z \in Z(c) \quad \{z \geq z^\varnothing\} \Rightarrow \{z = z^\varnothing\}\} = \\ &= \{z^\varnothing \in Z(c) \mid \forall z \in Z(c) \quad \{\exists i \in M: z_i > z_i^\varnothing\} \Rightarrow \{\exists j \in M: z_j < z_j^\varnothing\}\}. \end{aligned}$$

Решением задачи (1) считается множество $X^\varnothing(c)$ таких распределений потоков и мультипотоков $(\mathbf{f}^\varnothing, z^\varnothing) \in X(c)$, что $z^\varnothing \in Z^\varnothing(c)$, причем, $\forall z^\varnothing \in Z^\varnothing(c) \quad \exists (\mathbf{f}^\varnothing, z^\varnothing) \in X^\varnothing(c)$. Точки множества $X^\varnothing(c)$ называются оптимальными по Парето и Эджворту (ПО), а само множество *эффективным*. Аналогично, $Z^\varnothing(c)$ — *множество эффективных мультипотоков*. Наряду с эффективным с задачей (1) ассоциируется также более широкое множество *полуэффективных* точек или точек Слейтера $X^C(c)$, соответствующее множеству *слейтеровских мультипотоков*

$$X^C(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{z^C \in Z(c) \mid \forall z \in Z(c) \quad \exists i \in M: z_i \leq z_i^C\} -$$

не улучшаемых по всем компонентам сразу.

Например, для множества достижимых мультипотокот, изображенного на рис.7 (два вида продуктов), вся северо-восточная граница (ABCDE) является слейтеровской, а отрезки BC и CD — ПО. При этом точки полуинтервалов $[A, B]$ и $(D, E]$ не будут эффективными мультипотокотами. Отметим, что на рис.7 показана характерная форма множества достижимости, поскольку вместе с любой своей точкой оно содержит и неотрицательный вектор с меньшими компонентами.

Рис. 7

Постановка задачи анализа МП-сети с неизвестными требованиями в форме задачи векторной оптимизации отражает многопользовательский характер сетевой системы. Не имея количественных показателей, например, заявок абонентов, естественно описывать функциональные возможности МП-сети множеством достижимости $Z(c)$, тогда как предельные возможности функционирования задает множество $Z^{\partial}(c)$ максимальных элементов множества достижимости. В условиях дефицита пропускной способности ребер сети распределение потоков для тяготеющих пар также должно выбираться из эффективного множества. Рассматриваемый случай информированности (неинформированности) не дает исследователю объективных оснований для того, чтобы предпочесть один ПО вектор другим. Поэтому приходится предоставлять ЛПР описание всего эффективного множества (или его аппроксимацию) для субъективного выбора конкретного решения.

Авторы не придерживаются той точки зрения, что ЛПР следует предъявлять мало вариантов. Напротив того, считаем необходимым указать по крайней мере все угловые точки эффективного множества, чтобы можно было представить само множество (или с частью слейтеровских точек) и принимать решения на основе полной картины. Для облегчения представления

существуют общие методы, например, программы, демонстрирующие различные двух- и трехмерные грани множества ПО векторов [76, 39, 4, 40]. Если же ЛПР все равно трудно справиться с имеющейся информацией, то он должен либо попытаться узнать побольше (получше) о возможных требованиях пользователей, либо сформулировать дополнительные критерии, которыми он будет руководствоваться при осуществлении выбора из эффективного множества. В последнем случае приходим к задаче оптимизации на множестве ПО точек. Для ее решения не обязательно сначала аппроксимировать множество, поскольку применимы методы лексикографической оптимизации (как не понадобился явный вид множества сверхконкурентных решений для поиска суперконкурентного в предыдущем параграфе). Поэтому для исследователя такая постановка обычно предпочтительнее, и кроме того, она позволяет объективизировать выбор конкретного распределения потоков в МП-сети. (Когда критерии известны, их можно обсуждать или с ними спорить, что безусловно лучше принятия решения по принципу недостаточного основания: “как захотела левая нога”.)

Отметим, что, хотя в рассматриваемой модели предполагается централизованное принятие решений — управление потоками, нельзя не учитывать многопользовательского характера МП-сети, т.е. приемлемости решения для всех абонентских пар. Проблема согласования интересов также может потребовать предъявления эффективного множества, например, полномочным представителям отдельных групп пользователей (если речь идет о системе обеспечения различных регионов) и т.п. Так что рассматриваемая в данном параграфе задача описания множества ПО решений оказывается достаточно важной для МП-сетей.

Предположим теперь, что известны границы для вектора требований тяготеющих пар: $d \in D$. Тогда можно определить величину $\theta_0^{\text{ж}}$ жестко гарантированной обеспеченности требований (см. гл.1) и приемлемым считать только те эффективные мультипотoki $z^{\mathcal{O}}$, для которых $z^{\mathcal{O}} \geq \theta_0^{\text{ж}} d \quad \forall d \in D$, т.е. $z^{\mathcal{O}} \geq \theta_0(d^{\text{max}})d^{\text{max}}$, где $d_i^{\text{max}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{d \in D} d_i \quad \forall i \in M$. В этом случае ЛПР предъявляется меньшее (по сравнению с предыдущим случаем) множество вариантов. Границы для z могут быть получены и исходя из каких-либо других предположений, например, путем прямого задания уровней d_i^0 необходимого минимума потоков различных продуктов (при условии $d^0 \in Z(c)$). Еще один способ объективного сокращения количества вариантов, оставляемых на произвол ЛПР, дают условия на распределение потоков, точнее, на маршруты соединения абонентских пар, например, ограничения по числу транзитов или необходимость нескольких реберно-непересекающихся путей (см. Введение).

К сожалению, здесь мы уже выходим за пределы класса линейных задач и теряем возможность применения — для аппроксимации эффективного множества — методов продолжения, описываемых ниже (в §2).

1.2. Параметризация решения с помощью обратной логической свертки. Традиционным способом аппроксимации множества максимумов векторного критерия является максимизация свертки частных критериев, например, их суммы или минимума с весами (т.н. линейная и логическая свертки — существуют и другие типы свертки [1]). Весовые коэффициенты обычно берутся из стандартного симплекса и каждому набору весов соответствует некоторая ПО или слейтеровская точка. Таким образом, задав аппроксимацию симплекса, можно получить в той или иной форме аппроксимацию эффективного множества путем решения параметрического семейства задач максимизации свертки (параметром служит вектор весовых коэффициентов). Качество полученной аппроксимации (например, равномерность) зависит от конкретного типа свертки. В частности, линейная свертка в линейном случае позволяет реально найти лишь угловые точки, поскольку для построения грани эффективного множества надо “угадать” вектор весовых коэффициентов, совпадающий с нормалью к этой грани.

Существенным моментом при использовании свертки (как и при других способах аппроксимации, например, по методу последовательных уступок [56]) оказывается разделение эффективных и полуэффективных точек, особенно, граней множества Слейтера [69, 59]. Для граней, не являющихся ПО, всегда найдется допустимый мультипоток, более предпочтительный для кого-либо из пользователей и не менее предпочтительный для остальных тяготеющих пар. С точки зрения эффективности сети в целом такой поток безусловно лучше. Задача состоит в том, чтобы выделить не только угловые точки, но эффективные грани, ибо полуэффективные грани также имеют эффективные граничные точки. Естественно, что эффективной будет грань, все угловые точки которой эффективны, однако, проверка всех угловых точек требует слишком большого перебора. И хотя подобные методы для общих линейных задач достаточно распространены [76, 29, 165], размерность сетевых задач сильно затрудняет их применение.

Другим важным свойством, которого ожидает ЛПР от аппроксимации, а точнее, параметризации эффективного множества, является интерпретируемость коэффициентов свертки. Содержательный смысл весовых коэффициентов позволяет ЛПР ориентироваться на них при

выборе конкретной ПО точки и способствует объективизации процесса принятия решений. Так что далее в данной работе будет использоваться обратная логическая свертка (ОЛС) [70]. Максимизируемая функция для ОЛС отличается от логической свертки (ЛС) тем, что веса стоят в знаменателе (формально это отличие существенно, ибо по-прежнему вектор коэффициентов изменяется на симплексе), и для задачи (1) имеет вид

$$\min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i},$$

где $M(d) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in M \mid d_i > 0\}$, $d \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ — единичный симплекс. В такой записи содержательная интерпретация каждого коэффициента очевидна, это — доля требований данной тяготеющей пары в общей сумме требований. Разные векторы коэффициентов соответствуют различным вариантам распределения суммарного запроса пользователей. Результирующий мультипоток — конкурентный [133] для получившегося вектора требований.

Для геометрической иллюстрации ОЛС в сравнении с линейной сверткой вернемся к модельному множеству достижимости с рис.7. На рисунке 8 штриховкой обозначены линии уровня линейной свертки (разные наклоны линий означают разные векторы коэффициентов), а пунктиром — ОЛС, векторы коэффициентов помечены “стрелочкой”. Нетрудно видеть, что каждой внутренней точке ПО грани соответствует свой вектор коэффициентов ОЛС, тогда как линейная свертка указанным свойством не обладает. Граничным точкам В и D ПО граней соответствует бесконечное множество векторов коэффициентов, причем ОЛС не позволяет отделить эти ПО точки от не являющихся эффективными остальных точек [А,В) и (D,Е] данных граней множества Слейтера (ранее, в §2.2, они были выделены с помощью лексикографической процедуры построения суперконкурентного решения, другой способ будет предложен ниже).

Рис. 8.

Рассмотрим формально аппроксимационные свойства ОЛС, следуя [72, 70, 71, 73]. Обозначим, как и ранее (1.11),

$$\theta_0(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f}, z) \in X(c)} \min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i}$$

с учетом возможности обращения в ноль компонент вектора d . И сохраним остальные обозначения гл.2 для этого случая, в частности $X_0(c, d)$ и $Z_0(c, d)$. В [70] доказана липшицевость $\theta_0(\cdot)$ на $\mathcal{D}$ (см. также результаты §2.3) с константой

$$K = (\sigma^*)^2 \left\{ \sum_{i \in M} (1/z_i^{max})^2 \right\}^{1/2}, \quad \text{где } \sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} \sum_{i \in M} z_i, \quad z_i^{max} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z \in Z(c)} z_i$$

$\forall i \in M$. Отметим, что согласно [70, 71] $\max_{d \in \mathcal{D}} \theta_0(d) = \sigma^*$.

Для слейтеровского множества справедливо такое же представление с помощью ОЛС, как и для других сверток (линейной или ЛС),

$$X^C(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} X_0(c, d), \quad Z^C(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} Z_0(c, d).$$

При этом для ОЛС множество слейтеровских мультипотоксов можно параметризовать и без использования всего множества реализаций максимума свертки, а именно, в случае $\theta_0(\bar{1}/m) > 0$

$$Z^C(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \{\theta_0(d)d\}.$$

(Строгое рассмотрение будет проведено в гл. 6 для более общей постановки — задачи поиска векторного минимакса.)

К сожалению, множество конкурентных решений (реализаций $\theta_0(d)$) для многих $d \in \mathcal{D}$ содержит не являющиеся эффективными полуэффективные точки наряду с эффективными. Для выделения последних введем множество

$$X^*(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{f}^*, z^*) \in X_0(c, d) \mid \sum_{i \in M} z_i^* = \sigma(d)\},$$

где

$$\sigma(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(\mathbf{f}, z) \in X_0(c, d)} \sum_{i \in M} z_i.$$

Переформулировав утверждения из [70] для данного сетевого случая, получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $x^*(c, d)$ — произвольные точки множеств $X^*(c, d)$, тогда множество эффективных мультипотоков представимо в виде

$$Z^\mathcal{D}(c) = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} \{x^*(c, d)\}.$$

И кроме того, $\exists \alpha_0 > 0$ (называемая константой регулярности):

$$X^*(c, d) = X^\alpha(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Arg} \max_{(\mathbf{f}, z) \in X(c)} \left\{ \min_{i \in M(d)} \frac{z_i}{d_i} + \alpha \sum_{i \in M} z_i \right\} \quad (2)$$

$\forall 0 < \alpha < \alpha_0$. Значение последнего максимума будем обозначать $\theta_0^\alpha(d)$.

Таким образом, на практике допустимо вместо построения всего множества $X^*(c, d)$ находить произвольные его элементы, а вместо решений лексикографической задачи поиска $x^*(c, d) \in X^*(c, d)$ использовать для параметризации (и аппроксимации) эффективного множества векторы $x^*(c, d) \in X^\alpha(c, d)$ при некотором достаточно малом $\alpha > 0$. Отметим, что для ЛС труднее отделить от нуля параметр α (см. [70]), тогда как для ОЛС в теореме 3.2 из [73] доказана равномерная регулярность $Z^\mathcal{D}(c)$

$$\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} (m-1)^{-1} \cdot 3^{-n(n-1)/2},$$

где $m = |M|$ — число тяготеющих пар, n — число вершин МП-сети.

1.3. Аппроксимация решения с помощью обратной логической свертки. Реально ограничиваются лишь конечным числом эффективных точек, которые тем не менее дают представление о всем ПО множестве. Для этого вводится понятие конечной сети (ϵ -сети) в произвольном компакте W как такого конечного множества W_ϵ точек $w^j \in W$,

$j = 1, \dots, J$, что $h(W, W_\epsilon) < \epsilon$, где h обозначает расстояние в метрике Хаусдорфа,

$$h(W, W') \stackrel{\text{def}}{=} \max[\max_{w \in W} \rho\{w, W'\}, \max_{w' \in W'} \rho\{w', W\}].$$

При аппроксимации с помощью ОЛС эффективного множества в метрике Хаусдорфа можно утверждать следующее.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [72]. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число δ_1 , что для любой δ -сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ при $0 < \delta \leq \delta_1$ множество*

$$\bigcup_{d \in \mathcal{D}_\delta} \{z^*(c, d)\},$$

где $z^*(c, d)$ — произвольная точка из $Z^*(c, d)$, образует ε -сеть в $Z^\varnothing(c)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $\delta > 0$ и $\alpha: \alpha_0 > \alpha > 0$, что для любой δ -сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$ множество

$$\bigcup_{d \in \mathcal{D}_\delta} \{z^\alpha(d)\},$$

где $x^\alpha(d)$ — произвольная точка из $X^\alpha(c, d)$, образует ε -сеть в $Z^\varnothing(c)$. При этом параметром ε -сети будет

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 - \alpha} (\sigma^* + (1 + \alpha)K)\delta$$

$((1 + \alpha)K$ — константа Липшица функции $\theta_0^\alpha(\cdot)$ на $\mathcal{D}$, α_0 — константа регулярности множества ПО, см. выше). Так что между δ и ε существует линейная связь.

В [72] также исследована возможность неточного решения задачи максимизации свертки. А именно, обозначим

$$X^{\alpha, \Delta}(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \{x^{\alpha, \Delta}(d) = (\mathbf{f}^{\alpha, \Delta}(d), z^{\alpha, \Delta}(d)) \in X(c)\}$$

$$\min_{i \in M(d)} \frac{z_i^{\alpha, \Delta}(d)}{d_i} + \alpha \sum_{i \in M} z_i^{\alpha, \Delta}(d) \geq \theta_0^\alpha(d) - \Delta\}.$$

Тогда справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для любой δ -сети $\mathcal{D}_\delta \subset \mathcal{D}$, произвольных констант α , $0 < \alpha < \alpha_0$, и $\Delta > 0$ и произвольных точек $x^{\alpha, \Delta}(d)$ из $X^{\alpha, \Delta}(c, d)$ выполнено неравенство*

$$h(Z^\varnothing(c), \bigcup_{d \in \mathcal{D}_\delta} \{z^{\alpha, \Delta}(d)\}) < \max \left[\Delta/\alpha, \frac{\alpha_0 + 1}{\alpha_0 - \alpha} \{(\sigma^* + (1 + \alpha)K)\delta + \Delta\} \right].$$

1.4. Устойчивость представления множества решений крайними точками.

В заключение данного параграфа рассмотрим случай, когда, как и в §2.3, вектор пропускной способности $c > 0$ известен не очень точно или может подвергаться небольшим возмущениям (возможность существенных изменений вектора c учитывается в главах 5–7). Такая ситуация реально возникает, если пропускная способность является агрегированной характеристикой, например, не просто число каналов связи, а в пересчете на их качество, на которое уже влияют внешние факторы, скажем, метеоусловия.

Воспользуемся результатами [16, 18] по устойчивости множеств крайних точек Парето-Эджворта и Слейтера (см. также [135, 62, 52]). Для начала заметим, что отображение $c \mapsto E(X(c))$ Липшиц-непрерывно в точке $c > 0$, ибо возмущениям подвергается лишь правая часть линейных ограничений. Нетрудно увидеть также (см. доказательство теоремы 1 в [17]), что при $c < \infty$ множество $X(c)$ ограничено (возмущенная задача разрешима) и константа Липшица не зависит от c . Согласно [16, 18] из Липшиц-непрерывности отображения линейных ограничений в множество крайних точек задаваемого ими полиэдра следует Липшиц-полунепрерывность снизу множества эффективных крайних точек этого полиэдра и Липшиц-полунепрерывность сверху множества его полуэффективных крайних точек. Отсюда с помощью несложного обобщения (перенесения результата с Z на X путем рассмотрения лишь z -х компонент вектора x в качестве вектора критериев) получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Многозначное отображение вектора пропускной способности ребер МП-сети в множество эффективных (полуэффективных) крайних точек $c \mapsto E(X^\varnothing(c))$ ($c \mapsto E(X^C(c))$) Липшиц-полунепрерывно снизу (сверху) на множестве $c' < c < c''$, $c' \geq \bar{0}$, $c'' < \infty$.*