УДК 519.85

Н.М. Новикова, И.И. Поспелова

Векторный максиминимакс[1]

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

1. Рассматривается задача определения значения и реализации многокритериального (векторного) максиминимакса

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(y)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y), \tag{1}$$

где $\Phi(z,w,y) = \{\varphi_1(z,w,y), \varphi_2(z,w,y), \ldots, \varphi_Q(z,w,y)\} \geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\varphi_i(z,w,y)$, $i = \overline{1,Q}$, будем предполагать непрерывными по совокупности аргументов, множества $Z(w) \subset \mathbf{R}^n$ — компактными $\forall w \in W(y)$ $\forall y \in Y$, отображения $Z(\cdot)$, $W(\cdot)$ — непрерывными по Хаусдорфу на компактах $W(y)$, Y в евклидовом пространстве. Вектор $\Phi(z,w,y)$ называется вектором критериев или векторным критерием.

Задачи такого типа возникают, в частности, при исследовании живучести сетевых систем и при синтезе многопродуктовых сетей по критерию живучести. Действительно, качество функционирования многопользовательской сетевой системы определяется вектором z одновременно пропускаемых

[1]Работа поддержана грантами по проектам: N.98-01-00233 РФФИ, N.96-15-96143 "Научные школы" и INTAS 97 – 1050.

по сети потоков заявок пользователей (тяготеющих пар, или видов продуктов). Поэтому для сети с заданным вектором y пропускной способности ребер ставится задача векторной максимизации z. При исследовании живучести сетевой системы учитывается, что исходный вектор y пропускной способности может изменяться за счет уменьшения его компонент. Тогда гарантированная оценка качества функционирования сети дается гарантированным значением [1] векторного минимакса

$$\operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} z. \tag{2}$$

Этот минимакс зависит от y, и в предположении, что $y \in Y$ выбирается с целью повышения живучести, приходим к задаче максимизации (2), т.е. к поиску

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} z. \tag{3}$$

Ограничения и целевая функция в (3) для сетевых систем линейны, а в общем случае получаем задачу (1). (В принципе возможна также зависимость Z от y, но мы для упрощения изложения ограничиваемся данной постановкой.)

Определению значения векторного максимума посвящено много работ (см. к примеру в [1, 2, 3]). Далее в качестве базового будем рассматривать наиболее широкое — *слейтеровское* — значение, т.е. множество точек из области достижимости, не улучшаемых по всем координатам сразу,

$$\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\psi \in \mathbf{R}^Q |\ \exists z' \in Z(w): \quad \psi = \Phi(z',w,y) \ \text{ и } \ \forall z \in Z(w) \ \ \exists i: \quad \psi_i \geq \varphi_i(z,w,y)\}. \tag{4}$$

Аналогично, для произвольного компакта X в евклидовом пространстве под $\operatorname{Max} X$ будем понимать множество максимальных элементов X в смысле отношения “>” среди векторов. Теперь значение (4) допускает эквивалентную запись в виде

$$\operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) = \operatorname{Max} \bigcup_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y). \tag{5}$$

(Другие способы задания векторного максимума приводят к некоторым подмножествам множеств (4),(5), например, *паретовское* значение соответствует множеству максимальных элементов в смысле отношения “≥” среди векторов.)

Понятие векторного минимакса (и в слейтеровском, и в паретовском вариантах) вводится неоднозначно. Так в [1] обсуждаются концепции гарантированного и защищаемого значений. Далее в работе будем следовать принципу гарантированности результата и определению из [4], согласно которому

$$\operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\}. \tag{6}$$

В рассматриваемом слейтеровском случае это определение (при некотором дополнительном предположении регулярности — см. в [6]) соответствует предложенному в [5],

$$\operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) = \overline{\operatorname{Min} \bigcup_{w\in W(y)} \operatorname{Max} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi > 0|\ \psi \le \Phi(z,w,y)\}}, \tag{7}$$

где черта сверху обозначает замыкание в $\mathbf{R}^Q$. Отметим, что для сетевых задач выполнено

$$\bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0|\ \psi \le \Phi(z,w,y)\} = \bigcup_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y), \tag{8}$$

и можно таким образом упростить формулы (6),(7).

Значение (1) — векторного максиминимакса — ранее не определялось.

Естественным подходом к формализации (1) представляется дальнейшее распространение определений (6),(7). Для этого нам формально требуется ввести понятие

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} X(y), \quad X(y) \subset \mathbf{R}^Q, \tag{9}$$

обобщающее (4) и (5). Неочевидность трактовки значения (9) объясняется тем, что неясно, как выбрать из различных множеств $X(y)$ максимальное, поскольку, если одно множество не принадлежит Парето-оболочке другого, то они несравнимы по отношению “$>$” (и “$\ge$”) среди векторов. Операция Max определена для множества, но не для набора множеств.

С содержательной точки зрения выбор y является нашим управлением, как и выбор конкретного $x \in X(y)$. Поэтому все множество альтернатив является объединением $X(y)$ по $y \in Y$. Стремление к выбору максимально возможного x приводит к задаче описания множества всех “наилучших” альтернатив для такого выбора, т.е. к формуле

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} X(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} X(y). \qquad (10)$$

По-видимому, подобная формула и лежит в основе (7). Далее будем под значением (9) понимать (10).

Пользуясь (10), получаем из (7) для (1) определение

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} \overline{\operatorname{Min} \bigcup_{w\in W(y)} \operatorname{Max} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi > 0 |\ \psi \le \Phi(z,w,y)\}}, \qquad (11)$$

а из (6) определение $\operatorname*{Max}_{y\in Y} \operatorname*{Min}_{w\in W(y)} \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} \operatorname{Max} \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0 |\ \psi \le \Phi(z,w,y)\} =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} \bigcap_{w\in W(y)} \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi \ge 0 |\ \psi \le \Phi(z,w,y)\}. \qquad (12)$$

Равенство (12) выполнено на основе простого соотношения

$$\operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} X(y) = \operatorname{Max} \bigcup_{y\in Y} \operatorname{Max} X(y),$$

в котором можно убедиться непосредственной проверкой. Отсюда, как следствие утверждения 6.4 из [6], получаем

Утверждение 1. Пусть $\forall y \in Y$

$$\overline{\bigcap_{w \in W(y)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi > 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\}} = \bigcap_{w \in W(y)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\}. \tag{13}$$

Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{w \in W(y)} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi \geq 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\} =$$

$$= \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \overline{\operatorname{Min} \bigcup_{w \in W(y)} \operatorname{Max} \bigcup_{z \in Z(w)} \{\psi > 0 |\ \psi \leq \Phi(z,w,y)\}}.$$

В общих предположениях будем пользоваться для (1) определением (12). Для задачи живучести (3) с учетом (8) можем записать

$$\operatorname*{Max}_{y \in Y} \operatorname*{Min}_{w \in W(y)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} z = \operatorname{Max} \bigcup_{y \in Y} \bigcap_{w \in W(y)} Z(w),$$

что соответствует предложенному в [7] определению значения (2).

2. Как правило, в многокритериальной оптимизации значение векторного максимума (минимума) не сводится к единственному вектору, т.е. множество максимальных (минимальных) элементов оказывается неодноточечным. Поэтому не удается ограничиться и единственной реализацией Max (Min). Для описания возникающих множеств традиционно применяется *метод сверток* (см., к примеру, в [2]), позволяющий задать их параметризацию. В задачах на векторный минимакс интересно найти такое множество $W' \subset W(y)$, для которого

$$\operatorname*{Min}_{w \in W(y)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, y) = \operatorname*{Min}_{w \in W'} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, y). \qquad (14)$$

Здесь также нет надежды выбрать одно $w' \in W$, чтобы $\{w'\} = W'$ в (14), и имеет смысл говорить о минимальном по включению множестве W' как о множестве наихудших для максимизирующей стороны стратегий противника — реализации Min в (6). Однако в общем случае поиск требуемого множества является самостоятельной сложной проблемой, так что в [4] было построено несколько более широкое множество и указан случай, когда оно минимально. При этом использовалась параметризация с помощью *обратной логической* свертки, предложенной в [8].

Обозначим

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 | \ \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\} - \text{ стандартный симплекс в } \mathbf{R}^Q,$$

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = \overline{1, Q} | \ \mu_i \neq 0\},$$

$$W^*(y) = \Big\{w^* = \arg \min_{w \in W(y)} \{\max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(z, y, w)\} | \ \mu \in M\Big\}. \qquad (15)$$

Тогда согласно утверждению 3 из [4] для $W' = W^*(y)$ выполнено (14). Аналогичный результат получен в [4] и для линейной свертки (в предположениях выпуклости), но в [6] доказано, что она дает, вообще говоря, более широкое множество W'. Поэтому далее ограничимся лишь обратной логической сверткой частных критериев, т.е. сверткой, определяемой внутренним минимумом в (15).

Опишем множество реализаций внешнего максимума в (1).

Утверждение 2. Для значения (1), определенного с помощью (12), справедливо равенство

$$\operatorname*{Max}_{y\in Y}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(y)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) = \operatorname*{Max}_{y\in Y^*}\ \operatorname*{Min}_{w\in W(y)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y) = \tag{16}$$

$$= \operatorname*{Max}_{y\in Y^*}\ \operatorname*{Min}_{w\in W^*(y)}\ \operatorname*{Max}_{z\in Z(w)} \Phi(z,w,y), \quad \text{где}$$

$$Y^* = \Big\{ y^*[\mu] = \arg\max_{y\in Y}\{ \min_{w\in W(y)}\ \max_{z\in Z(w)}\ \min_{i\in I(\mu)} \mu_i^{-1}\varphi_i(z,y,w)\} \,|\, \mu\in M\Big\}. \tag{17}$$

Доказательство. Для начала отметим, что в сделанных предположениях внешний максимум в (17) достигается. Обозначим его значение $\theta[\mu]$. Введем

$$\Psi[Y] \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{y\in Y}\ \bigcap_{w\in W(y)}\ \bigcup_{z\in Z(w)} \{\psi\ge 0 |\ \psi \le \Phi(z,w,y)\}. \tag{18}$$

и покажем, что $\Psi[Y]=\Psi[Y^*]$, откуда с учетом (12) будет следовать первое равенство в (16). Второе равенство вытекает из (14) для $W'=W^*(y)$.

Очевидно $\Psi[Y^*] \subseteq \Psi[Y]$. Докажем обратное включение.

Рассмотрим произвольный вектор $\psi \in \Psi[Y]$, пусть $\psi \neq 0$ (нулевой вектор принадлежит $\Psi[Y^*]$ по определению). Тогда из (18) имеем

$$\exists y' \in Y: \ \forall w' \in W(y') \ \exists z' \in Z(w'): \ \psi_i \leq \varphi_i(z', w', y') \ \forall i = \overline{1, Q}. \tag{19}$$

Выберем вектор $\mu \in M$ так, чтобы $\psi_i/\mu_i = \psi_j/\mu_j \ \forall i, j \in I(\psi)$ и $\mu_k = 0 \ \forall k \notin I(\psi)$. При этом $I(\psi) = I(\mu)$. Получим из (19), что $\psi_i/\mu_i \leq \varphi_i(z', w', y')/\mu_i \ \ \forall i \in I(\mu)$, а значит, и

$$\min_{i \in I(\mu)} \varphi_i(z', w', y')/\mu_i \geq \psi_{i'}/\mu_{i'}$$

для $i' \in I(\mu)$, реализующего минимум. Раскрывая (19) далее, можем записать, что

$$\max_{z \in Z(w')} \min_{i \in I(\mu)} \varphi_i(z, w', y')/\mu_i \geq \psi_{i'}/\mu_{i'} \quad \text{и}$$

$$\min_{w \in W(y')} \max_{z \in Z(w)} \min_{i \in I(\mu)} \varphi_i(z, w, y')/\mu_i \geq \psi_{i'}/\mu_{i'},$$

и $\theta[\mu] \geq \psi_{i'}/\mu_{i'} = \psi_i/\mu_i \ \forall i \in I(\mu)$, т.е. $\theta[\mu]\mu_i \geq \psi_i \ \forall i = \overline{1, Q}$. Таким образом произвольный вектор $\psi \in \Psi[Y]$ доминируется (по Парето) вектором $\theta[\mu]\mu$. Последний принадлежит $\Psi[Y^*]$, поскольку для $y^*[\mu] \in Y^*$ и w^*, z^*, реализующих соответствующие минимум и максимум в (17), выполнено

$$\theta[\mu] = \min_{i \in I(\mu)} \varphi_i(z^*, w^*, y^*[\mu])/\mu_i, \quad \text{т.е.}$$

$$\varphi_i(z^*, w^*, y^*[\mu])/\mu_i \geq \theta[\mu] \quad \forall i \in I(\mu) \quad \text{и}$$
$$\varphi_i(z^*, w^*, y^*[\mu]) \geq \theta[\mu]\mu_i \quad \forall i = \overline{1, Q}.$$

Тем самым получили, что произвольный вектор из $\Psi[Y]$ доминируется вектором из множества $\Psi[Y^*]$, которое по определению (18) содержит все свои доминируемые векторы из неотрицательного ортанта. В результате $\psi \in \Psi[Y^*]$.

Замечание. Из доказательства утверждения 2 нетрудно видеть, что для паретовского значения (16) справедливо включение

$$\operatorname*{Max}_{y \in Y} \operatorname*{Min}_{w \in W(y)} \operatorname*{Max}_{z \in Z(w)} \Phi(z, w, y) \subseteq \bigcup_{\mu \in M} \theta[\mu]\mu.$$

Для выполнения равенства в слейтеровском случае нужны дополнительные предположения регулярности задачи (см. (13) в условии утверждения 1).

Список литературы

1. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

4. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 4. С. 45–48.

5. *Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е.* Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. Тбилиси: Мецниереба, 1996.

6. *Воробейчикова О.А.* Векторный минимакс со связанными ограничениями: Автореф. дис.... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, ф.ВМиК, 1998.

7. *Воробейчикова О.А., Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М.* Анализ многопользовательских сетевых систем с учетом неопределенности. VI. Задача о допустимости при неслучайных потерях пропускной способности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. N.3.

8. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 3. С. 37–43.