УДК 519.85

Н.М. Новикова, И.И. Поспелова

Параметризация значения векторного максиминимакса с помощью обратной логической свертки [1]

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

1. Рассматривается задача поиска значения и реализации многокритериального максиминимакса

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(y)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y), \tag{1}$$

где $\Phi(z,w,y) = \Big(\varphi_1(z,w,y), \varphi_2(z,w,y), \ldots, \varphi_Q(z,w,y)\Big) \geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\varphi_i(z,w,y)$, $i=\overline{1,Q}$, будем предполагать непрерывными по совокупности аргументов, множества $Z(w)\subset \mathbf{R}^n$ — компактными $\forall w\in W(y)\ \forall y\in Y$, отображения $Z(\cdot)$, $W(\cdot)$ — непрерывными по Хаусдорфу на компактах $W(y)$, Y в евклидовом пространстве. Вектор $\Phi(z,w,y)$ называется вектором критериев или векторным критерием.

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в исследовании операций при моделировании сложных систем, качество функционирования которых не удается описать одним показателем [1, 2]. Наличие вектора критериев вно-

[1]Работа поддержана грантами по проектам: N.98-01-00233 РФФИ, N.96-15-96143 "Научные школы" и INTAS 97 – 1050.

сит элемент субъективной неопределенности при изучении системы, что обусловливает необходимость предоставления лицу, принимающему решения, всего множества оптимальных вариантов. В качестве такого множества используются *эффективные* (оптимальные по Парето) или *полуэффективные* (оптимальные по Слейтеру) значения вектора критериев. Эффективность означает неулучшаемость вектора ни по какой компоненте без ухудшения по какой-либо другой, а полуэффективность — существование хотя бы одной неулучшаемой компоненты.

Кроме того функционирование сложных систем, как правило, происходит в условиях объективной неопределенности — незнания ряда внешних факторов, влияющих тем не менее на качество функционирования. Чтобы получить в этих условиях объективные (наилучшие гарантированные) оценки качества, ставят максиминные или минимаксные задачи векторной оптимизации [3, 4, 5]. Множество, определяющее гарантированное значение соответствующего векторного минимакса, характеризует уязвимость или живучесть исследуемой системы.

Принятие управляющих решений в сложных системах в условиях неопределенности оказывается многоэтапным. Часть параметров приходится фиксировать a priori — до поступления информации о значениях неопределенных факторов, часть — *корректирующее управление* — удается выбрать после реализации неопределенности. Формальная запись возникающей задачи векторной оптимизации приводит к максиминимаксной постановке (1). Содержательно такая постановка отражает стремление к повышению живучести системы. Пример интерпретации задачи (1) в терминах многопродуктовых потоковых сетей приведен в [6].

В [6] для гарантированного значения (1) предложена формализация в виде $\Psi^* = \operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\}, \qquad (2)$$

где Max можно понимать в смысле Парето или Слейтера в зависимости от его трактовки в (1). Однако трудно использовать непосредственное определение (2) для построения множества Ψ^*.

Традиционно для описания множеств Парето и Слейтера применяется *метод сверток* (см., к примеру, в [1]), позволяющий задать их параметризацию. В задачах на векторный минимакс [5] наиболее удобной оказалась *обратная логическая* свертка (ОЛС), предложенная и изученная в [7, 8]. Эта свертка предполагает замену вектора $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_Q)$ (в задаче на максимум) параметрическим семейством скалярных критериев

$$\min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i, \quad \mu\in M, \tag{3}$$

где $M \stackrel{\rm def}{=} \{\mu\geq 0 |\ \sum\limits_{i=1}^{Q}\mu_i = 1\}$ – стандартный симплекс в $\mathbf{R}^Q$,

$$I(\mu) \stackrel{\rm def}{=} \{i=\overline{1,Q} |\ \mu_i\neq 0\}.$$

С помощью свертки (3) сведем многокритериальную постановку (1),(2) к параметрическому семейству задач поиска

$$\theta[\mu] \stackrel{\rm def}{=} \max_{y\in Y}\ \min_{w\in W(y)}\ \max_{z\in Z(w)}\ \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,y,w) \ \ \forall\mu\in M. \tag{4}$$

Реализации скалярных максиминимаксов, минимаксов и максимумов в (4) будем обозначать через $y^*[\mu]$, $w^*[\mu](y)$ и $z^*[\mu](y,w)$ соответственно. Введем также множества

$$Y^* \stackrel{\rm def}{=} \bigcup_{\mu\in M} y^*[\mu],\ \ W^*(y) \stackrel{\rm def}{=} \bigcup_{\mu\in M} w^*[\mu](y),\ \ Z^*(y,w) \stackrel{\rm def}{=} \bigcup_{\mu\in M} z^*[\mu](y,w).$$

Из результатов [7, 5, 6] следует, что эти множества являются реализациями векторного максиминимакса (1), т.е.

$$\Psi^* = \mathop{\rm Max}_{y^*\in Y^*}\ \mathop{\rm Min}_{w^*\in W^*(y^*)}\ \mathop{\rm Max}_{z^*\in Z^*(y^*,w^*)} \Phi(z^*,w^*,y^*),$$

или $\Psi^* = {\rm Max}\,\Psi[Y^*]$ в обозначениях

$$\Psi[Y'] \stackrel{\rm def}{=} \bigcup_{y\in Y'}\ \bigcap_{w\in W(y)}\ \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi\geq 0 |\ \psi\leq\Phi(z,w,y)\} \ \ \forall Y'\subseteq Y.$$

Покажем, что (в отличие от других сверток — линейной, логической, ...) для описания Ψ^* на базе ОЛС не обязательно вычислять решения y^*, w^*, z^*, а достаточно найти лишь значения $\theta[\mu]$, $\mu\in M$.

Введем множество

$$\Phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu, \qquad (5)$$

которое и будет служить цели параметризации гарантированного значения (1).

Лемма 1. Для слейтеровского значения Max в (2) $\Psi_{\text{С}}^* \supseteq \Phi^*$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\mu \in M$, имеем $\theta[\mu]\mu \in \Psi[Y]$ по определению ($\exists y \in Y\ \forall w \in W(y)\ \exists z \in Z(w)$: $\theta[\mu]\mu_i \leq \varphi_i(z,w,y)\ \forall i = \overline{1,Q}$). Пусть $\theta[\mu]\mu \notin \Psi_{\text{С}}^* = \operatorname{Max}\Psi[Y]$, т.е. $\exists \psi > \theta[\mu]\mu$: $\psi \in \Psi[Y]$. Последнее означает, что $\exists y \in Y$ $\forall w \in W(y)\ \exists z \in Z(w)$: $\psi_i \leq \varphi_i(z,w,y)\ \forall i = \overline{1,Q}$ и $\theta[\mu]\mu_i < \varphi_i(z,w,y)\ \forall i = \overline{1,Q}$, и $\theta[\mu] < \varphi_i(z,w,y)/\mu_i\ \forall i \in I(\mu)$, т.е.

$$\theta[\mu] < \min_{i \in I(\mu)} \varphi_i(z,w,y)/\mu_i.$$

Отсюда получаем противоречие $\theta[\mu] < \theta[\mu]$, доказывающее лемму.

Лемма 2. Для паретовского значения Max в (2) $\Psi_{\text{П}}^* \subseteq \Phi^*$.

Доказательство. Фиксируем произвольный вектор ψ из $\Psi_{\text{П}}^*$. Если $\psi = 0$, то очевидно $\Psi_{\text{П}}^* = \Psi[Y] = \{0\}$, и $\theta[\mu] = 0$ $\forall \mu \in M$ ибо $\forall y \in Y\ \exists w' \in W(y)$: $\forall z \in Z(w')\ \Phi(z,w',y) = 0$.

Пусть $\psi \neq 0$, тогда $I(\psi) \neq \emptyset$. Выберем вектор $\mu \in M$ таким, чтобы $\psi_i/\mu_i = \psi_j/\mu_j\ \forall i,j \in I(\psi)$, $I(\mu) = I(\psi)$. Имеем по определению $\psi \in \Psi[Y]\ \exists y \in Y\ \forall w \in W(y)\ \exists z \in Z(w)$:

$\psi_i \le \varphi_i(z,w,y)\ \forall i = \overline{1,Q}$ и $\psi_i/\mu_i \le \varphi_i(z,w,y)/\mu_i\ \forall i \in I(\mu)$, т.е.

$$\min_{i\in I(\mu)} \psi_i/\mu_i \le \min_{i\in I(\mu)} \varphi_i(z,w,y)/\mu_i$$

и по выбору μ

$$\psi_i/\mu_i \le \min_{i\in I(\mu)} \varphi_i(z,w,y)/\mu_i \quad \forall i \in I(\mu).$$

Отсюда $\psi_i/\mu_i \le \theta[\mu]\ \forall i \in I(\mu)$ и $\psi \le \theta[\mu]\mu$, что означает $\psi = \theta[\mu]\mu$ с учетом $\theta[\mu]\mu \in \Psi[Y]$ и максимальности ψ по Парето.

Утверждение 1. Пусть выполнено следующее условие регулярности, обобщающее на максиминимаксный случай условия регулярности из [5, 8]:

$$\overline{\bigcup_{y\in Y} \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi > 0 |\ \psi \le \Phi(z,w,y)\}} = \Psi[Y], \qquad (6)$$

черта сверху обозначает замыкание в $\mathbf{R}^Q$. Тогда для слейтеровского значения Max в (2) справедливо представление

$$\Psi^*_{\mathrm{C}} = \Phi^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\mu\in M} \theta[\mu]\mu.$$

Доказательство. По лемме 1 $\forall\mu \in M \quad \theta[\mu]\mu \in \Psi^*_{\mathrm{C}}$ (для такого включения условия регулярности не требуется). Докажем, что при условии (6) $\forall\psi \in \Psi^*_{\mathrm{C}}\ \exists\mu \in M$: $\psi = \theta[\mu]\mu$.

Фиксируем произвольный вектор $\psi \in \Psi^*_{\mathrm{C}}$. Имеем $\Psi^*_{\mathrm{C}} \not\ni 0$, поскольку левая часть (6) не пуста, а значит, $\exists\psi' > 0$:

$\psi' \in \Psi[Y]$. Следовательно $I(\psi) \neq \emptyset$. Зададим $\mu \in M$ так, как при доказательстве леммы 2. Тогда (из этого доказательства) $\psi_i/\mu_i \leq \theta[\mu]$ $\forall i \in I(\mu)$. С учетом определения μ возможны лишь два варианта: $\psi_i/\mu_i = \theta[\mu]$ $\forall i \in I(\mu)$ и $\psi_i/\mu_i < \theta[\mu]$ $\forall i \in I(\mu)$. В первом случае $\psi = \theta[\mu]\mu$. Рассмотрим второй вариант. Если $I(\mu) = \overline{1,Q}$, приходим к противоречию с $\psi \in \Psi^*$, так как $\theta[\mu]\mu \in \Psi[Y]$. Если $I(\mu) \neq \overline{1,Q}$, то по условию (6) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \psi' > 0$: $\psi' \in \Psi[Y]$ и $\|\psi' - \theta[\mu]\mu\| < \varepsilon$. Следовательно для достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим $\psi_i < \psi'_i$ $\forall i \in I(\mu) = I(\psi)$, но $\psi' > 0$, т.е. $\psi' > \psi$, что противоречит максимальности ψ. Поэтому второй вариант не возможен. Что и требовалось доказать.

2. Достаточным условием выполнения (6) является строгая положительность частных критериев φ_i $\forall i = \overline{1,Q}$. В случае вогнутости по z всех φ_i и выпуклости $Z(w)$ $\forall w \in W(y)$ $\forall y \in Y$ достаточным будет условие Слейтера $\exists \bar{z} \in Z(w)$: $\Phi(\bar{z}, w, y) > 0$. Тогда, если нарушается (6), то и это условие не выполняется, т.е.

$$\exists y \in Y, \;\; \exists w \in W(y): \;\; \forall z \in Z(w) \;\; \exists i: \;\; \varphi_i(z, w, y) = 0,$$

значит, для некоторого $y' \in Y$

$$0 = \min_{w \in W(y')} \max_{z \in Z(w)} \min_{i=\overline{1,Q}} \varphi_i(z, y', w) = \tag{7}$$

(в силу вогнутости по z)

$$= \min_{w\in W(y')} \min_{i=\overline{1,Q}} \max_{z\in Z(w)} \varphi_i(z,y',w) = \min_{i=\overline{1,Q}} \min_{w\in W(y')} \max_{z\in Z(w)} \varphi_i(z,y',w)$$

— любое гарантированное значение векторного критерия имеет хотя бы одну нулевую компоненту (не улучшаемую путем выбора корректирующего управления). К сожалению для задачи живучести (и особенно, сетевых систем — см. в [10]) подобная ситуация весьма характерна, поскольку нередко внешние факторы способны привести к невозможности увеличения одного из критериев (например, при нарушении связности сети). Так что исследуем случай (7) подробнее в сделанных предположениях о выпуклости/вогнутости.

Фиксируем y', для которого выполнено (7), и рассмотрим редуцированную задачу поиска

$$\operatorname*{Min}_{w\in W(y')} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y') \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w\in W(y')} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi\geq 0 |\ \psi\leq\Phi(z,w,y')\}.$$

Обозначим через $J(y')$ множество реализаций минимума по i в (7). Для y' из (7) любой достижимый вектор

$$\psi\in \bigcap_{w\in W(y')} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi\geq 0 |\ \psi\leq\Phi(z,w,y')\}$$

имеет $\psi_{i'} = 0 \ \ \forall i'\in J(y')$ и является слейтеровским по определению. Таким образом понятие слейтеровского решения в данном случае оказывается слишком широким (не позволяет выделить никакого множества), хотя с содержательной точки зрения потеря одного частного критерия не должна приводить к отказу от оптимизации по остальным критериям. Более адекватным задаче представляется переход в критериальное пространство меньшей размерности и выделение слейтеровского множества в этом пространстве в качестве решения. В [11] доказано, что именно такое решение параметризует обратная логическая свертка в случае (7), и предложено использовать его как определение значения векторного минимакса.

Для максиминимаксной постановки можно выразить значение (2) через решения внутренних задач на минимакс:

$$\Psi^* = \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \operatorname*{Min}_{w \in W(y)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, y),$$

а затем модифицировать слейтеровское значение векторного минимакса согласно [11]. Получим модифицированное значение векторного максиминимакса

$$\Psi'^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \left\{ \Big(\psi_j = 0 |\ j \in J(y) \Big) \right\} \otimes \Psi'(y), \tag{8}$$

где $J(y)$ полагаем пустым для y, не удовлетворяющих (7), а

$$\Psi'(y) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{w \in W(y)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Big(\varphi_i(z, w, y) |\ i \notin J(y) \Big).$$

Для последней задачи — с "укороченным" вектором критериев — уже будут выполнены условия регулярности (по

Слейтеру и из [5, 11]) в пространстве соответствующей размерности при всех $y \in Y$. Так что можем переписать (8) с учетом представления для $\Psi'(y)$, доказанного в [11],

$$\Psi'^* = \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \{\Big(\psi_i = 0 | \; i \in J(y)\Big)\} \otimes \bigcup_{\{\mu \in M | \; \mu_j = 0 \;\; \forall j \in J(y)\}} \theta'(y)[\mu] \Big(\mu_i | \; i \notin J\Big) =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{\{\mu \in M | \; \mu_j = 0 \;\; \forall j \in J(y)\}} \theta'(y)[\mu]\mu, \tag{9}$$

$$\theta'(y)[\mu] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w \in W(y)} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, y, w) \quad \forall \mu \in M.$$

Заметим, что $\theta'(y)[\mu] = 0 \; \forall \mu \in M$: $I(\mu) \cap J(y) \neq \emptyset$, а остальные μ входят в множество, по которому рассмотрено объединение в (9). Значит, взяв в (9) объединение по всем $\mu \in M$, опишем то же слейтеровское множество, но возможно дополненное нулевым вектором. Таким образом,

$$\Psi'^* \bigcup \{0\} = \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{\mu \in M} \theta'(y)[\mu]\mu = \operatorname{Max} \bigcup_{\mu \in M} \bigcup_{y \in Y} \theta'(y)[\mu]\mu \supseteq$$

$$\supseteq \operatorname{Max} \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu \supseteq \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu.$$

Последнее соотношение справедливо, так как по лемме 1 все точки Φ^* — слейтеровские. Получили дополняющее результат леммы 1 включение $\Phi^* \setminus \{0\} \subseteq \Psi'^*$.

Теперь подчеркнем, что условие (7) не является необходимым для отрицания (6), т.е. возможна ситуация $\Psi'^* = \Psi^*_{\mathrm{C}}$ (когда объединение по $y \in Y$ в определении Ψ'^* реализуется на тех y, для которых $J(y) = \emptyset$), но в общем случае $\Psi'^* \subseteq \Psi^*_{\mathrm{C}}$.

Тем не менее слейтеровское значение (8) все еще может оказаться слишком широким в том смысле, в каком это указывалось ранее (в отличие от модифицированного значения минимакса, где Max берется лишь для ненулевых компонент вектора критериев). Покажем, что множество (5) обладает лучшими свойствами.

Утверждение 2. Для любых векторов $\psi^1, \psi^2 \in \Phi^* \setminus \{0\}$, у которых $\psi_i^1 = \psi_i^2$ $\forall i \notin I(\psi^1)$, не возможно, чтобы

$$\Big(\psi_j^1 |\ j \in I(\psi^1)\Big) > \Big(\psi_j^2 |\ j \in I(\psi^1)\Big).$$

Доказательство проведем от противного. Пусть $\exists \mu^1, \mu^2 \in M$: $\mu_i^1 \theta[\mu^1] > \mu_i^2 \theta[\mu^2]$ $\forall i \in I(\mu^1)$, $I(\mu^2) \subseteq I(\mu^1)$, $\theta[\mu^2] > 0$. По лемме 1 $\mu^1 \theta[\mu^1] \in \Psi_{\mathrm{C}}^* \subseteq \Psi[Y]$, следовательно $\exists y \in Y$ $\forall w \in W(y)$ $\exists z \in Z(w)$: $\mu_i^1 \theta[\mu^1] \leq \varphi_i(z, w, y)$ $\forall i = \overline{1, Q}$ и $\theta[\mu^2] \mu_i^2 < \varphi_i(z, w, y)$ $\forall i \in I(\mu^1)$, и $\theta[\mu^2] < \varphi_i(z, w, y)/\mu_i^2$ $\forall i \in I(\mu^2)$, т.е.

$$\theta[\mu^2] < \min_{i \in I(\mu^2)} \varphi_i(z, w, y)/\mu_i^2.$$

Отсюда получаем противоречие $\theta[\mu^2] < \theta[\mu^2]$, доказывающее утверждение.

В заключение рассмотрим нерегулярный случай, для которого удается на основе содержательных соображений так модифицировать (сократить) слейтеровское значение (2), чтобы оно совпало с $\Phi^* \setminus \{0\}$. А именно, предположим, что в условиях (7) выполнено $J(y) = J$ $\forall y \in Y$, $J \neq \{\overline{1, Q}\}$, и обобщим на максиминимакс модификацию из [11]. Получим множество

$$\Psi''^{*} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\Big(\psi_j = 0|\ j \in J\Big)\}\otimes \operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Big(\varphi_i(z,w,y)|\ i \notin J\Big),$$

которым следует заменить Ψ^{*}_{C} в рассматриваемом случае. Очевидно $\Psi^{*}_{\mathrm{C}} \supseteq \Psi''^{*}$.

Утверждение 3. Пусть $\forall w \in W(y),\ \ \forall y \in Y\ \ Z(w)$выпуклы, а φ_i вогнуты по z на $Z(w)$ $\forall i = \overline{1,Q}$, и пусть $J(y) = J\ \forall y \in Y$, $J \neq \{\overline{1,Q}\}$. Тогда справедливо представление $\Psi''^{*} = \Phi^{*}\setminus\{0\}$.

Доказательство. Обозначим $\Phi_{-J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Big(\varphi_i(z,w,y)|\ i \notin J\Big)$, покажем, что для задачи (1) с критерием $\Phi = \Phi_{-J}$ выполнено условие регулярности (6). Действительно, в сделанных предположениях $\forall y \in Y\ \overline{\bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi > 0|\ \psi \le \Phi_{-J}(z,w,y)\}} =$

$$= \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0|\ \psi \le \Phi_{-J}(z,w,y)\},$$

откуда вытекает аналогичное равенство для объединения по $y \in Y$ (из свойств операции замыкания). Поэтому для рассматриваемой задачи применимо утверждение 1, т.е.

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi_{-J}(z,w,y) = \Phi^{*}_{-J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\{\mu\in M|\ \ \mu_j=0\ \ \forall j\in J\}} \theta[\mu]\Big(\mu_i|\ i \notin J\Big).$$

В результате

$$\Psi''^{*} = \{\Big(\psi_j = 0|\ j \in J\Big)\}\otimes \bigcup_{\{\mu\in M|\ \ \mu_j=0\ \ \forall j\in J\}} \theta[\mu]\Big(\mu_i|\ i \notin J\Big) = \Phi^{*}\setminus\{0\},$$

ибо $\theta[\mu] = 0\ \forall\mu$: $I(\mu) \cap J \neq \emptyset$. (Условие $J \neq \{\overline{1,Q}\}$ обеспечивает непустоту $\Phi^* \setminus \{0\}$.) Утверждение доказано.

Полученное равенство $\Psi''^* = \Phi^* \setminus \{0\}$ выполнено и для более общей постановки $J \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{y \in Y} J(y)$, если Φ_{-J} удовлетворяет (6). В противном случае можно утверждать включение $\Psi''^* \supseteq \Phi^* \setminus \{0\}$.

Таким образом, с учетом леммы 2 и утверждения 2 ясно, что есть смысл пользоваться параметризацией (5), базирующейся на обратной логической свертке, даже в случае невыполнения (6). При этом, когда $\Phi^* \neq \{0\}$, следует исключить нулевой вектор. Указанная параметризация позволяет, не теряя эффективных решений, избавиться от части полуэффективных точек, заведомо не информативных.

Замечание. В [4] было предложено определение векторного максимина, приводящее к определению векторного максиминимакса, отличному от (2). Для регулярного случая в [6] доказано совпадение обоих слейтеровских значений. В нерегулярном случае можно показать, что определение, соответствующее [4], дает слейтеровское множество, которое не у́же (а нередко и шире), чем Ψ^*_{C}. Это служит добавочным обоснованием выбора формулы $\Phi^* \setminus \{0\}$ вместо слейтеровского значения векторного максиминимакса, независимо от определения последнего.

Список литературы

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983.

3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

4. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

5. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 4. С. 45–48.

6. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Векторный максиминимакс // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1999. N. 4. С. .

7. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 3. С. 37–43.

8. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации множества Парето, основанные на обратной логической свертке, и их использование в сетевой оптимизации: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1996.

9. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Параметризация значения векторного минимакса со связанными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1997. Т.37. N.12. С. 1467-1477.

10. *Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: УРСС, 1999.

11. *Воробейчикова О.А.* Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1998.