УДК 519.85

Кратный векторный минимакс [1]

© 2000 г. Н.М. Новикова, И.И. Поспелова, А.С. Семовская

119899, Москва, Воробьевы горы, МГУ, ф. ВМК

Поступила в редакцию 24.12.99 г.

Рассмотрена проблема формализации гарантированного значения кратного векторного минимакса для задач многоэтапного принятия решений в условиях неопределенности, в частности, для задач оптимизации многопользовательских сетей. Предложен способ параметризации указанного значения и реализующих его (минимизирующих и гарантирующих) стратегий с помощью обратной логической свертки. Обоснованы аппроксимационные свойства данной свертки.

1. Формализация. Рассматривается задача определения значения последовательного (кратного) многокритериального минимакса

$$\Phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{w^1\in W^1} \operatorname*{Max}_{u^1\in U^1(w^1)} \operatorname*{Min}_{w^2\in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{u^2\in U^2(w^2)} \ldots \operatorname*{Min}_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \operatorname*{Max}_{u^T\in U^T(w^T)} \Phi(u;w), \qquad (1)$$

где $\Phi(u;w) = \{\varphi_1(u;w), \varphi_2(u;w), \ldots, \varphi_Q(u;w)\} \geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\varphi_i(u;w) = \varphi_i(u^1,\ldots,u^T;w^1,\ldots,w^T)$, $i = 1,2,\ldots,Q$, будем предполагать непрерывными по совокупности аргументов, множества $U^t(w^t) \subset \mathbb{R}^{n_t}$ $\forall w^t \in W^t(u^{t-1})$ и $W^t(u^{t-1}) \subset \mathbb{R}^{m_t}$ $\forall u^{t-1} \in U^{t-1}(w^{t-1})$ — компактными, а отображения $U^t(\cdot)$, $W^t(\cdot)$ — непрерывными по Хаусдорфу $\forall t = 1,2,\ldots,T$ (формально полагая $W^1(u^0) \stackrel{\text{def}}{=} W^1$ и $U^0(w^0) = \emptyset$). Вектор $\Phi(u;w)$ называется вектором критериев или векторным критерием.

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в исследовании операций при моделировании сложных систем, качество функционирования которых не удается описать одним показателем [1, 2]. Наличие вектора критериев вносит элемент субъективной неопределенности при изучении системы, что обусловливает необходимость предоставления лицу, принимающему решения,

[1]Работа поддержана грантами по проектам: N.98-01-00233 и N.99-01-01192 РФФИ, N.00-15-96141 "Научные школы" и INTAS 97 – 1050.

всего множества оптимальных вариантов. В качестве такого множества используются эффективные (оптимальные по Парето-Эджворту) или полуэффективные (оптимальные по Слейтеру) значения вектора критериев. Эффективность вектора означает его неулучшаемость ни по какой компоненте без ухудшения по какой-либо другой, а полуэффективность — существование хотя бы одной неулучшаемой компоненты. (Далее будем употреблять также термины: паретовские, или ПЭ-, и слейтеровские значения, множества, векторы, оптимумы, задачи и т.п.)

Кроме того, функционирование сложных систем, как правило, происходит в условиях объективной неопределенности — незнания ряда внешних факторов, влияющих тем не менее на качество функционирования. Чтобы получить в этих условиях информативные (наилучшие гарантированные) оценки качества, ставят минимаксные или максиминные задачи векторной оптимизации [3 — 5]. Множество, определяющее гарантированное значение соответствующего векторного минимакса, характеризует уязвимость или живучесть исследуемой системы.

Принятие управляющих решений в сложных системах в условиях неопределенности нередко оказывается многоэтапным. Часть параметров приходится фиксировать *a priori* — до поступления информации о значениях неопределенных факторов, часть удается выбрать после реализации неопределенности. Реализация неопределенных факторов, вообще говоря, происходит динамически. Если обозначить через w^t переменные, относящиеся к неопределенности, через u^t управления оперирующей стороны и считать, что при выборе каждого u^t уже станут известны значения $w^1, \dots, w^t$, а значения w^{t+1} определятся позже, то придем к задаче на кратный векторный минимакс типа (1). Содержательно такая постановка позволяет учесть динамику поступления информации при анализе живучести сложной системы.

Приведем пример интерпретации задачи (1) с $T = 2$ в терминах многопродуктовых потоковых сетей, служащих структурной моделью ряда многопользовательских сетевых систем (см. в частности [6]). Речь пойдет о проблеме учета неопределенности при синтезе многопродуктовых сетей.

Качество функционирования многопользовательской сетевой системы определяется мультипотоком — вектором одновременно пропускаемых по сети потоков заявок пользователей (видов продуктов) $z = (z_1, \dots, z_Q)$. Для сети с заданной пропускной способностью w^2 ребер ставится задача векторной максимизации z. При исследовании живучести сетевой системы учитывается, что в процессе ее работы начальный вектор пропускной способности (который обозначим через u^1) может изменяться — уменьшаться по некоторым компонентам, приводя к w^2, так что w^2 оказывается неопределенным фактором. Тогда гарантированная оценка качества функционирования сети дается гарантированным значением векторного минимакса [7]

$$\operatorname*{Min}_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w^2)} z. \tag{2}$$

Этот минимакс зависит от u^1, и когда u^1 выбирается с целью повышения гарантированного качества, приходим к задаче максимизации (2), т.е. к поиску

$$\operatorname*{Max}_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname*{Min}_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w^2)} z. \tag{3}$$

Здесь $U^1(w^1)$ — множество ограничений задачи синтеза сети, предполагающей создание (или добавление) пропускной способности ребер в рамках имеющегося ресурса. При этом для ресурса есть несколько вариантов $w^1 \in W^1$ (например, денежный или натуральный), изменяющих вид ограничений, и заранее не известно, какой вариант реализуется. Чтобы получить априорную оценку возможностей создания (или модернизации, развития) сети, поставим задачу поиска

$$\operatorname*{Min}_{w^1 \in W^1} \operatorname*{Max}_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname*{Min}_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w^2)} z. \tag{4}$$

Ограничения и целевая функция в (4) для сетевых систем линейны (по крайней мере во внутренней задаче максимизации), причем целевая функция зависит лишь от последнего — *корректирующего* — управления $u^T \stackrel{\text{def}}{=} z$, а в общем случае получаем задачу (1). В принципе допустима также зависимость ограничений U^t, W^t и от всей предыстории $\mathbf{w^t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (w^1, \ldots, w^t)$, $\mathbf{u^{t-1}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (u^1, \ldots, u^{t-1})$, $t = 1, 2, \ldots, T$, но для упрощения изложения ограничимся данной постановкой, поскольку обобщение проводится автоматически (требует лишь более громоздких обозначений).

Определения векторного максимума уже стали классическими (см. к примеру в [3, 1, 8]). Далее в качестве базового будем рассматривать наиболее широкое — слейтеровское значение, т.е. для произвольного компакта X в евклидовом пространстве под $\mathrm{Max}\, X$ будем понимать множество максимальных элементов X в смысле отношения “$>$” среди векторов. Соответственно значение внутренней задачи векторной максимизации в (1) определим как множество оценок, не улучшаемых хотя бы по одной компоненте,

$$\mathop{\mathrm{Max}}_{u^T \in U^T(w^T)} \Phi(u; w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u; w)\} = \tag{5}$$

$$\{\psi \geq 0 |\ \exists u^T \in U^T(w^T) \colon\ \ \psi \leq \Phi(u; w) \text{ и } \forall {u'}^T \in U^T(w^T)\, \exists i \colon\ \ \psi_i \geq \varphi_i(\mathbf{u^{T-1}}, {u'}^T; w)\}.$$

В данном определении не требуется, чтобы оценки принадлежали множеству достижимости Φ, а предполагается лишь, что они принадлежат ПЭ-оболочке (см. в [9]) множества достижимости. Это более соответствует смыслу оценок, в особенности для минимаксных постановок (ср. с [11]).

Понятие векторного минимакса и в слейтеровском, и в паретовском вариантах вводится неоднозначно. Так в [3] обсуждаются концепции гарантированного и защищаемого значений (см. также в [5, 11]). Выбор концепции зависит от того, с позиций максимизирующего или минимизирующего игрока проводится исследование. Далее в работе будем считать, что оперирующая сторона стремится к максимизации Φ, и ориентироваться на принцип гарантированности результата. Примем за основу определение из [5], согласно которому

$$\mathop{\mathrm{Min}}_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \mathop{\mathrm{Max}}_{u^T \in U^T(w^T)} \Phi(u; w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Max} \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u; w)\}. \tag{6}$$

В слейтеровском случае (6) совпадает (см. в [12]) с определением

$$\operatorname*{Min}_{w^T\in W^T(u^{T-1})}\operatorname*{Max}_{u^T\in U^T(w^T)}\Phi(u;w)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbb{R}^Q_+\bigcap\operatorname{Min}\bigcup_{w^T\in W^T(u^{T-1})}\operatorname{Max}\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)}\{\psi\le\Phi(u;w)\},\tag{7}$$

являющимся модификацией для гарантированных оценок значения, предложенного в [4]. Здесь и далее $\mathbb{R}^Q_+$ обозначает неотрицательный ортант. Отметим, что в силу специфики ограничений для сетевых задач выполнено

$$\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)}\{\psi\ge 0|\ \psi\le\Phi(u;w)\}=\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)}\Phi(u;w),\tag{8}$$

и можно таким образом упростить формулы (5)–(7) [6].

Значение (1) — кратного векторного минимакса — ранее не определялось. Естественным подходом к формализации (1) представляется дальнейшее распространение определений (6),(7). Для этого требуется новое понятие

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y}X(y),\quad X(y)\subset\mathbb{R}^Q_+,\tag{9}$$

обобщающее (5). Неочевидность трактовки значения (9) объясняется тем, что не ясно как выбрать из различных множеств $X(y)$ максимальное, поскольку, если одно множество не принадлежит ПЭ-оболочке другого, то они несравнимы по отношению “$>$” (и “$\ge$”) среди векторов. Операция Max определена для множества, но не для набора множеств.

С точки зрения исследования операций выбор y в (9) является управлением оперирующей стороны, как и выбор конкретного $x\in X(y)$. Поэтому все множество альтернатив является объединением $X(y)$ по $y\in Y$. Стремление к выбору максимально возможного x приводит к задаче описания множества всех “наилучших” альтернатив для такого выбора, т.е. к формуле

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y}X(y)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\operatorname{Max}\bigcup_{y\in Y}X(y)=\operatorname{Max}\bigcup_{y\in Y}\operatorname{Max}X(y)\tag{10}$$

(правое равенство в (10) напрямую следует из определения Max по Слейтеру). Теперь, переходя аналогично (5) от достижимых значений к гарантированным оценкам, окончательно получим (с учетом неотрицательности) определение

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} X(y) \stackrel{\rm def}{=} \mathrm{Max} \bigcup_{y\in Y} \{\xi \geq 0 |\ \exists x \in X(y): \quad \xi \leq x\} = \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \mathrm{Max} \bigcup_{y\in Y} \mathrm{eph}\, X(y), \tag{11}$$

где $\mathrm{eph}\, X$ обозначает ПЭ-оболочку X [9], т.е.

$$\mathrm{eph}\, X \stackrel{\rm def}{=} \{\xi |\ \exists x \in X: \quad \xi \leq x\}. \tag{12}$$

Далее будем под значением (9) понимать (11). (Определение максимума (9) для случая, когда выбор $x \in X(y)$ не является управлением оперирующей стороны, см. в [10].)

Выпишем теперь формальное обобщение значения (7) векторного минимакса для постановок, в которых целевой функцией является точечно-множественное отображение $X(\cdot,\cdot)$, $X(y,v) \subset \mathbb{R}^Q_+$. А именно,

$$\operatorname*{Min}_{v\in V} \operatorname*{Max}_{y\in Y(v)} X(y,v) = \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \mathrm{Min} \bigcup_{v\in V} \mathrm{Max} \bigcup_{y\in Y(v)} \mathrm{eph}\, X(y,v), \tag{13}$$

что рекуррентно приводит к следующему распространению (7) для (1):

$$\Phi^* \stackrel{\rm def}{=} \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \mathrm{Min} \bigcup_{w^1\in W^1} \mathrm{Max} \bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \ldots \mathrm{Min} \bigcup_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \mathrm{Max} \bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi \leq \Phi(u;w)\}. \tag{14}$$

(Сокращение промежуточных eph и $\mathbb{R}^Q_+$ в (14) получается из определений eph (12) и Max.)

Обобщение формулы (6) на векторный минимакс точечно-множественных отображений проводится с содержательных позиций принципа гарантированности результата [1]. При каждом фиксированном v для описания полуэффективных оценок критерия $X(y,v) \subset \mathbb{R}^Q_+$ получаем задачу (9) и можем применить формулу (11). Однако заранее нельзя рассчитывать ни на какую конкретную точку $v \in V$, и поэтому в качестве множества оценок результата оперирующей стороны гарантируется лишь

$$\bigcap_{v\in V} \bigcup_{y\in Y(v)} \mathrm{eph}\, X(y,v)$$

(заведомо непустое). Из этого множества и следует выбирать неулучшаемые оценки (и неотрицательные), что дает определение

$$\operatorname*{Min}_{v\in V}\operatorname*{Max}_{y\in Y(v)} X(y,v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Max} \bigcap_{v\in V}\bigcup_{y\in Y(v)} \operatorname{eph} X(y,v) = \tag{15}$$

$$= \operatorname{Max} \bigcap_{v\in V}\bigcup_{y\in Y(v)} (\operatorname{eph} X(y,v) \bigcap \mathbb{R}^Q_+) = \operatorname{Max} \bigcap_{v\in V}\bigcup_{y\in Y(v)} \{x \geq 0 |\, \exists x' \in X(y,v):\ x \leq x'\},$$

которым далее будем пользоваться как основным.

Рекуррентное применение формулы (15) позволяет обобщить (6) для (1):

$$\Phi^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w^1\in W^1}\bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \ldots \bigcap_{w^T\in W^T(u^{T-1})}\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u;w)\}. \tag{16}$$

В результате имеем два определения гарантированного значения (1): (14) и (16). Покажем их эквивалентность в слейтеровском случае.

Обозначим через Ψ максимизируемое множество в (16),

$$\Psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{w^1\in W^1}\bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \ldots \bigcap_{w^T\in W^T(u^{T-1})}\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u;w)\} \tag{17}$$

— *множество гарантированных оценок*, и введем также

$$\Psi^t(\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{w^t\in W^t(u^{t-1})}\bigcup_{u^t\in U^t(w^t)} \ldots \bigcap_{w^T\in W^T(u^{T-1})}\bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u;w)\} \tag{18}$$

$\forall t = 2,3,\ldots,T$.

Утверждение 1. Для слейтеровской постановки множества (14) и (16) совпадают.

Доказательство. Обобщая доказательство теоремы 2 из [12] с вектор-функций на отображения или теоремы 4 из [10] с максимина на минимакс, нетрудно показать (после пересечения с $\mathbb{R}^Q_+$) равенство правых частей (13) и (15) в слейтеровском случае. Теперь итеративно применим это равенство для $X(y,v) = \Psi^t(\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}})$ при $t = 2,3,\ldots,T$ и для $X(y,v) = \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(u;w)\}$. Здесь $y \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{u^{t-1}}$, $v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{w^{t-1}}$, $Y(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} U^{t-1}(w^{t-1})$, $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} W^{t-1}(u^{t-2})$, $t = 2,3,\ldots,T+1$. Получим: $\operatorname{Max}\Psi =$

$$= \operatorname{Max} \bigcap_{w^1\in W^1}\bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \Psi^2(u^1,w^1) \stackrel{(15)=(13)}{=} \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1\in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \operatorname{eph}\Psi^2(u^1,w^1) =$$

$$(\text{из } (12)) \;\; = \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1 \in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname{eph} \operatorname{Max} \; \Psi^2(u^1, w^1) = \;\; (\text{по определению } \Psi^2)$$

$$= \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1 \in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname{eph} \operatorname{Max} \bigcap_{w^2 \in W^2(u^1)} \bigcup_{u^2 \in U^2(w^2)} \Psi^3(\mathbf{u^2}, \mathbf{w^2}) = \;\; ((15)=(13))$$

$$= \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1 \in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname{eph} \Big(\mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname{Max} \bigcup_{u^2 \in U^2(w^2)} \operatorname{eph} \Psi^3(\mathbf{u^2}, \mathbf{w^2}) \Big) =$$

$$(\text{из } (12)) \;\; = \mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1 \in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname{Min} \bigcup_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname{Max} \bigcup_{u^2 \in U^2(w^2)} \operatorname{eph} \Psi^3(\mathbf{u^2}, \mathbf{w^2}) = \ldots$$

$$\ldots =$$

$$\mathbb{R}^Q_+ \bigcap \operatorname{Min} \bigcup_{w^1 \in W^1} \operatorname{Max} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \ldots \operatorname{Min} \bigcup_{w^{t-1} \in W^{t-1}(u^{t-2})} \operatorname{Max} \bigcup_{u^{t-1} \in U^{t-1}(w^{t-1})} \operatorname{eph} \Psi^t(\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}}) =$$

$= \ldots$ На последнем шаге, воспользовавшись равенством правых частей (6) и (7) как частным случаем (15) и (13), придем к доказываемой эквивалентности (16) и (14).

В общих предположениях будем пользоваться для (1) определением (16). Это определение можно применять не только для слейтеровской, но и для паретовской постановки, понимая Max в (16) по Парето-Эджворту. Отметим, что в паретовском случае значения (14) и (16) существенно различаются (см. в [13, 12] для однократного векторного минимакса) и выражение (16) представляется более соответствующим смыслу гарантированного подхода.

В частности для задачи (4) — априорного оценивания возможностей синтеза сетевой системы — с учетом (8) можем записать

$$\operatorname*{Min}_{w^1 \in W^1} \operatorname*{Max}_{u^1 \in U^1(w^1)} \operatorname*{Min}_{w^2 \in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w^2)} z \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \bigcap_{w^2 \in W^2(u^1)} Z(w^2).$$

2. Параметризация. Методам поиска максимальных элементов заданного множества посвящено много работ (см. в частности [1, 3, 8, 9, 14]). Однако множество Ψ задано неявно, поэтому трудно использовать непосредственное определение (16) для построения $\Phi^* = \operatorname{Max} \Psi$.

Традиционно в многокритериальной оптимизации для описания множеств Парето и Слейтера применяется *метод сверток* (см., к примеру, в [1, 3]), позволяющий задать их параметризацию. В задачах на векторный минимакс [5] наиболее удобной оказалась *обратная логическая* свертка (ОЛС), предложенная в [14, 15]. Эта свертка предполагает замену вектора $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_Q)$ (в задаче на Max) параметрическим семейством скалярных критериев

$$\min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i, \quad \mu \in M, \tag{19}$$

$$\text{где} \quad M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 | \ \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\} - \ \text{стандартный симплекс в } \mathbb{R}^Q,$$

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, Q | \ \mu_i \neq 0\}, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, Q\}.$$

С помощью свертки (19) сведем многокритериальную задачу (1),(16) к параметрическому семейству задач поиска

$$\theta[\mu] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w^1 \in W^1} \max_{u^1 \in U^1(w^1)} \ldots \min_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \max_{u^T \in U^T(w^T)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(u; w) \quad \forall \mu \in M. \tag{20}$$

(Методы поиска скалярного кратного минимакса см., например, в [16].) Отметим, что в сделанных предположениях все минимумы и максимумы в (20) достигаются и являются непрерывными функциями тех компонент векторов u и w, от которых зависят (см. задачи 4.9, 4.10 из [17]).

Оказывается, что при определенных предположениях регулярности, обобщающих условия, принятые в [14, 5, 18], для слейтеровского значения (1),(2) справедливо представление

$$\Phi^* = \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu] \mu. \tag{21}$$

Для доказательства нам понадобится ряд вспомогательных построений и результатов, относящихся к свойствам ОЛС.

Лемма 1. Пусть неотрицательная вектор-функция f, $f(x) \in \mathbb{R}^Q_+$, непрерывна на компакте X в евклидовом пространстве. Тогда

$$\bigcup_{x \in X} \{\psi \geq 0 | \ \psi \leq f(x)\} = \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta'[\mu] \mu_i\Big],$$

$$\text{где}\ \ \theta'[\mu] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in X} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1} f_i(x) \ \ \forall \mu \in M.$$

Доказательство в регулярном случае следует из [19, 13], рассмотрим общий случай (без предположения регулярности).

1). Покажем, что $\bigcup\limits_{x\in X} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq f(x)\} \subseteq \bigcup\limits_{\mu\in M} \bigotimes\limits_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta'[\mu]\mu_i\Big]$.
Возьмем произвольный вектор ψ' из множества в левой части. По определению $\exists x^* \in X$: $\psi' \leq f(x^*)$. Пусть $f(x^*) \neq 0$. (В противном случае $f(x) = 0\ \forall x \in X$, т.е. $\theta'[\mu] = 0\ \forall \mu \in M$ и доказываемое равенство очевидно.) Тогда определим $\mu^* \in M$ как $\mu_i^* \stackrel{\text{def}}{=} f_i(x^*)/\sum\limits_{i=1}^{Q} f_i(x^*)\ \forall i = 1, 2, \ldots, Q$. Получим $\theta'[\mu^*]\mu^* =$

$$= \left[\max_{x\in X} \min_{i\in I(f(x^*))} \frac{f_i(x)}{f_i(x^*)} \sum_{i=1}^{Q} f_i(x^*)\right] \frac{f(x^*)}{\sum_{i=1}^{Q} f_i(x^*)} = \left[\max_{x\in X} \min_{i\in I(f(x^*))} \frac{f_i(x)}{f_i(x^*)}\right] f(x^*) \geq f(x^*),$$

так как максимум в квадратных скобках не меньше 1 (1 достигается при $x = x^*$). Отсюда

$$\psi' \leq \theta'[\mu^*]\mu^*, \ \ \text{т.е.}\ \ \psi' \in \bigcup_{\mu\in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta'[\mu]\mu_i\Big].$$

2). Покажем, что и $\bigcup\limits_{\mu\in M} \bigotimes\limits_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta'[\mu]\mu_i\Big] \subseteq \bigcup\limits_{x\in X} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq f(x)\}$.
Возьмем ξ, принадлежащий множеству из левой части. По определению $\exists \mu' \in M$: $\xi \leq \theta'[\mu']\mu'$. Кроме того для $x' \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x\in X}\{\min\limits_{i\in I(\mu')} f_i(x)/\mu_i'\}$ выполнено $f(x') \geq \theta'[\mu']\mu'$. Действительно $\theta'[\mu'] = \min\limits_{i\in I(\mu')} f_i(x')/\mu_i'$, а если бы $\exists k$: $f_k(x') < \theta'[\mu']\mu_k'$, то $\mu_k' \neq 0$ и $f_k(x')/\mu_k'$ оказалось бы меньше минимума по $i \in I(\mu')$, что не верно. Поэтому

$$\xi \in \bigcup_{x\in X} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq f(x)\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть неотрицательная вектор-функция f, $f(x,v) \in \mathbb{R}_+^Q$, непрерывна на компакте $X \times V$. Тогда

$$\bigcap_{v\in V} \bigcup_{x\in X} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq f(x,v)\} = \bigcup_{\mu\in M} \{\xi \geq 0 |\ \xi \leq \mu \min_{v\in V} \max_{x\in X} \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1} f_i(x,v)\}.$$

Доказательство аналогично предыдущему и повторяет ту часть доказательства утв. 8 из [11], в которой не используется условие регулярности.

Лемма 3. Пусть $\forall \mu \in M \;\; \theta[\mu](y) \geq 0$ — непрерывная функция y на компакте Y. Тогда

$$\bigcup_{y\in Y}\bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0, \theta[\mu](y)\mu_i\Big] = \bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0, \mu_i \max_{y\in Y}\theta[\mu](y)\Big].$$

Доказательство. Переставив объединения по y и по μ, с учетом неотрицательности μ_i получим требуемое.

Замечание 1. Отметим, что утверждение о перестановочности при замене объединения по y пересечением, а максимума минимумом — не верно. В этом случае, вообще говоря, справедливо лишь включение

$$\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0, \theta[\mu](y)\mu_i\Big] \supseteq \bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0, \mu_i \min_{y\in Y}\theta[\mu](y)\Big].$$

Лемма 4. Для любых векторов μ^1 и $\mu^2 \in M$, для которых $I(\mu^1) \supseteq I(\mu^2)$, не возможно, чтобы $\forall i \in I(\mu^1) \;\; \theta[\mu^1]\mu_i^1 > \theta[\mu^2]\mu_i^2$, т.е. $\exists i \in I(\mu^2)\colon \;\; \theta[\mu^1]\mu_i^1 \leq \theta[\mu^2]\mu_i^2$.

Доказательство проведем от противного. Пусть $\exists \mu^1, \mu^2 \in M\colon \;\; \forall i \in I(\mu^1)$ $\mu_i^1\theta[\mu^1] > \mu_i^2\theta[\mu^2], \;\; I(\mu^2) \subseteq I(\mu^1)$. Тогда, вспоминая определение (20), можем записать, что $\forall w^1 \in W^1 \;\; \exists u^1 \in U^1(w^1) \;\ldots\; \forall w^T \in W^T(u^{T-1}) \;\; \exists u^T \in U^T(w^T)$:

$$\theta[\mu^1]\mu_i^1 \leq \varphi_i(u;w) \;\; \forall i \in I(\mu^1) \;\text{ и }\; \theta[\mu^2]\mu_i^2 < \varphi_i(u;w) \;\; \forall i \in I(\mu^1),$$

$$\text{следовательно }\; \theta[\mu^2] < \varphi_i(u;w)/\mu_i^2 \;\; \forall i \in I(\mu^2) \;\text{ и }\; \theta[\mu^2] < \min_{i\in I(\mu^2)}\varphi_i(u;w)/\mu_i^2.$$

Отсюда получаем противоречие $\theta[\mu^2] < \theta[\mu^2]$, доказывающее лемму.

Следствие. Для любых $\mu^1, \mu^2 \in M$, если $\mu^1 > 0$, то $\exists i \in I\colon \;\theta[\mu^1]\mu_i^1 \leq \theta[\mu^2]\mu_i^2$.

Введем обозначения $\forall t = 1, 2, \ldots, T$ и $\forall \mu \in M$

$$\theta^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w^t\in W^t(u^{t-1})} \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^t}),$$

$$\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^t}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u^t\in U^t(w^t)} \theta^{t+1}[\mu](\mathbf{u^t}, \mathbf{w^t}),$$

формально полагая $\theta^{T+1}[\mu](\mathbf{u^T},\mathbf{w^T}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min\limits_{i\in I(\mu)} \varphi_i(u;w)/\mu_i$ и опуская u^0, w^0. Тогда $\theta^1[\mu]=\theta[\mu]$. Благодаря структуре ОЛС, результат леммы 4 можно обобщить и для θ^t, θ'^t при произвольных $t=1,2,\dots,T$. В частности далее будет использоваться

Лемма 5. Для любых $t=1,2,\dots,T$ при всех $\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1), $\forall \nu,\mu\in M$, если $I(\nu)\supseteq I(\mu)$, то $\exists i\in I(\mu)$: $\theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\nu_i \le \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\mu_i$.

Доказательство. Разворачивая определение $\theta'^t[\nu](\cdot)$, как и при доказательстве леммы 4, получим

$\exists u^t\in U^t(w^t)\ \forall w^{t+1}\in W^{t+1}(u^t)\ \dots\ \forall w^T\in W^T(u^{T-1})\ \ \exists u^T\in U^T(w^T)$:
$\theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}) \le \varphi_i(u;w)/\nu_i \quad \forall i\in I(\nu)\supseteq I(\mu)$ и (в предположении, что утверждение леммы не верно) $\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\mu_i < \theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\nu_i \le \varphi_i(u;w)$ $\forall i\in I(\mu)$, т.е. $\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}) < \min\limits_{i\in I(\mu)} \varphi_i(u;w)/\mu_i$ — пришли к противоречию.

Следствие. Для любого $\mu\in M$ выполнено

$$\max_{\nu\in M}\min_{i\in I(\mu)} \nu_i\theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})/\mu_i = \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}).$$

Доказательство. Прямо из леммы 5 заключаем, что $\exists i\in I(\mu)$: $\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}) \ge$

$$\ge \theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\nu_i/\mu_i, \quad \text{т.е.} \quad \min_{i\in I(\mu)} \theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})\nu_i/\mu_i \le \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})$$

$$\text{и} \quad \max_{\nu\in M:\ I(\nu)\supseteq I(\mu)}\ \min_{i\in I(\mu)} \nu_i\theta'^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})/\mu_i = \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}).$$

Теперь заметим, что если $I(\mu)\setminus I(\nu')\ne\emptyset$, то при таком ν' заведомо

$$\min_{i\in I(\mu)} \nu'_i\theta'^t[\nu'](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})/\mu_i = 0$$

— не превысит $\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})$ (т.е. ν' можно исключить из реализаций максимума по $\nu\in M$ данного минимума). Это и дает утверждение следствия.

Перед тем как строить описание решения Φ^*, выведем представление для множества Ψ (гарантированных оценок) на базе ОЛС. Если к (18) доопределить $\Psi^1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi$ (17) и $\Psi^{T+1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\psi\ge 0 |\ \psi\le\Phi(u;w)\}$, то можно найти Ψ с помощью рекуррентной формулы

$$\Psi^t(\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}}) = \bigcap_{w^t \in W^t(u^{t-1})} \bigcup_{u^t \in U^t(w^t)} \Psi^{t+1}(\mathbf{u^t}, \mathbf{w^t}), \tag{22}$$

$t = T, T-1, \ldots, 1$. На основании этого и доказывается

Лемма 6. Множество (17) представимо в виде $\Psi = \bigcup\limits_{\mu \in M} \bigotimes\limits_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta[\mu]\mu_i\Big]$.

Доказательство проведем по индукции. Предположение индукции:

$$\Psi^t(\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}}) = \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \mu_i \theta^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}})\Big].$$

Отсюда по лемме 3

$$\bigcup_{u^{t-1} \in U^{t-1}(w^{t-1})} \Psi^t(\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^{t-1}}) = \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \mu_i {\theta'}^{t-1}[\mu](\mathbf{u^{t-2}}, \mathbf{w^{t-1}})\Big].$$

Из данного равенства (при замене μ на ν) с учетом (22)

$$\Psi^{t-1}(\mathbf{u^{t-2}}, \mathbf{w^{t-2}}) = \bigcap_{w^{t-1} \in W^{t-1}(u^{t-2})} \bigcup_{\nu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \nu_i {\theta'}^{t-1}[\nu](\mathbf{u^{t-2}}, \mathbf{w^{t-2}})\Big] =$$

$$\text{(по лемме 2)} \ = \bigcup_{\mu \in M} \Big\{\xi \geq 0 | \ \xi \leq \min_{w^{t-1} \in W^{t-1}(u^{t-2})} \max_{\nu \in M} \min_{i \in I(\mu)} \nu_i {\theta'}^t[\nu](\mathbf{u^{t-1}}, \mathbf{w^t})/\mu_i\Big\}.$$

Максимум реализуется на $\nu = \mu$ согласно следствию к лемме 5, тем самым индукционный шаг закончен. База индукции получается из лемм 1 и 2 (аналогичным образом с $t = T$). На последнем шаге (при $t = 1$) приходим к утверждению леммы. (Параллельно доказана формула предположения индукции при всех t.)

Лемма 7. Пусть

$$\overline{\bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big(0, \theta[\mu]\mu_i\Big]} = \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta[\mu]\mu_i\Big], \tag{23}$$

тогда для максимума по Слейтеру

$$\mathrm{Max} \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta[\mu]\mu_i\Big] = \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu.$$

Здесь и далее черта сверху обозначает операцию замыкания, а декартово произведение с пустым множеством считается пустым.

Доказательство. Из следствия к лемме 4 заключаем, что в правой части (21) нет доминируемых по Слейтеру векторов. Осталось показать справедливость включения

$$\operatorname{Max} \bigcup_{\mu \in M} \bigotimes_{i=1}^{Q} \Big[0, \theta[\mu]\mu_i\Big] \subseteq \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu.$$

Рассмотрим произвольный вектор ψ' из множества в левой части, для него по определению $\exists \mu^* \in M\colon\ \psi' \leq \theta[\mu^*]\mu^*$. Если $\psi' = 0$, то из максимальности нуля вытекает, что $\exists i \in I\colon\ \theta[\mu]\mu_i = 0\ \ \forall \mu \in M$, т.е. $\exists \mu^0 \in M\colon\ \theta[\mu^0] = 0$, а значит, 0 принадлежит и правой части. Поэтому считаем, что $\psi' \neq 0$, и построим для него $\mu'\colon\ \mu'_i \stackrel{\text{def}}{=} \psi'_i/\sigma'$,где $\sigma' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{Q} \psi'_i$. Докажем, что $\psi' = \theta[\mu']\mu'$.

С учетом максимальности ψ' по Слейтеру $\exists i'\colon\ \psi'_{i'} \geq \theta[\mu']\mu'_{i'}$. Предположим сначала, что найдется такой $\psi'_{i'} \neq 0$, тогда по построению μ':

$$\theta[\mu'] \leq \psi'_{i'}/\mu'_{i'} = \psi'_i/\mu'_i = \sigma' \ \ \forall i \in I(\mu').$$

Возможны два варианта: $\theta[\mu'] = \sigma'$ (значит $\psi' = \theta[\mu']\mu'$, что и требовалось) или $\theta[\mu'] < \sigma'$ (и $\forall i \in I(\mu')\colon\ \psi'_i > \theta[\mu']\mu'_i$). Во втором случае $\theta[\mu^*]\mu^* \geq \theta[\mu']\mu'$ и $\forall i \in I(\mu')\colon\ \theta[\mu^*]\mu^*_i > \theta[\mu']\mu'_i$, т.е. получили противоречие с леммой 4. Теперь исследуем оставшуюся ситуацию: $\psi'_{i'} = 0$ и $\psi'_i < \theta[\mu']\mu'_i\ \ \forall i \in I(\mu') = I(\psi') \neq I$, т.е. $\theta[\mu'] > \sigma'$.

Введем $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{i \in I(\mu')} \Big(\theta[\mu']\mu'_i - \psi'_i\Big) > 0$. Имеем из условия (23) регулярности, что вектор $\theta[\mu']\mu'$ может быть получен как предел некоторой последовательности строго положительных векторов из правой части (23). Таким образом найдется $\xi > 0\colon\ \ |\theta[\mu']\mu'_i - \xi_i| < \varepsilon\ \ \forall i \in I$, т.е. $\xi_i > \psi'_i\ \ \forall i \in I(\psi')$ и $\xi_j > 0$ $\forall j \notin I(\psi')$, причем ξ принадлежит множеству в правой части (23), что противоречит выбору ψ' как максимального элемента этого множества. Лемма полностью доказана.

Утверждение 2. Пусть выполнено условие регулярности

$$\Psi = \overline{\bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \dots \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi > 0 | \ \psi \le \Phi(u; w)\}}. \tag{24}$$

Тогда для слейтеровской постановки задачи верно (21).

Доказательство. Из леммы 6 следует эквивалентность (23) и (24) (ибо равенство справедливо и для пересечений с положительным ортантом). В результате, применение леммы 7 завершает доказательство утверждения 2.

Замечание 2. Без предположения (23),(24) можно доказать включение

$$\Phi^*_{\Pi} \subseteq \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu \subseteq \Phi^*_{\mathrm{C}}, \tag{25}$$

где Φ^*_{Π} и Φ^*_{C} обозначают паретовское и слейтеровское значения (16).

3. Аппроксимация и нерегулярный случай. Утверждение 2 дает параметризацию слейтеровского значения (16). Для того, чтобы обосновать аппроксимационные свойства представления (21) на базе ОЛС, докажем следующее

Утверждение 3. Пусть равномерно по всем w, $\mathbf{u^{T-1}}$, удовлетворяющим ограничениям задачи (1), выполнено условие регулярности из [14, 19, 20] для внутренней задачи векторной максимизации, т.е.

$$\overline{\bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi > 0 | \ \psi \le \Phi(u; w)\}} = \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi \ge 0 | \ \psi \le \Phi(u; w)\}. \tag{26}$$

Тогда функция $\theta[\cdot]$ (20) непрерывна $\forall \mu \in M$.

Доказательство. Аналогично доказательству из [19, 20] непрерывности функции максимума ОЛС в рассматриваемом случае внутренний максимин будет непрерывной функцией μ на M равномерно по w, $\mathbf{u^{T-1}}$. Далее рекуррентно пользуемся непрерывной зависимостью от параметра μ функций максимума и минимума (см. задачу 4.4 из [17]).

Таким образом, в условиях (24),(26) представление (21) позволяет аппроксимировать слейтеровское значение (16) с любой наперед заданной точностью. Исследуем соотношение этих условий.

Утверждение 4. В сделанных предположениях относительно задачи (1) из условий утверждения 3 следует и регулярность в смысле (23),(24).

Доказательство. По лемме 1 правая часть (26) равна

$$\bigcup_{\mu\in M}\{\xi\geq 0|\ \xi\leq \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})\mu\},$$

а левая — замыканию пересечения этого множества с положительным ортантом. Теперь заметим, что

$$\bigcup_{\mu\in M}\{\xi> 0|\ \xi\leq \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})\mu\}=\bigcup_{\mu\in M^0}\{\xi> 0|\ \xi\leq \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})\mu\},$$

где $M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu\in M|\ \mu>0,\ \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})>0\}$. Кроме того, если для некоторого $\mu^0>0$ выполнено $\theta'^T[\mu^0](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})=0$, то $\forall u^T\in U^T(w^T)\ \ \exists i\in I$: $\varphi_i(u;w)=0$, так что и $\forall\mu>0\ \ \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})=0$. Тем самым, если $\exists\mu^0>0$: $\theta'^T[\mu^0](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})>0$, то и $\forall\mu>0\ \ \ \theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})>0$. Следовательно, условие $\theta'^T[\mu](\mathbf{u^{T-1}},\mathbf{w^T})>0\ \ \forall\mu>0$ (а, значит, и $\forall\mu\geq 0$ по определению θ'^T) является отрицанием того, что множество в левой части (26) пусто, и таким образом оказывается необходимым для выполнения равенства (26) $\forall w$, $\mathbf{u^{T-1}}$. Но при этом и $\theta[\mu]>0\ \forall\mu\in M$ (см. определение (20)). В результате в условиях утверждения 3 получаем

$$\overline{\{\xi>0|\ \xi\leq\theta[\mu]\mu\}}=\{\xi\geq 0|\ \xi\leq\theta[\mu]\mu\}\ \ \forall\mu>0.$$

Обозначим через Ξ_μ множество под чертой.

Из свойств операции замыкания можем записать

$$\overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\Xi_\mu}\supseteq\bigcup_{\mu\in M^0}\overline{\Xi_\mu},\quad \bigcup_{\mu\in M^0}\Xi_\mu\subseteq\bigcup_{\mu\in M^0}\overline{\Xi_\mu},\quad \text{т.е.}\ \ \overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\Xi_\mu}=\overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\overline{\Xi_\mu}}.$$

Отсюда по определению Ξ_μ для левой части (23) выводим

$$\overline{\bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big(0,\theta[\mu]\mu_i\Big]}=\overline{\bigcup_{\mu\in M}\Xi_\mu}=\overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\Xi_\mu}=\overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\overline{\Xi_\mu}}=\overline{\bigcup_{\mu\in M^0}\{\xi\geq 0|\ \xi\leq\theta[\mu]\mu\}}.$$

Докажем, что последнее множество равно правой части (23). Действительно, множество $\overline{\Xi_\mu}$ задано линейными ограничениями неравенствами, у которых лишь правая часть зависит от μ. В силу утверждения 3 эта зависимость непрерывна, что обусловливает непрерывность по Хаусдорфу отображения $\mu \to \overline{\Xi_\mu}$ для $\mu \in M$ [21, 22]. В рассматриваемом случае $M^0 = \{\mu \in M |\ \mu > 0\}$, т.е. M является замыканием M^0. Поэтому $\forall \mu' \in M \setminus M^0 \ \ \exists \mu^k > 0\colon\ \ \mu^k \to \mu'$, $k \to \infty$, и $\overline{\Xi_{\mu^k}} \to \overline{\Xi_{\mu'}}$ в смысле метрики Хаусдорфа, а значит,

$$\overline{\bigcup_{\mu \in M^0} \overline{\Xi_\mu}} = \bigcup_{\mu \in M} \overline{\Xi_\mu},$$

что и требовалось доказать.

Ситуацию, в которой не выполняются условия регулярности, в частности, когда $\theta[(\frac{1}{Q}, \ldots, \frac{1}{Q})] = 0$ (т.е. $\theta[\mu] = 0 \ \ \forall \mu > 0$) нельзя считать экзотической. Так, для сетевой задачи (4) $\theta[(\frac{1}{Q}, \ldots, \frac{1}{Q})] = 0$ означает, что нет априорных гарантий обеспечения связи всем пользователям (при любом допустимом варианте синтеза не исключены разрушения, приводящие к потере связности графа сети). Исследование возможностей сетевой системы в подобных случаях, без сомнения, важно, ибо часть пользователей сети, как правило, не настолько затронута разрушением, чтобы совсем лишиться связи, и некоторый ненулевой поток для них достижим. Однако формальное определение слейтеровского решения задачи (1),(16) дает при $\theta[(\frac{1}{Q}, \ldots, \frac{1}{Q})] = 0$ слишком широкое множество Ψ — всех гарантированных оценок векторов потоков. А именно, Φ^*_{C}, равное $\mathrm{Max}\, \Psi$, совпадает со всем множеством Ψ, т.е. оптимизация просто отсутствует (не учитывается стремление к максимизации потока).

Представление множества Φ^* в виде (21) является более адекватным, поскольку правая часть (21), вообще говоря, у́же множества Ψ, но при этом, согласно (25), содержит все паретовские векторы из Ψ. Кроме того, в ситуации, когда по некоторым компонентам вектора критериев нельзя гарантированно обеспечить ненулевые оценки, формула $\bigcup\limits_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu \setminus \{0\}$ в силу леммы 4 описывает слейтеровское множество в задаче на кратный минимакс вектора из остальных компонент.

В ряде случаев невыполнения (24) справедливо аналогичное условие регулярности, но только по ненулевым компонентам вектора критериев. А именно, обозначим через μ^i i-й орт и введем $J \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in I|\ \theta[\mu^i] > 0\}$. Очевидно, если раскрыть определения, то $\theta[\mu] = 0$ при всех $\mu \in M$, таких что $I(\mu) \setminus J \neq \emptyset$, и $\Psi = \{\mathbf{0}_{I\setminus J}\} \times \Psi_J$, где $\mathbf{0}_{I\setminus J}$ — вектор из нулевых компонент $i \in I \setminus J$,

$$\Psi_J \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w^1\in W^1} \bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \dots \bigcap_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi_J \geq 0|\ \psi_j \leq \varphi_j(u;w)\ \ \forall j \in J\}.$$

Здесь и далее для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^Q$ и любого индексного множества $I' \subseteq I$ символ $\xi_{I'}$ означает вектор, составленный из компонент ξ_i, $i \in I'$.

Утверждение 5. В сделанных обозначениях, если $J \neq \emptyset$, а для множества Ψ_J выполнено условие регулярности типа (24), т.е.

$$\overline{\bigcap_{w^1\in W^1} \bigcup_{u^1\in U^1(w^1)} \dots \bigcap_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T\in U^T(w^T)} \{\psi_J \geq 0|\ \psi_j \leq \varphi_j(u;w)\ \ \forall j \in J\}} = \Psi_J,$$

то рассматривая максимум по Слейтеру, будем иметь

$$\{\mathbf{0}_{I\setminus J}\} \times \operatorname{Max}\Psi_J = \bigcup_{\mu\in M} \theta[\mu]\mu \setminus \{0\}.$$

Доказательство. Применив утверждение 2 к задаче (1) с критерием Φ_J, получим, что левая часть равна

$$\bigcup_{\mu\in M:\ \mu_i=0\ \ \forall i\in I\setminus J} \theta[\mu]\mu.$$

Отсюда выводим требуемое равенство с учетом $\theta[\mu] = 0$ при $I(\mu) \not\subseteq J$.

В более сильных предположениях нетрудно доказать также аналог утверждения 3. Обозначим

$$\theta_J[\mu_J] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w^1\in W^1} \max_{u^1\in U^1(w^1)} \dots \min_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \max_{u^T\in U^T(w^T)} \min_{i\in I(\mu_J)} \mu_i^{-1}\varphi_i(u;w) = \theta[(\mu_J, \mathbf{0}_{I\setminus J})],$$

$$\mu_J \in M_J \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_J \geq 0|\ \sum_{j\in J} \mu_j = 1\},\ \ I(\mu_J) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in J|\ \mu_i \neq 0\}.$$

Утверждение 6. В сделанных обозначениях, если равномерно по всем w, $\mathbf{u^{T-1}}$, удовлетворяющим ограничениям задачи (1), выполнено

$$\overline{\bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi_J > 0 |\ \psi_J \le \Phi_J(u;w)\}} = \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi_J \ge 0 |\ \psi_J \le \Phi_J(u;w)\},$$

то функция $\theta_J[\cdot]$ непрерывна $\forall \mu_J \in M_J$ и

$$\{\mathbf{0}_{I\setminus J}\} \times \operatorname{Max} \Psi_J = \{\mathbf{0}_{I\setminus J}\} \times \bigcup_{\mu_J \in M_J} \theta_J[\mu_J]\mu_J. \tag{27}$$

Доказательство следует из утверждений 3,4, примененных к Ψ_J.

Таким образом, в условиях утверждения 6 можно пользоваться представлением (27) для аппроксимации множества $\{\mathbf{0}_{I\setminus J}\} \times \operatorname{Max} \Psi_J$. Последнее дает более адекватное, чем $\Phi^*_{\mathrm{C}} = \Psi$ (см. выше), описание решения задачи (1),(16) в отсутствие регулярности.

4. Реализации. В минимаксных задачах, в том числе, многокритериальных, кроме значения минимакса, представляют интерес и его реализации: гарантирующие стратегии оперирующей стороны и наихудшие для нее варианты неопределенного фактора — стратегии противника. В частности, для $T = 1$ (задача (1) совпадает с (6)) надо описать такое минимальное по включению множество $W' \subset W$, для которого

$$\operatorname*{Min}_{w \in W} \operatorname*{Max}_{u \in U(w)} \Phi(u;w) = \operatorname*{Min}_{w \in W'} \operatorname*{Max}_{u \in U(w)} \Phi(u;w). \tag{28}$$

Как правило, в многокритериальных постановках (в отличие от обычного минимакса) нет надежды на существование одного $w' \in W$, обеспечивающего $W' = \{w'\}$ в (28), и любое минимальное по включению множество W', удовлетворяющее (28), имеет смысл реализации Min. Однако в общем случае поиск требуемого множества является самостоятельной сложной проблемой, так что в [5] было построено несколько более широкое множество и указан случай, когда оно минимально. При этом использовалась та же параметризация с помощью обратной логической свертки (19). Примéним аналогичный подход для кратного векторного минимакса (1).

Обозначим через $u^t_*[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t})$ и $w^t_*[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}})$ произвольные реализации максимума и минимума в (20), соответственно, на t-м шаге, т.е. реализации

$$\theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u^t\in U^t(w^t)} \theta^{t+1}[\mu](\mathbf{u^t},\mathbf{w^t}) \quad \text{и}$$

$$\theta^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w^t\in W^t(u^{t-1})} \theta'^t[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}),$$

введенных перед леммой 5. И определим множества

$$U^t_*(\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mu\in M} u^t_*[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^t}), \quad W^t_*(\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mu\in M} w^t_*[\mu](\mathbf{u^{t-1}},\mathbf{w^{t-1}}), \tag{29}$$

$t=1,2,\ldots,T$. Указанные множества определены неоднозначно — зависят от выбранных реализаций, не обязательно единственных, но дальнейшее справедливо для любых вариантов выбора.

Из утверждения 2 следует, что в условиях этого утверждения выполнено

$$\Phi^* = \operatorname*{Min}_{w^1_*\in W^1_*} \operatorname*{Max}_{u^1_*\in U^1_*(w^1_*)} \ldots \operatorname*{Min}_{w^T_*\in W^T_*(\mathbf{u_*^{T-1}},\mathbf{w_*^{T-1}})} \operatorname*{Max}_{u^T_*\in U^T_*(\mathbf{u_*^{T-1}},\mathbf{w_*^{T}})} \Phi(u_*;w_*). \tag{30}$$

Таким образом, множества (29) предлагается рассматривать в качестве максимизирующих и минимизирующих стратегий в задаче (1).

Теперь заметим, что, хотя для справедливости формулы (21) предположение регулярности является существенным, формулы типа (29), (30) для реализаций векторного максимума [15], минимакса [5] и максиминимакса [18] получены без этого предположения. Чтобы избавиться от условия (24), выведем формулу (30), не пользуясь (21).

Утверждение 7. В задаче (1) верно (30) для любых наборов множеств (29), объединяющих по $\mu\in M$ произвольные реализации скалярных кратных минимаксов (20).

Доказательство. Фиксируем набор произвольных множеств (29) с $t = 1,2,\ldots,T$ и обозначим

$$\Psi_* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{w^1_*\in W^1_*} \bigcup_{u^1_*\in U^1_*(w^1_*)} \ldots \bigcap_{w^T_*\in W^T_*(\mathbf{u_*^{T-1}},\mathbf{w_*^{T-1}})} \bigcup_{u^T_*\in U^T_*(\mathbf{u_*^{T-1}},\mathbf{w_*^{T}})} \{\psi\geq 0|\ \psi\leq\Phi(u_*;w_*)\}. \tag{31}$$

Докажем равенство $\Psi_* = \Psi$, из которого будет следовать и $\operatorname{Max}\Psi_* = \operatorname{Max}\Psi$, и равенство (30) в силу определения (16), примененного к Φ, Φ^*. По лемме 6 для этого достаточно показать, что

$$\bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0,\theta[\mu]\mu_i\Big] = \Psi_*,$$

где $\theta[\mu]$ определяется (20). Однако лемму 6 можно записать и для Ψ_*, получим

$$\Psi_* = \bigcup_{\mu\in M}\bigotimes_{i=1}^{Q}\Big[0,\theta^*[\mu]\mu_i\Big],$$

где согласно (31)

$$\theta^*[\mu] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min_{w_*^1\in W_*^1}\ \max_{u_*^1\in U_*^1(w_*^1)} \ldots \min_{w_*^T\in W_*^T(\mathbf{u}_*^{\mathbf{T-1}},\mathbf{w}_*^{\mathbf{T-1}})}\ \max_{u_*^T\in U_*^T(\mathbf{u}_*^{\mathbf{T-1}},\mathbf{w}_*^{\mathbf{T}})}\ \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(u_*;w_*)\ \ \forall\mu\in M.$$

Но поскольку реализации каждого максимума и минимума в (20) содержатся в соответствующих множествах, по которым берутся максимумы и минимумы при определении $\theta^*[\mu]$, то $\theta^*[\mu] = \theta[\mu]\ \ \forall\mu\in M$, что и дает требуемое равенство.

Итак, экстремальные стратегии в задаче (1) следует искать среди реализаций кратного минимакса ОЛС (20) при различных значениях вектора $\mu\in M$ параметров свертки. Укажем, что при $T>1$ множество Ψ гарантированных оценок вектора критериев даже в линейных задачах может оказаться невыпуклым, поэтому нельзя пользоваться линейной сверткой для параметризации $\operatorname{Max}\Psi$ — значения (1), и также для поиска реализаций этого значения (в отличие от однократного минимакса [5]).

В сетевых задачах коэффициенты μ_i допускают содержательную интерпретацию как относительные требования пользователей на величину пропускаемого потока (i-го вида), а показатель $\theta[\mu]$ означает гарантированную обеспеченность в сети данного вектора μ требований. Так что параметрическое семейство задач типа (20) для постановки (4) дает полное описание возможностей синтеза сетевой системы с учетом живучести.

Список литературы

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983.

3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

4. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

5. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 4. С. 45–48.

6. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: УРСС, 1999.

7. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI. Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.3. С.124-134.

8. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

9. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

10. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Многокритериальные задачи принятия решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ РАН, 2000.

11. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. N.12. С. 1467-1477.

12. *Поспелова И.И.* Классификация задач векторной оптимизации с неопределенными факторами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2000. Т.40. N. . С. .

13. *Воробейчикова О.А.* Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1998.

14. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. Т.36. N.3. С.334–351.

15. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 3. С. 37–43.

16. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

17. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

18. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Векторный максиминимакс // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1999. N. 4. С. .

19. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1996.

20. *Смирнов М.М.* Метод обратной логической свертки в задачах векторной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 1996.

21. *Robinson, S.M.* Stability theory for systems of inequalities. Part I: Linear systems // SIAM J. of Numerical Analysis. 1975. V. 12. P. 754–769.

22. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.