РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

И.А. НАЗАРОВА

ВЕРШИННЫЙ ВАРИАНТ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА УЯЗВИМОСТИ МНОГОПРОДУКТОВОЙ СЕТИ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2010

УДК 519.85

Ответственный редактор
член-корр. РАН, доктор физ.-матем. наук
Ю.Н.Павловский

Рассмотрен вершинный вариант проблемы анализа уязвимости многопродуктовой сети с учетом возможности выхода из строя (полностью) одной или нескольких вершин. Критерием эффективности функционирования сети традиционно выбрана гарантированная оценка ущерба пользователей этой сети. Для анализа уязвимости предложен ряд формальных постановок в виде двухкритериальных лексикографических задач оптимизации. Выделены случаи, когда данные постановки полиномиально разрешимы и указаны соответствующие алгоритмы. В остальных случаях для построения решения предложено использовать свойства простых вершинных разрезов графа.

Ключевые слова: многопродуктовая сеть, уязвимость, гарантированная оценка ущерба пользователей, метод ветвей и границ, простой разрез.

Рецензенты: В.В. Лаврентьев,
Ю.Е. Малашенко

Научное издание

Введение

Под анализом уязвимости сетевой системы обычно понимают исследование определенных функциональных характеристик сети в зависимости от ухудшения показателей работоспособности ее элементов или при полном разрушении последних. При этом традиционно бо́льшее внимание уделяется изучению варианта задачи анализа уязвимости, предполагающему полное уничтожение или частичное понижение пропускной способности ребер сети [1-8]. В реальной жизни эта модель отражает случай повреждения линий, по которым передаются потоки, например это могут быть трубы газо-, водопроводов или кабели, соединяющие абонентов телефонной сети. Однако в связи с ростом разветвленности реальных сетевых систем и развитием мобильных средств связи и Интернета, не менее актуальной представляется проблема анализа уязвимости в случае повреждения (полностью или частично) узлов (вершин) сети. Такие разрушения в жизни будут соответствовать выходу из строя насосных станций, АТС или ретрансляторов на линиях связи, а также серверов и маршрутизаторов в сети Интернет.

Данная работа ориентирована на изучение потоковой задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети (МП-сети). В такой сети предполагается наличие нескольких невзаимозаменяемых "видов" продуктов, которые не могут перемешиваться или перераспределяться между другими пользователями (например телефонная сеть).

Пусть в результате неслучайного разрушающего воздействия происходит выход из строя (полностью) одной или нескольких, заранее неизвестно каких вершин (узлов) МП-сети, так, что передача потока для хотя бы одного вида продукта становится невозможной. Требуется оценить потери, которые несут разделенные пользователи МП-сети, а именно - количество требований на передачу потоков, которые не выполняются вследствие разрушения системы. Таким образом, рассматриваемая далее проблема является вершинным вариантом аналогичной задачи анализа уязвимости МП-сети [9-11].

Многие классические сетевые и теоретико-графовые проблемы ставятся и исследуются как для реберного, так и для вершинного вариантов, при этом алгоритмы, разработанные для одного случая, могут достаточно эффективно применяться для изучения другого. Однако прямое использование алгоритмов, успешно решающих реберный вариант, для изучения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети оказывается малорезультативным из-за жесткие постановки последней. Поэтому для исследования частных случаев задачи предлагается воспользоваться методами, которыми решаются вершинные варианты близких по смыслу задач, в остальных случаях — применить подходы, разработанные непосредственно для изучения этой задачи и позволяющие в полной мере учитывать ее специфику.

Настоящая работа, хотя и может читаться самостоятельно, является продолжением работы [10], в которой было введено понятие несократимого реберного разреза и исследовались возможности использования его свойств для решения задачи анализа уязвимости МП-сети. В данной работе методология несократимых разрезов распространена на вершинные разрезы и применяется для решения вершинного варианта задачи.

Автор считает своим долгом поблагодарить Н.М. Новикову за все замечания и пожелания, высказанные в процессе работы над рукописью и позволившие более полно раскрыть особенности рассматриваемой задачи.

§1. Основные предположения и формулировки

Пусть многопродуктовая сеть $D^f = \langle G^f, M^f \rangle$ задается физическим графом сети $G^f = \langle N^f, A^f \rangle$ (неориентированным, связным, без петель), где $N^f = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ — множество вершин (узлов), $A^f = \{r_1, r_2, ..., r_a\} \subset N^f \times N^f$ — множество ребер, соединяющих вершины; и набором $M^f = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ тяготеющих пар (видов продуктов) — вершин (v_{s_i}, v_{t_i}) графа G^f, называемых источником и стоком для пары p_i, $i = \overline{1, m}$. Пару (v_{s_i}, v_{t_i}) также будем называть терминальной для i-го вида продукта. Вершины $N^f \times N^f \backslash M^f$ являются транзитными. Для каждой тяготеющей пары p_i задана величина $d_i > 0$, имеющая смысл заявки на поток, либо требования i-й пары, $p_i \in M^f$.

Считается, что для каждой вершины графа G^f задан вес, определяющий целочисленные значения $y_k \in \mathbf{Z}_+$ пропускной способности вершины v_k $(k = \overline{1, n})$. Вектор $y = \{y_k | k = \overline{1, n}\}$ ограничивает распределение потока между тяготеющими парами по вершинам сети, при этом предполагается, что ограничения на пропускную способность ребер не существует. Пусть все заявки на поток в неповрежденной сети удовлетворяются, потери потока при передаче не происходит, сеть является неизбыточной, т.е. пропускная способность любой вершины соответствует проходящему через нее потоку, и резерв пропускной способности в сети отсутствует.

Для МП-сети удобно также ввести неориентированный граф тяготений $G^p = \langle N^p, M^f \rangle$, где $N^p = \{v \in N^f | \ \exists\, p_i \in M^f : v = v_{s_i}$ или $v = v_{t_i}\}$ — подмножество вершин G^f, являющихся источником или стоком для какой-либо пары p_i, $i = \overline{1, m}$. Граф G^p может состоять из $j \leq m$ компонент связности, в отличие от графа G^f, который предполагается связным.

Пусть сеть подвергается разрушающему воздействию, которое приводит к полному уничтожению одного или нескольких (заранее неизвестно каких) узлов сети D^f. Так как передать поток по ребрам, инцидентным разбитой вершине, оказывается невозможно, то далее будем полагать, что все такие ребра после нанесения удара в сети не функционируют. Кроме этого пусть разрушению могут быть подвержены не только транзитные узлы, но и терминальные вершины. При этом множество тяготеющих пар предполагается неизменным, а требование на поток для пары, у которой уничтожен один из терминалов, считается неудовлетворенным.

Обозначим через $C(w)$ множество узлов сети, разбитых ударом w, тогда $N^f \backslash C(w)$ — множество вершин, оставшихся в графе G^f неповрежденными. Вследствие воздействия на граф G^f происходит изменение вектора пропускной способности y, задающего ограничения на распределение потоков в сети в зависимости от удара w, поэтому далее этот вектор будем обозначать $y(w) = \{y_k(w) |\ k = \overline{1,a}\}$. Для вершины $v_j \in C(w)$, положим $y_j(w) = 0$, и $y_j(w) = y_j$ для $v_j \notin C(w)$.

Введем понятие мощности (силы) удара как суммы выбитой пропускной способности вершин и обозначим ее $U(w)$. Заметим еще раз, что удар наносится по вершинам сети, но так как передать поток по инцидентным этой вершине ребрам оказывается невозможно, то они также считаются вышедшими из строя. Стоимость разрушения любого такого ребра положим равной нулю. Тогда $U(w) = \sum\limits_{v_j \in C(w)} y_j$. Далее будем считать, что мощность удара ограничена величиной W_0, $\quad U(w) \leq W_0$.

Если пропускные способности всех вершин равны или неизвестны, что соответствует $y_k = 1, k = \overline{1,n}$, то мощность удара можно интерпретировать в терминах числа выбитых вершин. Такое ограничение обозначим l_0. Далее рассмотрим два вида пропускной способности — единичную и исходную y_k. При переходе к единичной пропускной способности требование неизбыточности естественно опускается, т.е. неизбыточность сети будет предполагаться только для исходного вектора y.

Предложенная модель описывает повреждение сетевой системы, например, телефонной сети, при котором полному разрушению подвергаются телефонные станции и ретрансляторы, осуществляющие коммутирование ее пользователей, причем суммарная пропускная способность вышедших из строя узлов связи ограничена.

Предположим, что пользователи сетевой системы хотели бы до ее разрушения оценить максимальный ущерб, который они понесут в самой неблагоприятной ситуации. Ущербом будем считать суммарное количество неудовлетворенных заявок разъединенных пользователей поврежденной сети. Под силами, способными разрушить структуру сети, будем подразумевать возможные крупные аварии, техногенные катастрофы или целенаправленные разрушающие воздействия, т.е. допустим, что потеря пропускной способности неслучайна, но распределение удара по вершинам неизвестно.

Следуя общей методологии исследования операций, для решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети будем ориентироваться на принцип гарантированного результата, т.е. учитывать всю доступную информацию и рассчитывать на худший случай в рамках имеющейся неопределенности. Тогда анализ уязвимости означает получение гарантированных оценок ущерба пользователей при неточно известных заранее внешних воздействиях, и предполагает поиск вершин МП-сети, полное уничтожение которых приводит к максимальному ущербу пользователей.

Для решения задачи предлагается использовать теоретико-игровую модель "оборона против нападения"[12]. Для получения гарантированной оценки возможного ущерба рассмотрим формальную постановку за нападающего в виде следующей лексикографической задачи оптимизации.

Постановка будет содержать два критерия. Первый требует разделения хотя бы одной тяготеющей пары. Второй — отвечает за максимизацию пользовательского ущерба.

Постановка 1. Найти удар w^* мощности не более W_0, разрушающий множество вершин $C(w^*)$, так, что разъединена хотя бы одна тяготеющая пара, и сумма требований для разделенных пар — максимальна.

Постановка $1'$. Найти удар, разрушающий множество $C(w^*)$ из не более l_0 вершин сети, при котором разъединяется максимальное число тяготеющих пар.

Постановки $1, 1'$ отвечают параметрическому подходу к определению мощности удара, которая используется как ограничение. Считается, что нападающий не пытается уменьшить свои затраты, а старается нанести максимальный ущерб, используя свои ресурсы разумно. Это соответствует трактовке атакующего как неопределенности и принципу гарантированного результата. Возможна другая игровая ситуация, в которой нападающий стремится разделить хотя бы одну тяготеющую пару с минимальными затратами. Тогда силу удара можно использовать как второй критерий.

Постановка 2. Найти удар w^* минимальной мощности $U(w^*)$, разъединяющий хотя бы одну тяготеющую пару.

Постановка $2'$. Найти удар w^*, выбивающий минимальное число l^* вершин, при удалении которых из сети была бы разъединена хотя бы одна тяготеющая пара.

Будем исследовать задачу в предположении, что мощности удара достаточно для разделения хотя бы одной тяготеющей пары. Однако следует иметь в виду, что задача может не иметь решения вследствие недостатка ресурсов у нападающего. Заметим также, что если пропускную способность всех вершин сети и требования для всех тяготеющих пар положить равными единице, то постановки 1, 2 смыкаются соответственно с постановками $1', 2'$. Однако мы выносим отдельно рассмотрение постановок $1', 2'$, так как они содержательно соответствуют отсутствию у атакующего информации о пропускной способности вершин и требованиях в сети.

Предполагается, что нападающий использует имеющиеся ресурсы эффективно, т.е. из двух ударов, разделяющих один и тот же набор тяготеющих пар, предпочтительнее тот, который требует меньших затрат.

§2. Исследование связи между решениями вершинного и реберного варианта задачи

Прежде чем непосредственно перейти к решению задачи анализа уязвимости МП-сети для случая повреждения вершин, заметим, что многие классические сетевые и теоретико-графовые проблемы, такие как поиск минимального доминирующего множества, построение минимального и максимального разрезов, задачи о покрытии, о k-разрезе и другие [13-15], ставятся и успешно исследуются как для реберного, так и для вершинного вариантов. При этом методы, разработанные для одного случая, могут достаточно эффективно применяться для изучения другого. Исследуем, насколько результативным при решении поставленной задачи будет использование алгоритмов и методов, имеющихся для реберного варианта. Для этого рассмотрим одновременно реберный и вершинный варианты задачи для одной и той же сети, предположив, что нам известна ее структура, требования на поток, а так же в первом случае — пропускная способность ребер, во втором — пропускная способность вершин; и проанализируем, как при равной силе удара оптимальные решения связаны между собой.

Рассмотрим сеть с рис. 1 (пример 1). Она представляет собой ромб. В кружках на рисунке — номера вершин, рядом с ребрами — их номера, потоки между тяготеющими парами обозначены пунктирными линиями. Пусть пропускная способность первого ребра равна единице, для остальных предположим, что она равна двум. Требования на потоки для пар (1,3) и (2,3) положим равными единице, для остальных — двум. Пропускная способность первой вершины согласно требованию неизбыточности сети равна трем, для остальных — соответственно 2, 4, 4.

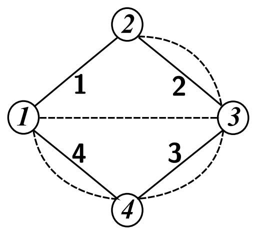

Рис. 1

Положим $W_0 = 2$, тогда реберный вариант задачи решения не имеет. В вершинном варианте решением является удаление вершины 2, ее пропускная способность — два, ущерб равен 1.

Теперь рассмотрим сеть с рис. 2 (пример 2). Она представляет собой кольцо, тяготеющие пары располагаются по его периметру, при этом каждая вершина является источником для одного и стоком для другого вида продукта. Пусть пропускная способность ребер чередуется, для четных номеров положим ее равной трем, для нечетных — единице. Пропускная способность каждой вершины равна 4. Будем считать, что величина заявки на поток также чередуется, для тяготеющей пары (1,2) она равна единице, для (2,3) — трем, для (3,4) — снова единице, и т.д. Пусть $W_0 = 3$. Тогда вершинный вариант задачи решения не имеет, а в реберном варианте решением является разрез, состоящий из ребер с пропускной способностью единица. Ущерб от удаления такого разреза равен 3.

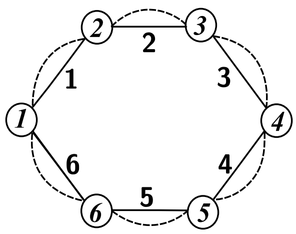

Рис. 2

На рис. 3 изображена сеть, состоящая из нескольких вершин, соединенных ребрами - мостами (пример 3). Каждая вершина является либо источником, либо стоком некоторого вида продукта. Пусть пропускные способности ребер равны соответственно 7, 7, 10, 5, 5, а вершин - 7, 7, 17, 15, 5, 5. Поток между парой вершин (1,2) равен 7, между (3,4) — 10, между (5,6) — 5. Пусть $W_0 = 10$. Тогда решением задачи в реберном варианте является ребро-мост номер 3 с пропускной способностью 10, ущерб от его удаления также равен 10. Оптимальным решением задачи в вершинном варианте является либо разрушение вершины с номером 1, либо с номером 2. При этом мощность удара равна 7, ущерб равен 7.

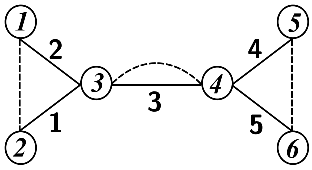

Рис. 3

Теперь предположим, что пропускная способность любой вершины и любого ребра в рассмотренных примерах равны единице, требования на поток для каждой тяготеющей пары также будем считать единичными. Для удобства пример для сети с рис. 1 с единичными значениями обозначим 1', для сетей с рис. 2, 3, соответственно, 2', 3'.

Пусть для примера 1' $l_0 = 1$. Как и для примера 1, в реберном варианте решения не существует. Для вершинного варианта оптимальным решением является удаление узла 3, ущерб равен 3. Если увеличить значение l_0 до двух, то оптимальным решением для реберного варианта является удаление ребер 2 и 3, ущерб равен 3, а для вершинного — разрушение вершины 3 и любой из вершин 1 или 4, ущерб равен 4.

Для примера 2' при $l_0 = 1$, в вершинном варианте оптимальным будет удаление одной (любой) вершины, ущерб равен 2, в реберном варианте — нет решения. При $l_0 = 2$, оптимальное решение для обоих вариантов — удаление соответственно любых двух ребер или вершин. Однако ущерб, нанесенный при удалении вершин, оказывается вдвое больше.

Рассмотрим 3'. Положим $l_0 = 1$. Поскольку в графе с рис. 3 каждое ребро является мостом, а каждая вершина - точкой сочленения или висячей вершиной, то ущерб пользователям наносит разрушение любой вершины или ребра. При этом ущерб, причиненный удалением ребра 3, вдвое меньше ущерба от разрушения любой из вершин 3,4. Увеличение мощности удара до двух имеющейся картины не меняет. Удаление вершин по-прежнему наносит больший ущерб, чем удаление ребер.

Приведенные примеры позволяют сделать следующие выводы. С одной стороны требование неизбыточности сети и наличие в ней потоков, транзитом проходящих через терминальные вершины, приводит к тому, что мощность удара, необходимая для разрушения вершины и инцидентных ей ребер, оказывается различной. Поэтому в общем случае при решении задачи использовать эквивалентность удаления из сети вершины и инцидентных ей ребер без риска потерять оптимальное решение не удается. С другой стороны, поскольку ресурсы нападающего ограничены, а мощность, необходимая для разрушения вершины и инцидентных ей ребер, различается, то оптимальные решения задачи анализа уязвимости МП-сети для случаев разрушения ребер и уничтожения вершин оказываются никак не связаны между собой, а в некоторых случаях одно из них может и вовсе отсутствовать, в то время, как другое — существует. Следовательно, достаточно трудоемкое построение оптимального решения для реберного варианта, может никак не приблизить нас к решению поставленной задачи.

Исследуем возможности применения методов из [9-11] в случае перехода от имеющегося физического графа сети к реберному графу [16]. Реберным графом $L(G^f)$ для заданного графа G^f называется граф, у которого вершинами являются ребра графа G^f, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра смежны в G^f [17]. Для того, чтобы при переходе от G^f к $L(G^f)$ были учтены имеющиеся требования и потоки в сети, проведем следующие дополнительные построения. Каждой вершине v_i, являющейся источником или стоком некоторого вида продукта, добавим вершину v_i' и ребро (v_i, v_i'). Тогда при переходе к реберному графу новое ребро перейдет в вершину, которую далее будем считать соответственно источником или стоком этого продукта.

Для иллюстрации рассмотрим построение реберного графа для примера 1'. На рис. 4 изображен физический граф сети с добавленными вершинами и ребрами, а на рис. 5 — соответствующий реберный граф. Для исходного графа все пропускные способности и требования на поток были равны единице, поэтому в реберном графе их также естественно положить равными единице. Мощность наносимого удара для новой сети оставим прежней, т.е. пусть $W_0 = 1$.

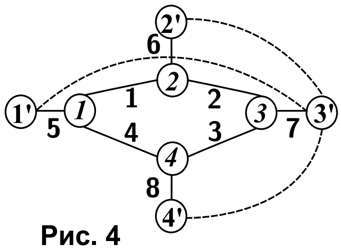

Рис. 4

Нетрудно заметить, что при данных условиях в случае реберного графа $L(G^f)$ задача решения не имеет, хотя для исходного графа G^f в вершинном варианте оно существовало. Очевидно, что к потере решения привело появление дополнительных ребер (в новом графе их больше, чем было вершин в исходном). Таким образом даже для единичного случая при данном ограничении на мощность удара имеющиеся оптимальные

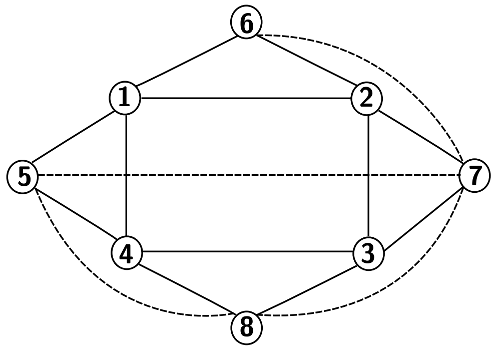

Рис. 5

решения для графа G^f с помощью $L(G^f)$ построить не удается. Увеличение мощности наносимого удара в данной ситуации кажется нелогичным, так как не ясно, уменьшится ли она при обратном переходе от реберного графа к исходному.

Таким образом, методы исследования, которые использовались для поиска решения задачи в реберном случае, часто оказываются неэффективны для вершинного варианта, поэтому далее при исследовании уязвимости МП-сети воспользуемся методами решения вершинных вариантов близких по смыслу задач, а также новыми алгоритмами, позволяющими в полной мере учитывать ее специфику.

§3. О структуре решения

В данной работе основное внимание уделяется поиску множества вершин C графа G^f, удаление которых из сети приводит к невозможности передачи потока между одной или несколькими тяготеющими парами. Рассмотрим подробно, какие вершины могут принадлежать множеству C.

Определение 1. Точкой сочленения называют вершину графа, при удалении которой вместе со всеми инцидентными ей рёбрами количество компонент связности в графе возрастает.

Определение 2. Вершинным разрезом называют множество вершин, удаление которых увеличивает число компонент связности графа.

Если терминальные вершины хотя бы одной тяготеющей пары оказались в разных связных компонентах после удаления некоторого разреза, то вершины этого разреза входят в C.

Если для какого-либо вида продукта разрушена вершина-источник (или сток), то передать поток также невозможно. В этом случае число связных компонент графа G^f не увеличивается, если только рассматриваемая вершина — не точка сочленения в G^f. Следовательно, в общем случае вершина-источник (сток) входит в C, хотя разрезом не является.

При решении реберного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети сложностей с определением структуры решения не возникало, поэтому поиск соответствующего реберного разреза был вполне естественным и логичным. Подобного результата хотелось бы добиться и при изучении вершинного варианта задачи. Существует два подхода к разрешению проблемы.

I. В п.1 мы предположили, что все ребра, инцидентные разбитой вершине, после нанесения удара в сети не функционируют, при этом стоимость разрушения любого ребра равна нулю. Тогда под разрушением вершины v можно понимать одновременное удаление из сети всех инцидентных ей ребер, а необходимую для этого мощность удара положить равной пропускной способности вершины $v \in G^f$. Таким образом, под разрушением вершин из C можно понимать удаление всех инцидентных ребер для всех вершин, входящих в C.

II. Модифицируем физический граф G^f сети следующим образом. Каждой вершине v_{q_i}, где q_i может равняться s_i или t_i, в зависимости от того, является ли данная вершина источником или стоком i-го вида продукта, добавим новую вершину v'_{q_i} и новое ребро $r = (v'_{q_i}, v_{q_i})$, их соединяющее. Вершину v'_{q_i} будем считать новым источником (стоком) для этой тяготеющей пары, а v_{q_i} — транзитной. Пропускную способность v_{q_i} оставим прежней, а пропускную способность v'_{q_i}, чтобы мощности для ее разрушения не хватало, ограничивать не будем. Полученный граф обозначим $G = \langle N, A \rangle$, где $N = N^f \bigcup N^s$, $N^s = \{v'_{s_1}, v'_{t_1}, ...v'_{s_m}, v'_{t_m}\}, A = A^f \bigcup A^s, A^s = \{r \mid r = (v'_{q_i}, v_{q_i}),$ $q_i = s_i$ или $q_i = t_i, i = \overline{1, m}\}$.

Смысл данных построений состоит в том, что мы, расширяя имеющийся граф G^f вершинами логического графа, как бы выносим источники и стоки за физический граф сети.

Граф G обладает следующими свойствами.
1). Все вершины G делятся на два непересекающихся множества N^f и N^s, где N^f — множество транзитных вершин, из которых состоит любой разрез G, N^f индуцирует граф G^f; N^s — множество терминальных вершин.
2). Разрушение вершины v_{q_i} делает невозможной передачу i-го вида продукта по сети, а расширенный граф G распадается на две связные компоненты — вершину v'_{q_i} и оставшийся подграф, т.е. v_{q_i} становится точкой сочленения графа G, следовательно, его вершинным разрезом.
3). Вершинные разрезы графа G^f также являются разрезами и для G, сохраняя состав и пропускную способность, однако удаление этих разрезов из G может разбить его на большее число связных компонент.

Свойства графа G позволяют нам искать решение задачи анализа уязвимости МП-сети в виде вершинного разреза.

Утверждение 1. Если разрушение вершины в графе G^f понимать как одновременное удаление из G^f всех инцидентных ей ребер, то любой вершинный разрез C, разделяющий хотя бы одну тяготеющую пару в графе G, может быть получен как реберный в G^f.

Доказательство. Выберем любой вершинный разрез C, разделяющий хотя бы одну тяготеющую пару в G. Пусть, не ограничивая общности, C делит G на две связные компоненты. Тогда в графе $G \backslash C$ нет пути, соединяющего источник и сток разделенной пары. Обозначим эту пару (v'_{s_i}, v'_{t_i}) и зафиксируем соответствующий путь $P = (v'_{s_i}, v_{s_i}, v_j, ..., v_m, v_{t_i}, v'_{t_i})$, соединяющий ее источник и сток в G. Так как C разделяет v'_{s_i}, v'_{t_i}, на пути P найдется вершина $v \in C$.

По определению разрез C состоит только из транзитных вершин графа G, т.е. если $v \in C$, то $v \in N^f$. Граф G^f индуцирован N^f, $G^f = \langle N^f, A^f \rangle$, поэтому $v \in G^f$. Следуя условию утверждения, под реберным разрезом R будем понимать все ребра G^f, инцидентные всем вершинам $v \in C$, т.е. $R = \{r \mid r \in A^f, r = (v, v_b), v \in C, v_b \notin C\}$.

Предположим, что R разрезом не является. Удалим R из G^f. Тогда подграф $G^f \backslash R$ — связен, и в нем для любой пары вершин существует соединяющий их путь. Это верно и для зафиксированных вершин v_{s_i}, v_{t_i} из G^f.

Если v_{s_i}, v_{t_i} являются соседними, то в G^f существует ребро (v_{s_i}, v_{t_i}). Кроме того, между v_{s_i}, v_{t_i} в G^f может существовать некоторый путь P', связывающий их помимо ребра (v_{s_i}, v_{t_i}).

Рассмотрим первый случай. Пусть в $G^f \backslash R$ сохранилось ребро (v_{s_i}, v_{t_i}). Если v_{s_i}, v_{t_i} являются соседними, то в C может входить любая из этих вершин. Пусть для определенности $v = v_{s_i}$ и $v \in C$, но тогда в $G^f \backslash R$ сохранилось ребро (v, v_{t_i}), т.е. из G^f были удалены не все ребра, инцидентные $v \in C$. Это противоречит описанию разреза R в условии утверждения.

Рассмотрим второй случай. Не ограничивая общности, в качестве P' рассмотрим часть пути P без вершин v'_{s_i}, v'_{t_i}, т.е. пусть $P' \subset P$. Тогда на пути P' существует вершина $v \in C$, и сохранились ребра (v_k, v), (v, v_l). Таким образом, в $G^f \backslash R$ нашлась вершина $v \in C$, у которой не удалены инцидентные ребра. Это также противоречит описанию R в условии.

Если v_{s_i}, v_{t_i} соседними не являются, то между ними в $G^f \backslash R$ существует связывающий их путь P'. Здесь также в качестве P' рассмотрим часть пути P без вершин v'_{s_i}, v'_{t_i}, для доказательства утверждения повторим изложенное выше. Если путей, связывающих v_{s_i}, v_{t_i}, оказалось несколько, то доказательство повторим необходимое число раз.

Таким образом предположение о том, что определенное в утверждении множество R для G^f разрезом не является, оказалось ошибочным, а вершинный разрез C из G, разделяющий хотя бы одну тяготеющую пару в G, получен нами как разделяющий те же тяготеющие пары реберный R в G^f.

Если разрез C делит граф G более чем на две связные компоненты, то приведенное доказательство нужно повторить для каждой пары компонент. Утверждение полностью доказано.

Таким образом, предложенные подходы оказались эквивалентны. Однако далее, чтобы не нарушать целостности изучения проблемы, для анализа уязвимости МП-сети воспользуемся графом G, и будем искать решение поставленной задачи в виде вершинного разреза. А именно, будем исследовать уязвимость МП-сети $D = \langle G, M \rangle$, где $M = \{p_1, ..., p_m\}$ – множество тяготеющий пар – вершин (v'_{s_i}, v'_{t_i}) графа G, соответственно сохраняющих те же требования на поток, что и в сети D^f.

§4. Исследование задачи анализа уязвимости МП-сети с помощью потоковых методов

Исследуем задачу анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1', 2, 2'$ в предположении, что ограничение мощности наносимого удара не существенно, т.е. допустим, что у атакующего достаточно ресурсов для разрушения любого разреза сети.

Определение 3. Пропускной способностью вершинного разреза C называется сумма пропускных способностей вершин, входящих в этот разрез. Величину пропускной способности произвольного вершинного разреза C обозначим через $Y(C)$,

$$Y(C) = \sum_{v_k \in C} y_k.$$

Если все вершины графа имеют единичную пропускную способность, то пропускная способность разреза равна числу входящих в него вершин.

Определение 4. Разрезом для тяготеющей пары называется множество вершин таких, что их удаление из сети разрушает все пути соединения для этой тяготеющей пары.

Определение 5. Минимальным вершинным разрезом для тяготеющей пары называется разрез с наименьшей пропускной способностью из разделяющих источник и сток данной тяготеющей пары.

Определение 6. Минимальным вершинным сетевым разрезом будем называть наименьший по всем тяготеющим парам из минимальных вершинных разрезов тяготеющих пар.

Оптимальным решением задачи уязвимости МП-сети в постановках $2, 2'$ является минимальный вершинный сетевой разрез. Решение может быть найдено следующим образом. Для каждой тяготеющей пары вершин с помощью полиномиального потокового алгоритма, например, Форда-Фалкерсона [18], определим минимальный вершинный разрез для ее разделения, затем среди всех построенных разрезов выберем минимальный вершинный сетевой. Алгоритмы, позволяющие строить разрез, разделяющий две выбранные вершины, можно найти в [19, 20].

Утверждение 2. Задача анализа уязвимости МП-сети в постановке $2, 2'$ допускает эффективное решение, при условии, что мощности удара W_0 достаточно для разрушения минимального вершинного сетевого разреза. Решение задачи — соответствующий минимальный сетевой разрез.

Определение 7. Вершинным многопродуктовым разрезом (МП-разрезом) называется множество вершин таких, что удаление их из сети разрушает все пути соединения для всех тяготеющих пар. Пропускная способность такого МП-разреза — сумма пропускных способностей всех входящих в него вершин.

Определение 8. Минимальным МП-разрезом называется МП-разрез с минимальной пропускной способностью.

Сформулируем несколько классических потоковых задач, результаты решения которых позволяют исследовать частные случаи задачи анализа уязвимости МП-сети.

I. Задача о минимальном вершинном МП-разрезе [13]. Дан граф $G^f = \langle V^f, A^f \rangle$, вес каждой вершины $wt(v_i) > 0, v_i \in V^f$, и набор тяготеющих пар $M = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Найти минимальный вершинный МП-разрез, т.е. множество вершин $C \subseteq V^f$, удаление которых из G^f разделит источник и сток всех тяготеющих пар из M, имеющее минимальный вес. Далее вес $wt(v_i)$ будем отождествлять с пропускной способностью вершины.

Эта задача является NP-трудной [14] для любого $m > 2$ [21], для $m = 2$ задача может быть решена за полиномиальное время, например, двукратным применением потокового алгоритма, находящего минимальный разрез для пары вершин. В общем случае для решения I авторы [22] предлагают приближенный полиномиальный потоковый алгоритм, опирающийся на методы линейного программирования и позволяющий находить допустимое решение задачи, вес которого не превосходит величины $F \cdot O(\log m)$, где F — максимальный поток в сети, m — число тяготеющих пар.

Значительно лучше изучен вариант задачи I, в котором необходимо найти разрез, минимальный по числу вершин.

I.a. Задача о МП-разрезе, минимальном по числу вершин [23]. Дан неориентированный граф $G^f = \langle V^f, A^f \rangle$, набор тяготеющих пар $M = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Найти минимальный по числу вершин МП-разрез $C \subseteq V^f$, удаление которого из G^f разделит источник и сток каждой тяготеющей пары из M.

Для I.a различается два случая. В первом — множеству удаляемых вершин C может принадлежать любая терминальная вершина, во-втором — удалять из графа такие вершины запрещено. Последний вариант называется задачей о минимальном вершинном МП-разрезе с ограничениями [24].

Задача I.a. в общем случае является NP-трудной для любого $m > 2$ [25], и полиномиально разрешимой для $m = 2$. В работе [23] показано, что существует алгоритм, эффективно решающий ее для деревьев, а в [24] — что вариант задачи с ограничениями полиномиально разрешим для интервальных (соответствующее определение можно найти в [16]) графов. Если граф G^f — дерево, то G — также дерево. По условию удалять терминальные вершины из G запрещено, поэтому верно

Утверждение 3. Если мощности удара W_0 достаточно для разрушения минимального вершинного МП-разреза, то задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ допускает эффективное решение для двухпродуктовой сети. Задача в постановке $1'$ полиномиально разрешима для сетей, у которых G является либо деревом, либо интервальным графом. Решение задачи — соответствующие минимальные МП-разрезы.

В последнее время широкое распространение получила теория параметризованной сложности, которая занимается построением точных алгоритмов для труднорешаемых задач. Данная теория основывается на наблюдении, что в реальности многие NP-трудные и NP-полные задачи могут быть решены за приемлемое время, при условии, что входные данные для них имеют небольшой размер. При этом в задаче, как правило, присутствуют переменные, незначительное увеличение значения которых ведет к существенному росту объема вычислений. Такие переменные отслеживаются и в дальнейшем при исследовании сложности соответствующей задачи используются в качестве параметра. В [26] для параметризованной проблемы $\Pi(\pi, k)$, где π определяется входными данными, а k является параметром, вводится понятие разрешимости для фиксированного параметра $(fixed - parameter \;\; tractable)$.

Определение 9. Назовем параметризованную проблему $\Pi(\pi, k)$ разрешимой для фиксированного параметра, если для нее существует алгоритм временной сложности $O(f(k) \cdot |\pi|^{O(1)})$, где f зависит только от k, а $|\pi|$ отвечает размеру задачи.

В [27] показано, что для произвольной сети с фиксированным числом тяготеющих пар $m > 2$, и заданной верхней границей числа удаляемых вершин l_0 существует алгоритм сложности $O(2^{ml_0}4^{l_0^3}|G^f|^{O(1)})$, решающий эту задачу. Таким образом задача о минимальном вершинном МП-разрезе является полиномиально разрешимой для фиксированных параметров (m, l_0). Если же зафиксировать либо только m, либо только l_0, то в первом случае задача NP-трудна, а во втором — вопрос об ее сложности остается открытым.

Заметим, что алгоритмы, предлагаемые для решения параметризованных проблем по сути являются псевдополиномиальными [28]. Тем не менее, опыт построения алгоритмов для таких проблем позволяет по-новому подойти к исследованию труднорешаемых задач, и в дальнейшем использовать его при построении точных решений.

В задаче о минимальном вершинном МП-разрезе ведется поиск вершинного разреза, разделяющего все тяготеющие пары, поэтому если мощности удара достаточно для разрушения такого разреза, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ совпадает с решением соответствующих задач о минимальном вершинном МП-разрезе.

Приведем два варианта задачи, которую можно рассматривать как частный случай задачи о минимальном МП-разрезе.

II. Задача о минимальном вершинном терминальном разрезе [29]. Дан граф $G^f = \langle V^f, A^f \rangle$, вес каждой вершины $wt(v_i) > 0$, $v_i \in V^f$, и множество вершин $S \subseteq V^f$, называемых терминалами. Найти минимальный разрез, разделяющий все пути между всеми терминалами, т.е. множество вершин $C \subseteq V^f \backslash S$, удаление которого из G^f отделит любую вершину из S от других, имеющее минимальный суммарный вес.

II.a. Задача о минимальном по числу вершин терминальном разрезе [25]. Дан граф $G^f = \langle V^f, A^f \rangle$, и множество вершин $S \subseteq V^f$, называемых терминалами. Найти минимальный по числу вершин разрез $C \subseteq V^f \backslash S$, удаление которого из G^f отделит любую вершину из S от других.

Решение задач II, II.a существует только если терминальные вершины образуют независимое множество, т.е. являются попарно несмежными вершинами графа, при этом по условию терминальные вершины в разрез-решение входить не могут.

Оба варианта задачи о минимальном вершинном терминальном разрезе NP-трудны для любого числа терминалов $|S| > 2$. Лучший приближенный алгоритм для II изложен в [29], сложность $O(2 - 2/l)$. В работе [27] исследована параметризованная сложность задачи II.a., и показано, что она разрешима, если зафиксированным параметром является число удаляемых вершин l_0. Сложность алгоритма составляет $O(4^{l_0^3}|G^f|^{O(1)})$. Авторы [30] улучшили этот результат до $O(4^{l_0}|G^f|^{O(1)})$.

Если множество терминальных вершин S из II., II.a рассматривать как аналог множества пар источников и стоков для тяготений из M, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ для графа G совпадет с решением задач II., II.a, при условии, что граф тяготений G^p является полным графом на множестве вершин S, а мощности удара достаточно для разрушения соответствующего вершинного разреза. Действительно, в этом случае терминальные вершины графа G попарно несмежны, и их разделение означает разъединение источников и стоков для всех видов продуктов. Заметим, что постановки $1, 1'$ не накладывают никаких ограничении на структуру графа G^p, он даже не обязан быть связным, поэтому удовлетворение требования полноты G^p значительно ужесточает условия рассматриваемой задачи анализа уязвимости.

В задачах о минимальных вершинных МП-разрезе и терминальном разрезе ведется поиск разреза, разделяющего все тяготеющие пары или терминальные вершины, при этом не учитываются изменения величин и распределение потоков в поврежденной сети, а также удовлетворенность требований пользователей. Поэтому задачи I, I.a, II, II.a, хотя и решаются с помощью потоковых методов, являются скорее комбинаторно-графовыми, чем сетевыми. Решение задачи анализа уязвимости МП-сети в соответствующих постановках совпадает с решением задач I, I.a, II, II.a в тех случаях, когда выполнены все дополнительные условия, налагаемые, где это необходимо, на мощность удара и структуру графа тяготений.

§5. Исследование задачи анализа уязвимости МП-сети с помощью теоретико-графовых методов

Задача анализа уязвимости сети в постановках 1,1',2,2' предполагает поиск множества вершин, удаление которого из сети разрушит все пути соединения хотя бы для одной тяготеющей пары, и минимизирует или максимизирует второй критерий. Другими словами, требуется найти вершинный разрез с определенными свойствами для выделенной пары (или множества пар) вершин. Схожие задачи о построении разрезов с различными свойствами исследуются теорией графов в разделе, изучающем связность. Сформулируем несколько классических задач теории графов, близких по смыслу задаче анализа уязвимости МП-сети, результаты решения которых позволяют исследовать некоторые ее частные случаи.

III. Задача о минимальном вершинном разрезе [20]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, вес каждой вершины $wt(v_i) > 0, v_i \in V$. Найти разрез минимального веса, разделяющий данный граф на две непустые части.

IV. Задача о минимальном δ-разрезе [31]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, и целое число δ. Найти минимальный по числу вершин разрез,

разделяющий данный граф на δ непустых частей.
V. Задача о минимальном β-сбалансированном вершинном разрезе [13]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, вес каждой вершины и рациональное число $\beta, 0 < \beta \leq 1/2$. Найти минимальный по числу вершин разрез C, разделяющий данный граф на две непересекающиеся части I, J, такие, что $max\{|I|, |J|\} \leq \beta \cdot |V|$.

В общем случае задача о минимальном разрезе является полиномиально разрешимой, и для ее решения традиционно используются потоковые методы. В настоящее время основное внимание исследователей направлено на смежные проблемы: аппроксимация минимального разреза [32], построение всех минимальных вершинных разрезов для графов, имеющих определенную структуру [33],[34], и др.

Задача о минимальном δ-разрезе NP-трудна для любого $2 < \delta < n$ [31]. В [27] исследована сложность параметризованной задачи IV (для числа вершин в разрезе и δ), и показано, что она так же трудна, как и непараметризованная проблема.

Задача о минимальном β-сбалансированном вершинном разрезе NP-трудна [35]. Для планарных графов разрез размера $O(\sqrt{|V|})$ может быть найден за полиномиальное время [36], для остальных случаев предлагается использовать приближенные алгоритмы [37],[38]. Построению сбалансированного разреза для специальных графов посвящены работы [39],[40]. Наиболее полную информацию о задаче можно найти в [41].

Определение 10. Остовным деревом называется подграф данного графа, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

В задачах III-V, как и в исследуемой задаче анализа уязвимости, требуется во-первых: нарушить связность исследуемого графа, во-вторых: найти минимальный по весу или по числу вершин разрез, нарушающий эту связность. Никаких дополнительных условий, связанных с распределением вершин по возникающим связным компонентам, не налагается. В противоположность этому в задаче анализа уязвимости МП-сети требуется так разделить физический граф сети, чтобы разъединенной оказалась либо хотя бы одна из терминальных пар, либо максимальное число пар вершин, являющихся источником и стоком одного вида продукта, т.е. в разные связные компоненты должны попасть либо две выделенные вершины источник — сток, либо максимальное число таких вершин.

В общем случае разделение физического графа на две или большее число связных компонент не означает, что в сети будет разделена хотя бы одна тяготеющая пара (источник и сток могут оказаться в одной связной компоненте для всех видов продуктов). Обозначим граф тяготений $G^p = \langle N^p, M^f \rangle$, через G^p_o, если он содержит остовное дерево физического графа G^f, и множество его вершин N^p совпадает с N^f. Верно следующее

Утверждение 4. Для случая графа тяготений G^p_o решением задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках 2, $2'$ является минимальный вершинный разрез графа G^f, при условии, что мощность удара позволяет его разрушить.

Действительно, так как граф G^p содержит остовное дерево физического графа G^f, и его множество N^p вершин совпадает с N^f, то в графе G^f нет транзитных вершин. Тогда его разбиение минимальным разрезом на две части автоматически влечет за собой разделение хотя бы одной тяготеющей пары.

Определение 11. Простым вершинным разрезом графа G назовем такой разрез C, у которого любое собственное подмножество элементов разрезом не является, т.е. $C \in V$ — простой, если для любого $C' \subset C, C' \neq C, C' \neq \varnothing, C'$ — не разрез.

Простой вершинный разрез обладает рядом интересных свойств, позволяющих использовать его для решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети. Подробно на исследовании свойств простых разрезов остановимся в §7.

VI. Задача о построении всех простых вершинных разрезов графа [42]. Дан связный граф $G = \langle V, A \rangle$. Найти все простые вершинные разрезы графа.

Задача VI была впервые сформулирована в связи с вычислением ширины дерева [43]. В дальнейшем оказалось, что многие классические задачи теории графов такие, как задача о клике, об укладке графов и др., тесно связаны с построением множества всех простых вершинных разрезов графа. В частности в [43] утверждается, что если число простых разрезов графа полиномиально ограничено, то решения NP-полных задач о вычислении ширины графа [13] и о дополнении имеющегося графа до хордального [44] могут быть найдены за полиномиальное время. Мы также воспользуемся результатами решения задачи VI для оценки уязвимости МП-сети.

Первый алгоритм построения всех простых разрезов имел сложность $O(n^5)$ [45] для каждого разреза, в дальнейшем авторами [46] этот результат был улучшен до $O(n^3)$. Для планарных графов сложность составила $O(n)$ [47]. Вопрос о числе простых разрезов графа остается открытым, тем не менее, мы, воспользовавшись алгоритмом из [46], можем построить все простые разрезы за приемлемое время, например, для графов небольшого размера. Чтобы не нарушать целостности изложения ниже без доказательства приводится схема решения задачи анализа уязвимости МП-сети для случая небольших значений W_0. Формальное доказательство изложено в §7.

Построим множество всех простых разрезов графа G и обозначим его через $\mathcal{C}$. В $\mathcal{C}$ входят все вершинные разрезы, разделяющие граф G на две связные компоненты, и все точки сочленения, которые по определению являются простыми разрезами. Поэтому в $\mathcal{C}$, очевидно, входят все разрезы для любой пары источник — сток, среди которых и минимальный сетевой вершинный разрез. Таким образом, множество $\mathcal{C}$ содержит решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $2, 2'$.

Если ресурсы нападающего ограничены небольшой величиной W_0, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ можно выбрать из построенного $\mathcal{C}$ опираясь на второй критерий, а также исходя из ограничения на удар. Действительно, ущерб от разрушения любого простого разреза не может превосходить его пропускной способности, поэтому если среди элементов множества $\mathcal{C}$ найдется простой разрез C^*, ущерб от удаления которого из сети равен пропускной способности этого вершинного разреза и величине W_0, то он и будет оптимальным решением задачи в постановках $1, 1'$.

В противном случае для любого простого разреза, разрушение которого наносит максимальный ущерб пользователям, придется показать, что лучшего решения не существует. Для этого придется построить все разрезы с пропускной способностью не больше W_0, определить ущерб от их удаления и сравнить его с имеющимся рекордным.

На рис. 6 и 7 приведены примеры сетей, для которых простые вершинные разрезы соответственно являются и не являются оптимальными решениями задачи анализа уязвимости в постановках $1, 1'$. Рядом с номерами вершин обозначена их пропускная способность, а рядом с пунктирными линиями, обозначающими потоки в сети, указаны их величины.

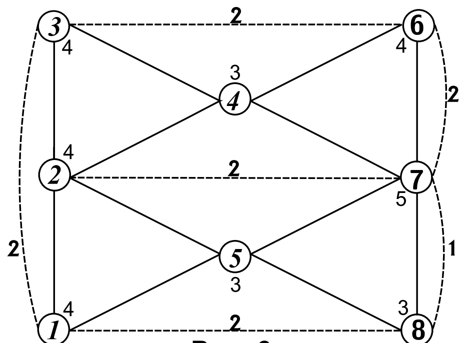

Рис. 6

Пусть для примера 4 (рис.6) $W_0 = 6$, тогда оптимальным решением задачи является удаление простого разреза, в который входят вершины $\{4,\ 5\}$, ущерб равен шести. Это решение — единственно.

Пусть для примера 5 (рис.7) $W_0 = 3$, тогда оптимальным решением задачи является, например, удаление трех любых вершин из множества $\{1, 3, 6, 8\}$, ущерб равен трем. При этом ни один из построенных простых вершинных разрезов сети оптимальным решением не является.

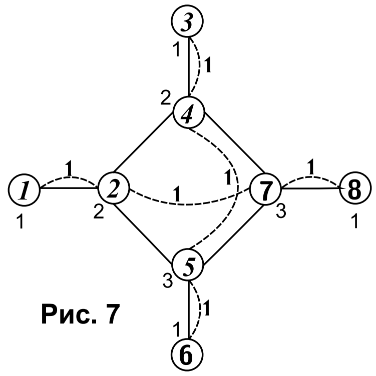

Рис. 7

К сожалению до построения множества $\mathcal{C}$ невозможно определить, будет ли оно содержать оптимальное решение задачи анализа уязвимости МП-сети в рассматриваемых постановках. Если в построенном $\mathcal{C}$ оптимального решения не оказалось, то для его поиска придется использовать другие методы.

Исследование задач III-VI позволяет сделать следующий вывод. Теоретико-графовый подход не учитывает структуру требований пользователей, что либо приводит к изучению одного частного случая — МП-сети с полным графом тяготений, либо не гарантирует построения оптимального решения.

§6. О сложности решения общего случая задачи анализа уязвимости МП-сети и о построении приближенного решения

Рассмотрим задачу анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1', 2, 2'$ в зависимости от того, какие ресурсы для разрушения сети имеются у нападающего. Предположим, что в сети более двух видов продуктов, физический граф не является деревом, а логический — является связным, но не полным.

Для решения задачи анализа уязвимости МП-сети в любой из рассматриваемых постановок с помощью полиномиального алгоритма построим минимальный вершинный сетевой разрез. Если ресурсов нападающего недостаточно для разрушения этого разреза, то решения задачи в постановках $1, 1', 2, 2'$ не существует. В противном случае построенный разрез является оптимальным решением задачи в постановках $2, 2'$. Далее обсудим построение решения для постановок $1, 1'$.

Обозначим через $I(C)$ множество номеров тяготеющих пар, разделенных вершинным разрезом C, $I(C) = \{i|\ C$ разделяет $p_i\}$. Если C' — минимальный вершинный МП-разрез, то $|I(C')| = m$.

Определение 12. Для произвольного вершинного разреза C введем величину $S(C)$ ущерба как сумму требований на поток разделенных пользователей сети после его удаления:

$$S(C) = \sum_{i \in I(C)} d_i. \tag{1}$$

Задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ состоит в том, чтобы найти разрез C, максимизирующий значение функции $S(C)$,

$$\max_{C \subseteq V} S(C), \tag{2}$$

при условии

$$\sum_{v_k \in C} y_k \le W_0. \tag{3}$$

В литературе отсутствуют прямые ссылки на задачу анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ как на NP-трудную, хотя предположение об этом при $m > 2$ высказывается в работе [48]. Результаты исследования частных случаев задачи (§4, 5) говорят скорее о ее вычислительной сложности. Действительно, если ресурсы нападающего позволяют разрушить любой разрез сети, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ совпадает с решением задачи о построении минимального вершинного МП-разреза. При таком ограничении на удар, а значит, и в общей постановке, рассматриваемая задача NP-трудна (§4).

Пусть мощность удара ограничена суммой всех требований на поток. В силу невыполнения условия потоково-разрезной двойственности, это не означает, что в сети найдется минимальный вершинный МП-разрез с соответствующей пропускной способностью. Определение минимальной величины удара, достаточной для разрушения минимального МП-разреза оказывается не проще решения NP-трудной задачи о построении последнего.

Теперь допустим, что мощность удара W_0 не больше суммы всех требований пользователей. В общем случае оптимальным решением задачи анализа уязвимости является вершинный разрез C^*, разделяющий непустое множество тяготеющих пар, с пропускной способностью $Y(C^*) \leq W^0$, удаление которого из сети наносит максимальный ущерб пользователям. Основным фактором, влияющим на трудоемкость построения такого решения является невозможность до построения произвольного вершинного разреза C сети D определить точно, какие тяготеющие пары он разделит, и какой ущерб будет нанесен вследствие его разрушения. И то, и другое зависит от имеющихся у нападающего ресурсов, расположения тяготеющих пар, структуры сети и пропускной способности вершин.

Особенности исследуемой задачи (максимизация целевой функции (1), конечность множества допустимых решений, следующая из полного уничтожения вершин), позволяют рассматривать ее как задачу дискретной оптимизации [49], для решения которых, как правило, применяют либо приближенные, либо комбинаторные методы.

Суть первой группы методов состоит в отказе от поиска оптимального решения и построении вместо него приближенного, или ε-оптимального [49] за приемлемое время.

Для задачи в постановках $1, 1'$ ε-оптимальным решением логично было бы считать разрез C^{ε}, удаление которого наносит пользователям ущерб, "близкий" к максимальному. Однако оценить возможные потери до решения задачи довольно сложно. Определять величину возможного ущерба как часть ресурсов нападающего не имеет смысла, так как, например, в сети, пропускные способности которой используются не полностью, ущерб от удаления разреза C может составлять достаточно малую часть от $Y(C)$, а в сети, не имеющей резерва пропускной способности вершин — ущерб и удар могут быть равны. Кроме того не ясно, найдется ли в сети разрез с заданной пропускной способностью $Y(C^{\varepsilon}) = W_0$. Обратимся к примеру 2 §2. Для него разреза с пропускной способностью 10 не существует, оптимальное решение-разрез имеет пропускную способность 7, что существенно отличается от заданного W_0.

Если в качестве C^{ε} выбрать произвольный существующий разрез с пропускной способностью $Y(C^{\varepsilon}) = W_0$, то: во-первых, построение такого разреза скорее всего — NP-трудная задача, так как его пропускная способность по логике должна позволить разделить более двух тяготеющих пар; во-вторых, не понято, насколько ущерб от удаления выбранного C^{ε} будет близок к максимальному. Например, разрушение вершин 5 или 7 в примере 5 §5 ($W_0 = 3$) наносит пользователям на треть меньший ущерб, чем разрушение оптимального разреза-решения.

ε-оптимальным можно было бы считать решение, полученное комбинированием минимальных вершинных разрезов тяготеющих пар. В некоторых случаях такая комбинация действительно является оптимальным решением задачи (пример 5 §5), и мы получаем значительное сокращение вычислений, поскольку находим C^ε полиномиальным алгоритмом. Однако здесь возникает вопрос о том, насколько ущерб от разрушения такого разреза в общем случае близок к ущербу от удаления оптимального решения. Обратимся к примеру 4 §5 . По логике ε-оптимальным решением оказывается удаление вершины 7 (сила удара — 5, ущерб — 5), однако, оптимальным решением является удаление вершин $\{4, 5\}$, ущерб равен шести. Для графа небольшого размера разница получилась значительной.

Возникшие трудности ставят под сомнение целесообразность построения ε-оптимального решения для рассматриваемой задачи. Далее перейдем к построению точного решения.

§7. Исследование уязвимости МП-сети с помощью формализма простых вершинных разрезов

Рассмотрим задачи A и B в постановках $1, 1'$ для сетей, физический и логический графы которых являются разреженными, т.е. связными, но с небольшими степенями вершин. Предположим, что все требования на поток в неповрежденной сети удовлетворяются. Далее исходя из условия эффективного использования мощности удара, будем считать, что W_0 ограничена величиной пропускной способности минимального МП-разреза. В этой части работы мы не предполагаем, что ресурсов нападающего недостаточно для разрушения минимального вершинного МП-разреза, поскольку предлагаемый метод подходит для решения соответствующей NP-трудной задачи.

Напомним, что величина пропускной способности произвольного вершинного разреза C выше была обозначена через

$$Y(C) = \sum_{v_k \in C} y_k.$$

В дальнейшем будем полагать, что граф G состоит из одной связной компоненты. Множества вершин и ребер подграфа G_k

будем обозначать соответствующим индексом k, т.е. считать, что G_k включает в себя множества вершин N_k и ребер A_k. В самом общем случае в разрез C могут входить не только вершины v, для которых смежными являются v_i, v_j из разных подграфов, т.е. $v_i \in N_k$ и $v_j \in N_m, k \neq m$, но и некоторые вершины v, для которых смежными являются v_i, v_j из одного подграфа, т.е. либо $v_i \in N_k$ и $v_j \in N_k$, либо $v_i \in N_m$ и $v_j \in N_m$.

Множество вершин $C \subset V$ назовем разрезом, делящим связный граф $G = \langle N, A \rangle$ на n связных компонент, если после его удаления из G последний распадается на n связных подграфов $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle, ..., G_n = \langle N_n, A_n \rangle$. При этом $N_i \bigcap N_j = \varnothing$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для любого $i \neq j$, и $N_1 \bigcup ... \bigcup N_n = N \backslash C$, $A_1 \bigcup ... \bigcup A_n = A \backslash AC$, где AC — множество ребер, смежных с вершинным разрезом C, т.е. ребро $r = (v_i, v_j)$ входит в множество AC, если $v_i \in C$ или $v_j \in C$. Другими словами
$AC = \{r \mid r = (v, v_i), v \in C, v_i \in N_i, i = \overline{1, k}, r \in A\}$.

Определение 13. Несократимым разрезом назовем такой разрез C графа G, что удаление любой вершины v из C приводит к уменьшению ущерба пользователей, т.е. C несократим, если $\forall\ v \in C, \quad I(C \backslash \{v\}) \subset I(C)$.

В §1 нами было сделано предположение о том, что нападающий использует мощность удара эффективно, поэтому решение задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети в постановках $1, 1'$ будем искать среди несократимых разрезов. Заметим, что по определению минимальный вершинный МП-разрез и простой вершинный разрез, разделяющий непустое множество тяготеющих пар, являются несократимыми.

Далее при решении задачи будем придерживаться методологии, предложенной в [10], и различать два случая:
1). Ресурсы нападающего позволяют разделить граф сети G ровно на две части;
2). Ресурсы нападающего позволяют разделить граф сети G на

три и более частей.

По определению простым вершинным разрезом графа G называется такой разрез C, у которого любое собственное подмножество элементов разрезом не является. Очевидно, что точки сочленения графа являются его простыми разрезами, однако, в отличие от ребра-моста они обладают свойством при удалении разделять граф сети на 2 и более связных компонент (для ребра-моста — ровно 2). Если для точки сочленения v $I(v) \neq \varnothing$, то она - несократимый разрез. Следовательно, точка сочленения — решение задачи анализа уязвимости МП-сети, если ущерб от разрушения такой вершины равен ее пропускной способности и величине W_0. В противном случае точка сочленения может входить в решение задачи как его часть.

Определить все точки сочленения графа можно следующим образом. Для каждой вершины $v \in G$ с помощью алгоритма ПОИСК из [28] проверим, является ли подграф $G \backslash v$ связным. Если нет, то указанная вершина является точкой сочленения. Сложность проверки связности подграфа $G \backslash v$ составляет $O(a)$, где a — число ребер графа G, следовательно сложность построения всех точек сочленения не превосходит $O(na)$.

Наличие точек сочленения характерно для деревьев и графов со звездчатой структурой. В общем случае граф сети может таких точек и не содержать, поэтому далее сосредоточим внимание на изучении простых разрезов, удаление которых из графа ведет к разделению последнего ровно на 2 связные компоненты. Ниже под простым разрезом будем понимать именно такой разрез, и разделять это понятие с понятием точка сочленения, делящая граф сети на $k > 2$ связных компонент. Отметим, что алгоритм из [46] такого различия не делает и строит множество, содержащее как простые разрезы в нашем понимании, так и все точки сочленения графа.

Пусть ресурсы нападающего ограничены небольшой величиной W_0 и позволяют разделить граф сети ровно на две части. Покажем, что решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ можно выбрать из множества всех простых разрезов $\mathcal{C}$, построенного с помощью алгоритма из [46], опираясь на второй критерий и исходя из ограничения на удар. Для этого исследуем свойства простых и несократимых разрезов.

Свойство 1. Пусть C — вершинный разрез, разделяющий граф G на связные компоненты G_1, G_2. C является простым тогда и только тогда, когда состоит из вершин, смежных с v_p, v_q из разных связных компонент: $v_p \in N_1, v_q \in N_2$ (или наоборот).

Доказательство. Пусть множество C состоит из вершин v, смежных только с вершинами v_p, v_q из разных связных компонент $v_p \in N_1, v_q \in N_2$, и $G \backslash C$ распадается на две связные компоненты. Следовательно, по определению C — разрез.

Выберем в множестве C произвольную вершину v, смежную с $v_p \in N_1, v_q \in N_2$, и рассмотрим подграф $G \backslash (C \backslash \{v\})$. Он связен, т.к. в нем существует путь из вершины v_p множества N_1 в вершину v_q множества N_2, проходящий через v. Тогда $C \backslash \{v\}$ разрезом не является, следовательно C — простой.

Пусть теперь множество вершин C является простым разрезом. В общем случае в произвольный разрез могут входить следующие вершины v:

а). v смежна с вершинами v_p, v_q одного из подграфов G_1 или G_2, т.е. $v_p \in N_1, v_q \in N_1$, или $v_p \in N_2, v_q \in N_2$;

б). v смежна с вершинами v_p, v': $v' \in C, v_p \in N_1$ или $v_p \in N_2$;

в). v смежна с вершинами v_p, v_q разных подграфов, $v_p \in N_1$, $v_q \in N_2$.

Рассмотрим а). Пусть, не ограничивая общности $v_p \in N_1$, $v_q \in N_1$. По предположению простой разрез C делит граф G на 2 связные компоненты G_1, G_2, и после удаления C из G компонента G_1 остается связной. Тогда в G_1 существует остовное дерево на вершинах из N_1, и между любой парой вершин, в том числе и v_p, v_q, подграфа G_1 существует путь, не проходящий через вершину v, удаленную вместе с разрезом C. Таким образом, наличие или отсутствие вершины v в C не влияет на связность G. Из этого получаем, что $C \backslash \{v\}$ — разрез, т.е. C не является простым. Пришли к противоречию. Следовательно, вершины v вида а) не могут входить в разрез C.

Рассмотрим б). Пусть, не ограничивая общности $v_p \in N_1$, а вершина v' смежна с v_q, $v_q \in N_2$. C является разрезом, следовательно, любой путь из G_1 в G_2 проходит через его вершины. Возможно 2 случая:

I). Подграфы G_1 и G_2 соединяет единственный путь, проходящий через вершины v_p, v, v', v_q.

II). Такой путь не является единственным.

Рассмотрим I). По предположению $C = \{v, v'\}$. Рассмотрим множество вершин $C \backslash v$. Оно является разрезом, поскольку в подграфе $G \backslash v'$ единственный путь между связными компонентами G_1, G_2 оказался разрушен, и $G \backslash v'$ распался на 2 части. Из C мы выделили собственное подмножество вершин, являющееся разрезом, поэтому C не является простым. Противоречие.

Рассмотрим II). По предположению в графе G между G_1 и G_2 существует путь, отличный от пути, проходящего через вершины v, v'. Следовательно, разрез C содержит еще хотя бы одну вершину, отличную от v, v'. Не ограничивая общности, предположим, что такая вершина v'' единственна, и $C = \{v, v', v''\}$. Тогда существует единственный путь из G_1 в G_2, отличный от v_p, v, v', v_q. Пусть это будет путь v'_p, v'', v'_q, $v'_p \in N_1$, $v_q \in N_2$. Рассмотрим множество $C \backslash v$. В подграфе $G \backslash \{C \backslash v\} = G \backslash \{v', v''\}$ оба пути между компонентами G_1, G_2 оказались разрушены, $G \backslash \{C \backslash v\}$ распался на 2 части, следовательно $C \backslash v$ — разрез. Из C мы выделили собственное подмножество вершин, являющееся разрезом, поэтому C не является простым. Противоречие.

Мы показали, что простой разрез C может состоять только из вершин v, смежных с вершинами разных множеств N_1, N_2. Утверждение доказано.

Свойство 2. Пусть простой разрез не является точкой сочленения, делящей связный граф G на k связных компонент, тогда он делит G ровно на две компоненты связности.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует простой вершинный разрез $C \neq \varnothing$, который делит G на $k > 2$ связных компонент $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle, ..., G_k = \langle N_k, A_k \rangle$, $N_1 \bigcup ... \bigcup N_k = N \backslash C$, $A_1 \bigcup ... \bigcup A_k = A \backslash AC$, где AC — множество ребер, смежных с C, $AC = \{r \mid r = (v, v'),\ v \in C,$ $v' \in N_i,\ i = \overline{1,k},\ r \in A\}$, $N_i \subset N$, $A_i \subset A$, $N_i \bigcap N_j = \varnothing, i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,k}, i \neq j$, и любой путь из G_i в G_j проходит через C. По предположению разрез C — простой, поэтому для любого $v \in C$ множество вершин $C \backslash \{v\}$ разрезом не является.

Покажем, что C может состоять только из вершин v смежных с вершинами v', v'', разных подграфов $v' \in N_i, v'' \in N_j$, $i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}, i \neq j$. В общем случае в произвольный разрез могут входить следующие вершины v:

а). v смежна с вершинами v_p, v_q одного из подграфов G_i, т.е. $v_p \in N_i, v_q \in N_i, i = \overline{1,k}$;

б). v смежна с вершинами v_p, v': $v' \in C, v_p \in N_i, i = \overline{1,k}$;

в). v смежна с вершинами v_p, v_q, разных подграфов $v_p \in N_i$, $v_q \in N_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}, i \neq j$.

Доказательство для случая а) совпадает с доказательством аналогичного случая для свойства 1, достаточно только зафиксировать i. Для доказательства случая б) вместо пары G_1, G_2 достаточно рассмотреть каждую пару $G_i, G_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}$, $i \neq j$, из множества подграфов $G_1, ..., G_k$, на которые разрез C по предположению делит граф G.

Таким образом, разрез C состоит только из вершин v, смежных с вершинами разных множеств $N_i, N_j, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}$, граф G представляет собой объединение k порожденных подграфов G_i, $i=\overline{1,k}$, и соединяющих их путей $(v_i, v, v_j), v \in C$, $v_i \in N_i, v_j \in N_j, i=\overline{1,k}, j=\overline{1,k}, i \neq j$.

Для доказательства рассмотрим вспомогательный ассоциированный граф $\overline{G} = \langle \overline{N}, \overline{A} \rangle$, в котором порожденный подграф G_i обозначим вершиной $g_i, i=\overline{1,k}$. Вершинам v разреза C, находящимся на путях, соединяющих связные компоненты G_i, G_j, в графе $\overline{G}$ будет соответствовать множество $\overline{C}$, состоящее из вершин $\overline{v}$, находящееся на возможно кратных путях, соединяющих вершины g_i, g_j. Таким образом, между разрезом C и множеством вершин $\overline{C}$ установлено взаимнооднозначное соответствие. По условию граф G — связен, в нем между любыми порожденными подграфами G_i, G_j существует соединяющий их путь, который проходит по вершинам разреза C. В графе $\overline{G}$ каждой вершине разреза C соответствует вершина из множества $\overline{C}$, следовательно, все вершины g_i, g_j в $\overline{G}$ связаны между собой путями через вершины из $\overline{C}$, т.е. $\overline{G}$ — связный.

После удаления $\overline{C}$ из $\overline{G}$ между любой парой вершин g_i, g_j не сохранится ни одного соединяющего их пути. Следовательно, подграф $\overline{G} \backslash \overline{C}$ является несвязным, а $\overline{C}$ — разрез графа $\overline{G}$.

В разрезе $\overline{C}$ выберем произвольную вершину $\overline{v}$ и рассмотрим множество $\overline{C}' = \overline{C} \backslash \{\overline{v}\}$. Покажем, что $\overline{C}'$ — разрез. Удалим $\overline{C}'$ из $\overline{G}$. В подграфе $\overline{G} \backslash \overline{C}'$ сохранился единственный путь — между вершинами g_i, g_j, проходящий через $\overline{v}$, между любой другой парой вершин нет пути. Следовательно, $\overline{C}'$ — разрез, разделяющий граф $\overline{G}$ на $k-1$ связную компоненту. Поскольку между вершинами разрезов C и $\overline{C}$ установлено взаимнооднозначное соответствие, то вершине $\overline{v}$ соответствует единственная v. Тогда и в подграфе $G \backslash [C \backslash \{v\}]$ существует путь только между порожденными подграфами G'_i, G'_j, между остальными компонентами — нет пути; $G \backslash [C \backslash \{v\}]$ распадается на $k-1$ связную компоненту, и $C \backslash v$ — разрез. Для вершинного разреза C, делящего граф G на k частей, нам удалось выделить собственное подмножество $C' \subset C$, являющееся разрезом, т.е. C не является простым. Противоречие. Значит простой разрез C не может делить связный граф на $k > 2$ компонент связности.

Определение 14. Маршрутом называется чередующаяся последовательность

$$a = v_0, r_1, v_2, r_2, ..., v_{n-1}, r_n, v_n = b$$

вершин и ребер графа такая, что $r_i = (v_{i-1}, v_i), 1 \leq i \leq n$. Говорят, что маршрут соединяет вершины a и b — концы маршрута.

Определение 15. В неориентированном графе цепью называется маршрут, все ребра которого различны.

Определение 16. Простой цепью называется цепь, в которой ни одна вершина не встречается дважды.

Свойство 3. Лемма 1. Пусть граф G является связным, разрез C делит его на $n > 2$ непересекающихся связных компонент $G_1, G_2, ..., G_n$ и не содержит точек сочленения. Тогда существует по крайней мере два различных простых разреза $C' \subset C$, и $C'' \subset C$, отделяющих от графа G соответственно порожденные подграфы G'_i, $G'_j, G'_i \neq G'_j, G_i \subseteq G'_i, G_j \subseteq G'_j$, для некоторых i, j так, что подграфы $G \backslash G'_i$, $G \backslash G'_j$ — связны.

Доказательство. По условию вершинный разрез C делит граф G на n связных компонент $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle, ..., G_n = \langle N_n, A_n \rangle$, $N_1 \bigcup ... \bigcup N_k \bigcup N_n = N \backslash C, \quad A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n = A \backslash AC$, $AC = \{r \mid r = (v, v'),\ v \in C,\ v' \in N_i,\ \ i = \overline{1, n},\ r \in A\}$, $N_i \subset N,\ \ A_i \subset A,\ \ N_i \bigcap N_j = \varnothing,\ i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, i \neq j$, и любой путь G_i в G_j проходит через C.

Из C выделим множество C' вершин v, смежных с вершинами a и b разных связных компонент, т.е. v смежна с $a \in N_i$, $b \in N_j,\ i \neq j,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}$. Множество C' является разрезом, поскольку после удаления C' из G между любой парой связных компонент G_i, G_j не останется пути, их соединяющих.

Граф G представляет собой объединение k порожденных подграфов $G_i, i = \overline{1, n}$, и соединяющих их путей v_i, v, v_j,

$v_i \in N_i, v_j \in N_j, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j, v \in C'$, проходящих через вершины v разреза $C', C' \subseteq C$.

Рассмотрим вспомогательный ассоциированный граф $\overline{G} = \langle \overline{N}, \overline{A} \rangle$, в котором вершиной $g_i, i = \overline{1,n}$, обозначим подграф G'_i, порожденный множеством вершин N_i связной компоненты G_i, и вершинами v из C, для которых смежными являются только вершины из N_i. Заметим, что $G_i \subseteq G'_i$. В графе $\overline{G}$ вершинам разреза C' будет соответствовать множество $\overline{C}$, состоящее из вершин $\overline{v}$, находящихся на возможно кратных путях из g_i в g_j, и смежных с ними.

Граф G — связен, в нем между любыми связными компонентами G_i, G_j существует соединяющий их путь, который проходит по вершинам разреза $C', C' \subseteq C$. В графе $\overline{G}$ каждой вершине разреза C' соответствует вершина из множества $\overline{C}$, следовательно, все вершины g_i в $\overline{G}$ связаны путями, проходящими через вершины из $\overline{C}$, и $\overline{G}$ — связный. Таким образом, между вершинами C' и множеством вершин $\overline{C}$ устанавливается взаимнооднозначное соответствие, а граф $\overline{G}$ является связным.

В графе $\overline{G}$ построим простую цепь максимальной длины s. Поскольку $n > 2$, то минимальная длина простой цепи максимальной длины равна 5. Пусть цепь s имеет своими концами вершины g_i, g_j. Покажем, что g_i, g_j, можно отсечь от $\overline{G} \backslash g_i, \overline{G} \backslash g_j$, соответственно, простыми разрезами $\overline{C_i}, \overline{C_j}$ так, что оставшиеся части $\overline{G} \backslash g_i, \overline{G} \backslash g_j$ будут связны. Для этого предположим, что в случае отделения вершины g_i, от $\overline{G}$ отделяется и некоторая вершина g'. Это означает, что в $\overline{G}$ между любой вершиной $g_k \neq g_i$ и g' существовал путь, либо проходящий через g_i, либо через $\overline{v} \in \overline{C}$. В первом случае длину цепи s можно увеличить на одно ребро. Пришли к противоречию, поскольку по предположению s — простая цепь максимальной длины. Во втором случае $\overline{v} \in \overline{C}$ является точкой сочленения, при удалении которой из сети граф распадается на 3 или более частей. Противоречие с условием утверждения. Следовательно, существует вершина g_i, такая, что подграф $\overline{G}\backslash g_i$ является связным.

Зафиксируем i и обозначим $\overline{C}_i$ — множество, состоящее только из вершин $\overline{v}, \overline{v} \in \overline{C}$, смежных с $g_i, \overline{C}_i \subset \overline{C}$. Очевидно, что $\overline{C_i}$ — разрез, отделяющий вершину g_i от $\overline{G}\backslash\{g_i\}$. В $\overline{C_i}$ не входит ни одна вершина g_j, поскольку ни одна из таких вершин не смежна с другой. Следовательно, $\overline{C_i}$ состоит только из вершин, смежных с g_i и $g_k, k \neq i, k = \overline{1,n}$, и делит $\overline{G}$ на 2 связные компоненты g_i и $\overline{G}\backslash\{g_i\}$. По свойству 1 $\overline{C_i}$ является простым. Аналогичные рассуждения можно провести для множества $\overline{C}_j, \overline{C}_j \subset \overline{C}$, состоящего из вершин, смежных с $g_j, \overline{v} \in \overline{C}$. Таким образом, существует по крайней мере два различных простых вершинных разреза $\overline{C_i} \subset C$ и $\overline{C_j} \subset \overline{C}$, отделяющих от графа $\overline{G}$ соответственно вершины g_i, g_j, $i \neq j$, для некоторых i, j так, что оставшиеся подграфы $\overline{G}\backslash\{g_i\}$, $\overline{G}\backslash\{g_j\}$ — связны.

В графе G вершинам каждого разреза $\overline{C_i}$ соответствует множество C_i вершин v разреза C', для которых v смежна с $a \in N_i, b \in N_k$, $k \neq i, k = \overline{1,n}$. Покажем, что множество $C_i \subset C$ — простой разрез, отделяющий от графа G порожденный подграф G_i', $G_i' \supseteq G_i$, так, что подграф $G\backslash G_i'$ — связен.

Удалим C_i из G. В результате от исходного графа оказался отделен подграф, порожденный вершинами из множества N_i и вершинами $v \in C$, для которых смежными являются только вершины из N_i. Выше этот подграф был нами обозначен как G_i'. Причем по построению $G_i' \supseteq G_i$, и G_i' является связным.

Множество C_i является разрезом, поскольку после удаления C_i из G, не останется ни одного пути, соединяющего вершины из G_i' с остальными вершинами графа. Кроме того, после удаления C_i все ребра связного графа G, не смежные с C_i и все вершины, не смежные с N_i, останутся на своих местах, поэтому все пути между вершинами множества $N\backslash\{N_i \bigcup C_i\}$ сохранятся, и подграф $G\backslash\{G_i' \bigcup C_i\}$ также будет связным.

Покажем, что разрез C_i — простой. Для этого предположим, что C_i простым разрезом не является. Тогда найдется вершина $v \in C_i$ такая, что $C_i \backslash \{v\}$ — разрез. Между вершинами разрезов $\overline{C_i}, C_i$ установлено взаимнооднозначное соответствие, поэтому в $\overline{C_i}$ также найдется $\overline{v}$ такая, что $\overline{C_i} \backslash \{\overline{v}\}$ — разрез. Но $\overline{C_i}$ — простой. Противоречие. Следовательно, C_i — простой.

Мы показали, что множество C_i — простой разрез, отделяющий от графа G порожденный подграф G'_i, $G_i \subseteq G'_i$, так, что подграф $G \backslash G'_i$ — связен. Обозначим разрез C_i через C'. Доказательство для C'' проводится аналогично в предположении, что C_j соответствует $\overline{C_j}$. Свойство 3 доказано.

Прежде чем перейти к исследованию свойств несократимых разрезов, напомним, что в §3 нами были выполнены дополнительные построения, которые позволили нам как бы вынести тяготеющие пары за пределы физического графа сети, сделав невозможным разрушение вершин — источников или стоков, при этом соответствующие v_{t_i}, v_{s_i} в дальнейшем могут быть рассмотрены как транзитные вершины. Фактически был осуществлен переход от физического графа сети G^f к графу G, вследствие чего в разрез, разделяющий любую тяготеющую пару из M, теперь могут входить любые вершины из G.

Свойство 4. Пусть разрез C делит связный граф G на две связные компоненты, $I(C) \neq \varnothing$. Тогда либо разрез C — простой, либо существует простой разрез $C' \subset C$ такой, что $I(C) = I(C')$.

Доказательство. Пусть разрез C делит граф G на две связные компоненты G_1, G_2, при этом для любой пары $p_i, i \in I(C)$, если $v'_{s_i} \in G_1$, то $v'_{t_i} \in G_2$, или наоборот.

Пусть разрез C не является простым, тогда существует некоторое собственное подмножество элементов C, которое является разрезом, а именно: найдется хотя бы одна вершина v, такая, что $C \backslash \{v\}$ — разрез. Исключим вершину v из C и покажем, что

$I(C) = I(C \backslash \{v\})$. Так как $C \backslash \{v\}$ — разрез, то при уменьшении в нем числа вершин, число разделенных пар не может увеличиться, поэтому $I(C \backslash \{v\}) \subseteq I(C)$. Пусть это включение является строгим, а именно: $I(C \backslash \{v\}) \subset I(C)$. Это означает, что существует такая тяготеющая пара $p_i, i \in I(C)$, что при удалении из сети G разреза $C \backslash \{v\}$ найдется путь, соединяющий источник и сток этой тяготеющей пары, т.е. найдется путь, проходящий через v и соединяющий связные компоненты G_1 и G_2. Поскольку в каждой из компонент G_1, G_2 имелось остовное дерево, то в результате оказалось, что граф G остался связным, несмотря на удаление разреза $C \backslash \{v\}$. Следовательно, $C \backslash \{v\}$ — не разрез для любой вершины v. Из этого следует, что C — простой. Получили противоречие. Таким образом, $I(C) = I(C \backslash \{v\})$.

Из разреза C последовательно выберем и удалим все вершины v_i, $i = \overline{1, k}$, такие, что $I(C) = I(C \backslash \{v_1, ..., v_k\})$, и для любого v_{k+1}, $v_{k+1} \in C \backslash \{v_1, ..., v_k\}$, множество $C \backslash \{v_1, ..., v_k, v_{k+1}\}$ — разрезом не является. Положим $C' = C \backslash \{v_1, ..., v_k\}$. Очевидно, что C' — простой и по построению $I(C) = I(C')$.

Из свойства 4 простого разреза вытекает очевидное

Свойство 5. Пусть вершинный разрез C делит граф G на две связные компоненты, не является простым, и $I(C) \neq \varnothing$. Тогда существует простой разрез C' такой, что $I(C) = I(C')$, для которого $Y(C) > Y(C')$.

Из свойства 5 следует, что ни один вершинный разрез, разбивающий физический граф сети на две части и разделяющий непустое множество тяготеющих пар, не может быть даже допустимым решением задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$, если не является простым.

Свойство 6. Пусть вершинный разрез C разделяет граф G на две связные компоненты, и $I(C) \neq \varnothing$. Этот разрез несократим тогда и только тогда, когда он простой.

Доказательство. 1). Пусть разрез C — простой. Тогда любое собственное подмножество вершин C разрезом не является. Следовательно, для любой $v \in C$ выполняется равенство $I(C \backslash \{v\}) = \varnothing$, то есть $I(C \backslash \{v\}) \subset I(C)$, и C несократим.

2). Пусть вершинный разрез C делит G на две связные компоненты $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle$ и $G_2 = \langle N_2, A_2 \rangle$, и разделяет множество тяготеющих пар с индексами $I(C)$. При этом для любого $i \in I(C)$, если $v'_{s_i} \in N_1$, то $v'_{t_i} \in N_2$, или наоборот. Пусть разрез C — несократим, тогда удаление любой вершины v из C приводит к уменьшению ущерба пользователей, и для любого $v \in C \;\; I(C \backslash \{v\}) \subset I(C)$. Поэтому существует тяготеющая пара p_{i^0}, $i^0 \in I(C)$ такая, что $i^0 \notin I(C \backslash \{v\})$. В этом случае несмотря на удаление вершин $C \backslash \{v\}$ в $G \backslash (C \backslash \{v\})$ существует путь, соединяющий вершины $v'_{s_{i^0}} \in G_1$ и $v'_{t_{i^0}} \in G_2$. Таким образом, существует путь, соединяющий подграфы G_1 и G_2. Поскольку в каждой из компонент G_1, G_2 имелось остовное дерево, то в результате оказалось, что граф $G \backslash (C \backslash \{v\})$ остался связным. Следовательно, для любого $v \in C$ множество вершин $C \backslash \{v\}$ разрезом не является, и C — простой.

Свойство 6 простого вершинного разреза является основополагающим, поскольку из него следует, что если ресурсы нападающего ограничены и не позволяют ударом разделить сеть более чем на две части, разрушив пути соединения для непустого множества тяготеющих пар, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ следует искать среди множества несократимых разрезов сети, т. е. тех простых вершинных разрезов, для которых $I(C) \neq \varnothing$, и $Y(C) \leq W_0$.

В этом случае для решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети с помощью алгоритма из [46] определим множество всех простых вершинных разрезов $\mathcal{C}$. Заметим еще раз, что кроме простых разрезов, делящих граф ровно на две связные компоненты, в $\mathcal{C}$ входят все точки сочленения — простые разрезы, делящие граф G на 3 и более частей. Очевидно, что точка сочленения также является несократимым разрезом, если она разделяет непустое множество тяготеющих пар. Поэтому из $\mathcal{C}$ выделим множество разрезов $\overline{\mathcal{C}}$, каждый из которых разделяет хотя бы одну тяготеющую пару и имеет пропускную способность не более W_0. Затем для всех разрезов из $\overline{\mathcal{C}}$ вычислим величину $S(C)$. Если в $\overline{\mathcal{C}}$ найдется несократимый разрез, у которого значения пропускной способности $Y(C)$ и ущерба $S(C)$ от его удаления совпадают с ограничением на силу удара, то мы нашли оптимальное решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$.

В остальных случаях для решения задачи придется рассмотреть все имеющиеся несократимые вершинные разрезы, делящие сеть на три и более частей.

§8. Исследование уязвимости МП-сети с помощью формализма несократимых вершинных разрезов

Рассмотрим задачу анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ предположив, что ресурсы нападающего позволяют нанести по физическому графу сети удар, который разделит его на три или более частей. Как и в §7 будем считать, что физический и логический графы сети являются разреженными, все требования на поток в неповрежденной сети выполняются, а ресурсы нападающего ограничены величиной, достаточной для разрушения минимального МП-разреза.

Решение задачи для таких W_0 будем искать среди несократимых разрезов сети, разделяющих ее более, чем на две части. Покажем, что любой несократимый разрез графа G, не являющийся точкой сочленения, представим в виде объединения простых вершинных разрезов этого графа, каждый из которых разделяет непустое множество тяготеющих пар. Нетрудно видеть, что тогда для решения поставленной задачи нужно будет построить все возможные комбинации простых разрезов физического графа сети и точек сочленения, а затем выбрать из них комбинацию простых разрезов — несократимый разрез, удовлетворяющий условиям (1), (3) §6.

Доказанные ниже утверждения 5 и 6 для любого несократимого разреза, делящего физический граф сети более чем на две части и не содержащего точек сочленения, гарантируют существование его представления в виде объединения простых разрезов этого графа.

Утверждение 5. Пусть разрез C графа G — несократим, не содержит точек сочленения, делит граф G на $n > 2$ связных компонент, и $I(C) \neq \varnothing$. Тогда существует последовательность вложенных подграфов $G, G'_1, G'_2, ..., G'_{n-2}$ и упорядоченный набор попарно непересекающихся множеств $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, таких, что C_1 — простой вершинный разрез для G, каждое C_i является простым вершинным разрезом в соответствующем подграфе G'_{i-1}. Кроме того, разрез C представим в виде
$C = C_1 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$, и $I(C) = I_1(C_1) \bigcup ... \bigcup I_{n-1}(C_{n-1})$, где $I_1(C_1) \neq \varnothing$ — множество номеров тяготеющих пар, разделенных в G, $I_i(C_i) \neq \varnothing$ — множество номеров тяготеющих пар, разделенных в подграфах $G'_1, G'_2, ..., G'_{n-2}$.

Для доказательства нам понадобится следующая

Лемма 2. Пусть граф G является связным, разрез C не содержит точек сочленения и делит G на n связных компонент $G^1, G^2, ..., G^n$. Тогда существует последовательность вложенных подграфов $G, G'_1, G'_2, ..., G'_{n-2}$ и упорядоченный набор попарно непересекающихся множеств $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, таких, что C_1 — разрез для G, каждое C_i является разрезом в соответствующем подграфе G'_{i-1}. Кроме этого, вершинный разрез C представим в виде $C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$.

Доказательство. По условию разрез C делит G на n связных компонент $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle,\ ..., G_n = \langle N_n, A_n \rangle,\ N_i \subset N,\ A_i \subset A$,

$N_i \bigcap N_j = \varnothing,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n},\ i \neq j,\ N_1 \bigcup ... \bigcup N_n = N \backslash C$, $A_1 \bigcup ... \bigcup A_n = A \backslash AC, AC = \{r | r = (v, v'), v \in C, v' \in N_i, r \in A\}$ и любой путь G_i в G_j проходит через C.

Разделение связного графа G на n частей рассмотрим как процесс последовательного отделения компонент от G. Разрез C удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому найдутся по крайней мере два различных простых вершинных разреза $C' \subset C$ и $C'' \subset C$, отделяющих от графа G соответственно порожденные подграфы G'^i, $G'^j, G'^i \neq G'^j, G^i \subseteq G'^i, G^j \subseteq G'^j$, для некоторых i, j так, что оставшиеся подграфы $G \backslash G'^i$, $G \backslash G'^j$ — связны.

Не ограничивая общности, будем считать, что $G_1 = G'^i$, и рассмотрим следующее множество C_1. Пусть в $C_1 \subseteq C$ входят все $v \in C$, для которых смежными являются только вершины из N_1, и вершины простого разреза C', т.е. все $v \in C$, смежные с $v' \in N_1$, и с $v'' \notin N_1$. Тогда C_1 — разрез, разбивающий G на две части. Обозначим $C'_1 = C \backslash C_1$. В C'_1 входят вершины $v \in C$, смежные с $v' \in N_i, i = \overline{2,n}$. C_1 и C'_1 по построению не пересекаются. Пусть $G'_1 = \langle N'_1, A'_1 \rangle = \langle N \backslash \{N_1 \bigcup C_1\}, A \backslash \{A_1 \bigcup AC_1\} \rangle$, где AC_1 — ребра, имеющие одним из концов вершину из C_1. Таким образом, в подграф G'_1 входят вершины $N_2 \bigcup N_3 \bigcup ... \bigcup N_n \bigcup \{C \backslash C_1\}$ и ребра $A_2 \bigcup ... \bigcup A_n \bigcup \{AC \backslash AC_1\}$.

Покажем, что разрез C'_1 разделяет подграф G'_1 на $n-1$ связную компоненту. Для этого допустим, что C'_1 делит G'_1 на $k < n-1$ частей. Тогда в подграфе $G'_1 \backslash C'_1$ существует вершина v, $v \in C$, которая смежна с $v' \in N_i, v'' \in N_j$, $i = \overline{2,n}, j = \overline{2,n}$, $i \neq j$, и путь из N_i в N_j, проходящий через эту вершину v. Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 2, j = 3$.

Удалим множество $\{C_1 \bigcup C'_1\}$ из G и рассмотрим подграф $G \backslash \{C_1 \bigcup C'_1\}$. По предположению в $G \backslash C'_1$ найдется путь из N_2 в N_3, проходящий через $v \in C$, смежную $v' \in N_2, v'' \in N_3$. Следовательно, разрез C'_1 не разделяет связные компоненты G_2, G_3. Так как $2 \neq 1, 3 \neq 1$, то G_2, G_3 не разделяет и разрез C_1. Это означает, что между G_2, G_3 в $G\backslash\{C_1 \bigcup C_1'\}$ существует соединяющий их путь, а разрез $C_1 \bigcup C_1'$ делит граф G на $n-1$ часть. Однако по построению $C_1 \bigcup C_1' = C$, следовательно, $G\backslash C$ распадается только на $n-1$ связную компоненту, что противоречит условию утверждения, и предположение, что разрез C_1' делит подграф G_1' менее чем на $n-1$ часть — неверно.

Рассмотрим связный подграф G_1'. Разрез C делит его на $n-1$ связную компоненту $G^1, G^2, ..., G^{i-1}, G^{i+1}, ..., G^n$. Следовательно, для него выполняются все условия леммы 1, и найдутся хотя бы два различных простых разреза $C^j \subset C$, $C^{jj} \subset C$, отделяющих порожденный подграф G''^l от $G_1'\backslash G''^l$, и порожденный подграф G''^s от $G_1'\backslash G''^s$, $G''^s \neq G''^l$, так, что $G_1'\backslash G''^l, G_1'\backslash G''^s$ — связны. Положим $G_2 = G''^l, C^2 = C^j$, при этом разрез C^2 — простой только для подграфа G_1'.

Пусть множество $C_2 \subseteq C$ состоит из вершин v простого разреза C^2 подграфа G_1' и всех вершин $v \in C$, для которых смежными являются только вершины $v' \in N_2$, тогда C_2 является разрезом для графа G_1' и разбивает его на две связные компоненты G_2 и G_2', где $G_2' = \langle N_1'\backslash\{N_2 \bigcup C_2\}, A_1'\backslash\{A_2 \bigcup AC_2\}\rangle =$
$= \langle N\backslash\{N_1 \bigcup N_2 \bigcup C_1 \bigcup C_2\}, A\backslash\{A_1 \bigcup A_2 \bigcup AC_1 \bigcup AC_2\}\rangle$. Для C_2' можно повторить все рассуждения, приведенные выше для C_1'.

Пусть для любого $k < n-2$ и подграфа G_k', множество $C_{k+1} \subseteq C$ состоит из вершин соответствующего простого разреза C^{k+1} этого подграфа, разделяющего множества вершин N_{k+1}, $N_{k+1}' = N_k'\backslash N_{k+1}$; и всех вершин $v \in C$, смежных только с $v' \in N_{k+1}$. Тогда C_{k+1} — разрез графа G_k', разбивающий его на две связные компоненты G_{k+1} и $G_{k+1}' = \langle N_{k+1}', A_{k+1}'\rangle =$
$= \langle N_k'\backslash\{N_{k+1} \bigcup C_{k+1}\}, A_k'\backslash\{A_{k+1} \bigcup AC_{k+1}\}\rangle =$
$= \langle N\backslash\{N_1 \bigcup N_2 \bigcup ... \bigcup N_{k+1} \bigcup C_1 \bigcup ... \bigcup C_{k+1}\},$
$A\backslash\{A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_{k+1} \bigcup AC_1 \bigcup AC_2 \bigcup ... \bigcup AC_{k+1}\}\rangle =$
$= \langle N\backslash\{\bigcup_{l=1}^{k+1}\{N_l \bigcup ... C_l\}\}, \{A_{k+2} \bigcup ... \bigcup A_n \bigcup\{AC\backslash\{\bigcup_{l=1}^{k+1} AC_l\}\}\rangle$.

Для каждого подграфа G_k' и соответствующего разреза C_{k+1}',

$C'_{k+1} = C \backslash \{C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{k+1}\}$, можно повторить все рассуждения, приведенные выше для C'_1, и продолжить процесс отделения от G'_k очередной связной компоненты. Наконец, для подграфа G'_{n-2} множество C_{n-1} состоит из вершин $v \in C$, смежных с $v' \in N_n$. Очевидно, что по построению $C_k \bigcap C_l = \varnothing$ для любого $k \neq l$, $C_1 \bigcup ... \bigcup C_{n-1} = C$.

Таким образом, разрез C удалось представить в виде объединения непересекающихся множеств $C_1, ..., C_{n-1}$ таких, что каждое C_i является разрезом в соответствующем подграфе и делит его ровно на две компоненты связности. Вершинный состав каждого из множеств C_i зависит от того, в каком порядке были пронумерованы отделяемые связные компоненты. При этом C_{k+1} будет разрезом только в соответствующем подграфе G'_k и, вообще говоря, для графа G разрезом может не являться. Лемма доказана. Докажем утверждение 5.

Пусть разрез C делит G на $n > 2$ связных компонент $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle$, ..., $G_n = \langle N_n, A_n \rangle$. Согласно лемме 2, C можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств $C_1, C_2, ...C_{n-1}$, таких, что разрез C_1 разделяет граф G на две связные компоненты G'_1, G_1 с множествами вершин N_1 и $N'_1 = N \backslash \{N_1 \bigcup C_1\}$; разрез C_2 разделяет подграф G'_1 на 2 связные компоненты G_2, G'_2, порожденные соответственно множествами вершин N_2 и $N'_2 = N \backslash \{N_1 \bigcup N_2 \bigcup C_1 \bigcup C_2\}$, $G'_2 \bigcup G_2 = G'_1$; и т. д.

Рассмотрим множества $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$. C_i — разрез в соответствующем подграфе, и по построению $C_i \bigcap C_j = \varnothing$. По условию C — несократим, $C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$, следовательно, каждый из разрезов C_i — несократим. По построению каждое из $C_i, i = \overline{1, n-1}$ является разрезом в соответствующем подграфе и делит его на две связные компоненты. Следовательно, по свойству 6 простого разреза, C_1 — простой для G, каждый C_i — простой в своем G'_{i-1} для любого $i = \overline{2, n-1}$.

Убедимся, что $I_i(C_i) \neq \varnothing$ для любого $i = \overline{1, n-1}$. Каждый из C_i — несократим, поэтому $I_i(C_i \backslash \{v\}) \subset I_i(C_i)$ для любой вершины $v \in C_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Если найдется $i = \overline{1, n-1}$, для которого $I_i(C_i) = \varnothing$, то $I_i(C_i \backslash \{v\}) = \varnothing$, и $I_i(C_i) = I_i(C_i \backslash \{v\})$, что противоречит несократимости C_i. Следовательно, для любого $i = \overline{1, n-1}$, $I_i(C_i) \neq \varnothing$. Мы представили несократимый разрез C в виде объединения попарно непересекающихся множеств $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, являющихся простыми разрезами в соответствующих подграфах, для которых $I_i(C_i) \neq \varnothing$.

Покажем, что $I(C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}) =$
$= I_1(C_1) \bigcup I_2(C_2) \bigcup ... \bigcup I_{n-1}(C_{n-1})$. Так как $I_i(C_i) \neq \varnothing$ для любого $i = \overline{1, n-1}$, то для любого $i > 1$, C_i разделяет в подграфе G'_{i-1} непустое множество тяготеющих пар с номерами $I_i(C_i)$. Это означает, что из двух вершин, являющихся источником или стоком любой тяготеющей пары p_{i_k}, разделенной разрезом C_i, одна лежит в связной компоненте G_i, а другая — в G'_i, т.е. в одной из связных компонент $G_j, i < j \leq n$. В частности, разрез C_1 разделяет множество тяготеющих пар с номерами из $I_1(C_1)$ так, что одна из вершин любой пары $p_{k_1}, k_1 \in I_1(C_1)$ лежит в N_1, а другая — в $N'_1 = N \backslash \{N_1 \bigcup C_1\}$. Разрез C_2 разделяет множество тяготеющих пар с номерами из $I_2(C_2)$ так, что одна из вершин любой пары $p_{k_2}, k_2 \in I_2(C_2)$ лежит в N_2, другая — в $N'_1 \backslash \{N_2 \bigcup C_2\}$. Поскольку множества $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ строго упорядочены, то разрез C_2 не может, например, разделить тяготеющую пару p', $v'_s \in N_1, v'_t \in N_2, N_2 \in N \backslash \{N_1 \bigcup C_1\}$, поскольку эту пару уже разделил разрез C_1. Следовательно, в силу упорядоченности множеств $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, для любых $i, j, 1 \leq i < n-1, 1 \leq j < n-1, i \neq j$, выполняется соотношение $I_i(C_i) \bigcap I_j(C_j) = \varnothing$.

Покажем, что $I_j(C_j) \subset I(C)$. Для этого предположим обратное: пусть существует тяготеющая пара p_i для которой $i \in I_j(C_j)$, и $i \notin I(C)$. Таким образом, тяготеющую пару p_i

разделяет разрез C_j, и не разделяет разрез C. Но $C_j \subset C$, т.е. разрез C_j состоит только из вершин разреза C. Пришли к противоречию. Следовательно, $I_j(C_j) \subseteq I(C)$.

Пусть теперь $I_j(C_j) = I(C)$. Но тогда разрезы C, C_j разделяют одни и те же тяготеющие пары, и, следовательно, C_j делит граф G на $n > 2$ связных компонент. Однако выше было показано, что C_j — простой в своем подграфе G'_{j-1}, следовательно, он не может делить G на $n > 2$ связных компонент. Пришли к противоречию. Таким образом, $I_j(C_j) \subset I(C)$.

Докажем, что $I(C) = \bigcup_{i=1}^{n-1} I_i(C_i)$. Для доказательства сначала предположим, что $\bigcup_{i=1}^{n-1} I_i(C_i) \subset I(C)$. Тогда существует такая тяготеющая пара $\overline{p}_i, i \in I(C)$, что для любого C_j, $j = \overline{1, n-1}$, $i \notin I_j(C_j)$. Пусть, не ограничивая общности, для $\overline{p}_i$ ее источник $v'_s \in N_l$ и сток $v'_t \in N_k, N_l \in N$, $N_k \in N$ и $l < k$, при этом, по условию в подграфе $G \backslash C$ между v'_s и v'_t нет пути.

Выше мы показали, что для C существует представление в виде объединения упорядоченного набора попарно непересекающихся множеств $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, таких, что C_1 является простым для G, и каждое множество $C_i, i = \overline{2, n-1}$, является простым разрезом в соответствующем подграфе G'_{i-1}, т.е. $C = C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$. Разделим граф G с помощью объединения разрезов $C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$. Так как номер i не входит в $I_j(C_j)$ для любого $C_j, j = \overline{1, n-1}$, то в подграфе $G \backslash [C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}]$ между источником v'_s и стоком v'_t пары $\overline{p}_i$ найдется путь, их соединяющий. Это означает, что связные компоненты N_l, N_k в $G \backslash [C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}]$ оказались соединены путем, т.е. $C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}$ делит G на $n-1$ связную компоненту. Но $C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1} = C$. Противоречие.

Теперь предположим, что выполняется строгое включение: $I(C) = I(C_1 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}) \subset I_1(C_1) \bigcup I_2(C_2) \bigcup ... \bigcup I_{n-1}(C_{n-1})$. Это означает, что существует тяготеющая пара p_i, $i \in I_l(C_l)$, $i \notin I(C)$ такая, что при удалении из графа G разреза C найдет-

ся путь, соединяющий источник $v'_{s_i} \in N_l$ и сток $v'_{t_i} \in N'_l$ этой тяготеющей пары. Разрез C делит подграф G'_l на $n-l$ частей, и поскольку $v'_{t_i} \in N'_l$, то найдется такой номер $l < j \le n$, что $v'_{t_i} \in N_j$. Тогда при удалении из графа G разреза C найдется путь, соединяющий источник $v'_{s_i} \in N_l$ и сток $v'_{t_i} \in N_j$ пары p_i. Поскольку в каждой из компонент G_l, G_j имелось остовное дерево, то оказалось, что после удаления разреза C из G, компоненты G_l и G_j остались связаны путем. А это означает, что C делит G только на $n-1$ связную компоненту. Получили противоречие. Таким образом, $I(C_1 \bigcup C_2 \bigcup ... \bigcup C_{n-1}) =$
$= I_1(C_1) \bigcup I_2(C_2) \bigcup ... \bigcup I_{n-1}(C_{n-1})$. Утверждение доказано.

Утверждение 6. Пусть вершинный разрез C графа G — несократим, не содержит точек сочленения, делит граф G на $n > 2$ связных компонент, и $I(C) \neq \varnothing$. Тогда C можно представить в виде объединения простых разрезов $C_1,\ C_2, ...,\ C_{n-1}$ графа G, таких, что $I(C_i) \neq \varnothing, C_i \neq C_j$ для любых $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{1, n-1}, i \neq j$,

$$I(C) = I(C_1) \bigcup I(C_2) \bigcup ... \bigcup I(C_{n-1}).$$

Доказательство проведем по индукции.

I). Пусть вершинный разрез C делит граф G на 3 связные компоненты $G_1 = \langle N_1, A_1 \rangle, G_2 = \langle N_2, A_2 \rangle, G_3 = \langle N_3, A_3 \rangle$, $N_1 \bigcup N_2 \bigcup N_3 = N \backslash C$, $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = A \backslash AC$. По лемме 1 для графа G найдется по крайней мере два простых разреза C', C'', отделяющих порожденные подграфы G'_i от $G \backslash G'_i$ и G'_j от $G \backslash G'_j$ так, что $G \backslash G'_i$ и $G \backslash G'_j, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, i \neq j$, — связны. Не ограничивая общности, положим $G'_i = G_1, G'_j = G_2, C^1 = C'$, $\overline{C_2} = C''$, тогда $C^1 \subset C, \overline{C_2} \subset C$.

Разрез C удовлетворяет условиям утверждения 5 и для него существует представление в виде объединения двух попарно непересекающихся множеств вершин, являющихся простыми разрезами в соответствующих подграфах. Разрез C^1 отделяет от графа G связную компоненту G_1, т.е. разделяет вершины N_1

и $N \backslash \{N_1 \bigcup C^1\}$. Пусть C^2 разъединяет связные компоненты G_2 и G_3, т.е. разделяет множества вершин N_2 и N_3, тогда, согласно утверждению 5 разрез C^2 — простой для G'_1, и $C = C^1 \bigcup C^2$.

Построенное нами представление разреза C соответствует определенному порядку разбиения связных компонент G: первой от G отделяется G_1, затем разъединяются G_2 и G_3. Для того, чтобы показать, что разрез C можно представить в виде объединения двух простых разрезов графа G поменяем этот порядок. С помощью простого разреза $\overline{C_2}$ отделим от G компоненту G_2, т.е. разделим вершины N_2 и $N \backslash \{N_2 \bigcup \overline{C_2}\}$, затем разрезом $\overline{C_1}$ разъединим G_1 и G_3, т.е. разделим множества вершин N_1, N_3. По лемме 1 $\overline{C_2}$ — простой разрез графа G, разделяющий множества вершин N_2 и $N \backslash \{N_2 \bigcup \overline{C_2}\}$. Согласно утверждению 5 $\overline{C_1}$ — простой для подграфа G'_2 и разделяет вершины из N_1, N_3. Новому порядку отделения связных компонент соответствует новое представление разреза $C = \overline{C_2} \bigcup \overline{C_1}$.

Рассмотрим множества $C^1, C^2, \overline{C}_2, \overline{C}_1$. Разрезы $C^1, \overline{C}_2$ являются простыми для графа G, $C^2, \overline{C}_1$ — для соответствующих подграфов графа G. По построению $C^1 \bigcap C^2 = \varnothing, \overline{C}_2 \bigcap \overline{C}_1 = \varnothing$, $C^1 \bigcup C^2 = C = \overline{C_2} \bigcup \overline{C_1}$. По утверждению 5 $I_1(C^1) \bigcup I_2(C^2) = = I(C) = I_1(\overline{C}_2) \bigcup I_2(\overline{C}_1)$, где $I_i(C^i) \neq \varnothing, I_i(\overline{C_i}) \neq \varnothing$, $i = \overline{1,2}$.

Каждое из объединений $C^1 \bigcup C^2, \overline{C}_2 \bigcup \overline{C}_1$ делит граф G на три части, следовательно, либо

а). $C^1 = \overline{C}_1$, $C^2 = \overline{C}_2$, и $I_1(C^1) = I_2(\overline{C}_1)$, $I_2(C^2) = I_1(\overline{C}_2)$; либо

б). $\overline{C}_1 \subset C^1$, $C^2 \subset \overline{C}_2$, и $I_2(\overline{C}_1) \subseteq I_1(C^1), I_2(C^2) \subseteq I_1(\overline{C}_2)$.

а). Пусть $C^1 = \overline{C}_1$, $C^2 = \overline{C}_2$, тогда каждый из этих разрезов является простым для графа G, и $C^1 \bigcup C^2 = C^1 \bigcup \overline{C_2}$. Положим $C_1 = C^1 = \overline{C}_1$, $C_2 = C^2 = \overline{C}_2$. Тогда $C = C_1 \bigcup C_2$, и равенство $I(C) = I(C_1) \bigcup I(C_2)$ выполняется автоматически.

б). Пусть $\overline{C}_1 \subset C^1$, $C^2 \subset \overline{C}_2$. Так как $C^1 \bigcap C^2 = \varnothing$, $\overline{C}_2 \bigcap \overline{C}_1 = \varnothing$, и $C^1 \bigcup C^2 = \overline{C}_2 \bigcup \overline{C}_1 = C$, то $C^1 \backslash \overline{C}_1 = \overline{C}_2 \backslash C^2$. Обозначим $C' = C^1 \backslash \overline{C}_1 = \overline{C}_2 \backslash C^2$. Тогда простые разрезы $C^1, \overline{C}_2$

— это объединения некоторого общего для них множества вершин C' и соответствующих простых разрезов подграфов $G\backslash G_2$, $G\backslash G_1$, т.е. $C^1 = \overline{C}_1 \bigcup C', \overline{C}_2 = C^2 \bigcup C'$. Поэтому $C^1 \bigcup C^2 =$ $= \overline{C}^1 \bigcup C' \bigcup C^2 = \overline{C}^1 \bigcup C' \bigcup C' \bigcup C^2 = C^1 \bigcup \overline{C}_2$, и $C = C^1 \bigcup \overline{C}_2$, где $C^1, \overline{C}_2$ — простые разрезы для графа G.

Покажем, что $I(C) = I_1(C^1) \bigcup I_1(\overline{C}_2)$. Согласно утверждению 5 $I(C) = I_1(C^1) \bigcup I_2(C^2)$. Так как $I_2(C^2) \subseteq I_1(\overline{C}_2)$, то $I(C) \subseteq I_1(C^1) \bigcup I_1(\overline{C}_2)$. Пусть $I(C) \subset I_1(C^1) \bigcup I_1(\overline{C}_2)$. Тогда существует тяготеющая пара p_i, $i \in I_1(C^1) \bigcup I_1(\overline{C}_2), \quad i \notin I(C)$. При этом либо $i \in I_1(C^1), \ i \notin I(C)$, либо $i \in I_1(\overline{C}_2), \ i \notin I(C)$.

Таким образом, тяготеющую пару p_i разделяет разрез C^1 (или разрез $\overline{C}_2$), и не разделяет C. Но $C^1 \subset C, \overline{C}_2 \subset C$, так как $C^1, \overline{C}_2$ состоят только из вершин разреза C. Пришли к противоречию. Следовательно, $I(C) = I_1(C^1) \bigcup I_1(\overline{C}_2)$. Положим $C_1 = C^1, \quad C_2 = \overline{C}_2$. Для $n = 3$ утверждение доказано.

II). Предположим, что утверждение 6 верно при $n = k$.

III). Докажем утверждение 6 для $n = k + 1$. По условию разрез C делит связный граф G на $k+1$ компоненту связности $G^1, G^2, ..., G^{k+1}$. Согласно лемме 1 для графа G найдется два простых вершинных разреза C', C'', отделяющих порожденный подграф G'^i от $G\backslash G'^i$ и порожденный подграф G'^j от $G\backslash G'^j$ так, что $G\backslash G'^i$, $G\backslash G'^j$ — связны. Пусть $G_1 = G'^i, C^1 = C'$. По лемме 1 $C^1 \subset C$, и подграф $G\backslash G_1$ — связен.

Покажем, что $I(C^1) \neq \varnothing$. Разрез C^1 является простым и делит G на 2 связные компоненты, следовательно, согласно свойству 4, он несократим. $I(C^1\backslash\{v\}) \subset I(C^1)$ для любого $v \in C^1$. Если $I(C^1) = \varnothing$, то $I(C^1\backslash\{v\}) = \varnothing$, и $I(C^1) = I(C^1\backslash\{v\})$, что противоречит несократимости C^1. Следовательно, $I(C^1) \neq \varnothing$.

Рассмотрим множество $\overline{C} = C\backslash C^1$. По условию несократимый разрез C разделяет граф G на $k+1$ связную компоненту. В графе G любой путь из множества N_i в $N_j, i, j = \overline{1, k+1}, i \neq j$, проходит через C, поэтому C состоит из вершин v, смежных с

$a \in N_i, b \in N_j, i = \overline{1, k+1}$, $j = \overline{1, k+1}, i \neq j$. Разрез C^1 — простой, он состоит только из вершин v, смежных с $a \in N_1, b \notin N_1$, при этом $G \backslash C^1$ распадается на две связные части G_1, G_1', где $G_1' = G \backslash \{G_1 \bigcup C_1 \bigcup AC_1\}$. Следовательно, $\overline{C}$ состоит из вершин несократимого разреза C, которые находятся на путях, соединяющих между собой вершины множеств $N_2, N_3, ..., N_{k+1}$, т.е. $\overline{v} \in \overline{C}, \overline{C} \subset C$, $\overline{v}$ смежна с $a \in N_i, i = \overline{2, k+1}$. Подграф G_1' является связным, однако, после удаления из него $\overline{C}$, G_1' распадется на k связных компонент. Следовательно, множество $\overline{C} = C \backslash C^1$ является разрезом для G_1'.

Покажем, что $\overline{C}$ несократим от противного. Пусть в $\overline{C}$ существует вершина, при удалении которой из G_1' ущерб пользователей не изменится. $\overline{C} \bigcup C^1 = C$, и C^1 — несократим, тогда и в C найдется вершина, при удалении которой из G ущерб пользователей не изменится. Значит и C также не является несократимым. Противоречие с условием.

Рассмотрим подграф G_1'. Несократимый разрез $\overline{C}$ делит его на k связных компонент, поэтому, согласно шагу II) для $\overline{C}$ существует представление в виде объединения простых разрезов $C_2, ..., C_k$ графа G_1', $C_i \in \overline{C}$, $i = \overline{2, k}$, таких, что $I(\overline{C}) = I(C_2) \bigcup I(C_3) \bigcup ... \bigcup I(C_k)$, где $I(C_i) \neq \varnothing \quad \forall i = \overline{2, k}$. Поскольку $C_i \in \overline{C}$, то $C_i \in C$ для любого $i = \overline{2, k}$. Разрез C^1 также является простым, $I(C^1) \neq \varnothing, C^1 \in C$, и C^1 отделяет от G_1' компоненту G_1. Таким образом, нами построено представление разреза C в виде простых разрезов $C^1, C_2, C_3, ..., C_k$. Покажем, что $I(C) = I(C^1) \bigcup I(C_2) \bigcup ... \bigcup I(C_k)$.

Предположим, что $I(C) \subset I(C^1) \bigcup I(\overline{C})$. Тогда существует тяготеющая пара $p_i, i \in I(C^1) \bigcup I(\overline{C})$, и $i \notin I(C)$; при этом либо $i \in I(C^1)$, $i \notin I(C)$, либо $i \in I(\overline{C})$, $i \notin I(C)$. Таким образом, тяготеющую пару p_i разделяет разрез C^1 (или разрез $\overline{C}$), и не разделяет разрез C. Но $C^1 \subset C, \overline{C} \subset C$, т.е. разрезы $C^1, \overline{C}$ состоят только из вершин разреза C. Пришли к противоречию. Следовательно, $I(C) = I(C^1) \bigcup I(\overline{C}) = I(C^1) \bigcup I(C_2) \bigcup ... \bigcup I(C_k)$. Положим $C_1 = C^1$. Для $n = k+1$ утверждение доказано.

Мы показали, что для любого $n > 2$ несократимый разрез C, разделяющий граф G на n связных компонент, представим в виде объединения простых разрезов $C_1, ..., C_{n-1}$, графа G, причем $I(C) = I(C_1) \bigcup I(C_2) \bigcup ... \bigcup I(C_k)$.

Заметим, что некоторые простые разрезы C_i из утверждения 6, могут делить G на части, каждая из которых является объединением соответственно m и $n - m$ связных компонент.

Таким образом, установленные нами выше свойства простых и несократимых вершинных разрезов оказались тождественны со свойствами простых и несократимых реберных разрезов. Это позволяет нам использовать алгоритм комбинирования простых разрезов [10] для построения точного решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$. Ниже без доказательства изложена схема построения решения. Теоретическое обоснование его оптимальности и описание алгоритма можно найти в [10].

Для построения точного решения вершинного варианта задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ воспользуемся методом “ветвей и границ"[49, 50], который состоит в построении “частичных решений", представленных в виде ветвей дерева поиска, и в получении нетривиальных оценок, позволяющих исключить проверку вариантов, которые доминируются построенными ранее решениями.

Решение задачи в постановках $1, 1'$ будем искать в виде комбинации простых вершинных разрезов из множества $\overline{\mathcal{C}}$, для этого упорядочим его элементы по невозрастанию $S(C)$ и перенумеруем, $\overline{\mathcal{C}} = \{C_i | \quad Y(C_i) \leq W_0, \quad i = \overline{1, z}\}$. Для удобства воспользуемся деревом перебора. Корневая вершина соответствует началу поиска, из нее выходят дуги, каждая из которых обозначает один из простых разрезов $C_1, C_2, ..., C_z$. Вершины дерева обозначают кандидатов на ветвление. На первом ярусе им соответствуют разрезы, построенные на предварительном этапе, на последующих ярусах — различные комбинации разрезов $C = C_a \bigcup C_{a+1} \bigcup ... \bigcup C_n$, полученные в процессе построения дерева перебора. Далее под разрезом C будем подразумевать комбинацию $C = (C_a \bigcup ... \bigcup C_l \bigcup C_p), C_i \in \overline{\mathcal{C}}$.

Определение 17. Оценкой ущерба пользователей после удаления из сети комбинации разрезов C, назовем сумму величин ущерба пользователей при удалении из сети каждого разреза, входящего в C, в отдельности и обозначим ее $\overline{S}(C)$, т.е. $\overline{S}(C) = S(C_a) + ... + S(C_l) + S(C_p)$. Для произвольного простого вершинного разреза C_i положим $\overline{S}(C_i) = S(C_i)$.

Поиск на дереве перебора будем вести в глубину, о перспективности разрушения простого разреза C_k или комбинации вершинных разрезов C будем судить по оценке величины ущерба, причиненного разделенным пользователям поврежденной сети (после удаления C_k или C). Разрезы C_n (или C), имеющие бóльшие значения оценки $\overline{S}(C_n)$ ($\overline{S}(C)$), будем последовательно объединять с простыми разрезами с меньшими значениями $\overline{S}(C_t), t = n+1, n+2, ...$, так, чтобы не выйти за границу силы удара W_0. Будем следить, чтобы каждый разрез, присоединяемый к уже построенной комбинации, разделял хотя бы одну тяготеющую пару, не разделенную этой комбинацией ранее, и отсекать бесперспективные ветви, если сила удара, необходимая для уничтожения комбинации простых разрезов, больше W_0. Такое построение дерева перебора отвечает предположению об эффективном использовании ресурсов нападающим.

Основным критерием, позволяющим отсекать отдельные вершины и ветви дерева перебора, будем считать ограничение на силу удара. Дополнительным — оценку величины ущерба, нанесенного пользователям удалением из сети разреза C. Тогда перебор можно сократить, не рассматривая такие комбинации простых вершинных разрезов, оценка ущерба от удаления которых из сети $\overline{S}(C)$ меньше ущерба от удаления построенного решения C^*, т.е. отсечь на дереве такие ветви, отвечающие C, для которых $\overline{S}(C) < S(C^*)$, при условии, что $Y(C) \leq W_0$.

Для решения задачи анализа уязвимости в постановках $1, 1'$ одно решение достаточно построить только в том случае, если в исследуемой сети до разрушения все требования на поток были полностью удовлетворены, а после удара максимальный ущерб пользователей оказался равен пропускной способности разрушенного разреза и величине W_0. В остальных случаях придется найти все комбинации разрезов, ущерб от удаления которых из сети будет максимальным, затем из построенного множества выбрать подходящее решение.

Литература

1. Малашенко Ю.Е. Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.:ВЦ РАН, 1993.

2. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

3. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

4. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

5. Phillips C. A. The network inhibition problem // Proc. 25th Ann. ACM Symp. on the Theory of Comput. Toronto: ACM Press, 1993. P. 776-785.

6. Latora V., Marchiori M. Vulneravility and Protection of Infrastructure Networks // Physical Review E. 2005. V. 71. N 015103.

7. Costa M.-C., Letocart L., Roupin F. Minimai multicut and integer multiflow: A survey // European J. Operational Research. 2005. V. 162. P. 55-69.

8. Назарова И.А. Модели и методы решения задачи анализа уязвимости сетей // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. N 4. C. 61-72.

9. Назарова И.А. Лексикографическая задача анализа уязви-

мости многопродуктовой сети // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. N 5. С. 123-134.

10. Назарова И.А. Модели и методы анализа многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2004.

11. Назарова И.А. Анализ переборных алгоритмов для задачи оценки уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2006.

12. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

13. Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G. et al. Complexity and Approximation. Springer-Verlag, 1999.

14. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

15. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМ и МГ СОРАН, 2006.

16. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, Сибирское предприятие РАН, 1999.

17. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

18. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

19. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows:

Theory, Algorithms and Application. Prentice Hall, 1993.

20. Cormen T. H., Stein C., Rivest R. L. et al. Introduction to Algorithms. McGraw-Hill Higher Education, 2001.

21. Garg, N., Vazirani, V. V., Yannakakis, M. Multiway cuts in directed and node weighted graphs // Lecture Notes in Comput. Sci. 1994. V. 820. P. 487-498.

22. Garg N., Vazirani V.V., Yannakakis M. Primal-dual approximation algorothms for integral flow and multicut in trees // Algorithmica. 1997. N 18. P. 3-20.

23. Calinescu G., Fernandes C.G., Reed B. Multicuts in unweighted graphs and digraphs with bounded degree and bounded tree-wigth // J. Algorithms. 2003. V. 48. N 2. P. 333-359.

24. Guo J., Huffner F., Kenar E. et al. Complexity and Exact Algorithms for Multicut // Lecture Notes in Comput. Sci. 2006. V. 3831. P. 137-147.

25. Cunningham W.H. The optimal multiterminal cut problem // Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 1991. V. 5. P. 105-120.

26. Downey R., Fellows M. Parametrized Complexity. Springer-Verlag, 1998.

27. Marx D. Parametrized graph separation problem // Theoretical Computer Scince. 2006. V. 351. N 3. P. 394-406.

28. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимиза-

ция: Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

29. N. Garg, V. V. Vazirani, and M. Yannakakis. Multiway cuts in node weighted graphs // J. Algorithms. 2004. V. 50. N 1. P. 49–61.

30. Chen J., Liu Y., Lu S. An Improved Parameterized Algorithm for the Minimum Node Multiway Cut Problem // Lecture Notes in Comput. Sci. 2007. V. 4619. P. 495-506.

31. Кауль С.Б., Попков В.К. О сложности вычисления характеристик связности // Эффективность и структурная надежность информационных систем. Системное моделирование. Новосибирск, 1982. С. 99-103.

32. Henzinger M. R. Approximating minimum cuts under insertions // Lecture Notes in Comput. Sci. 1995. V. 944. P. 280-291.

33. Smith D. Graphs with the smal lest number of minimum cut sets // Networks. 2006. V. 14. N 1. P. 47 - 61.

34. Meng J., Zhanga Z. Number of minimum vertex cuts in transitive graphs // Discr. Math. 2003. V. 270. N 1-3. P. 311-317.

35. Bui T. N., Jones C. Finding good approximate vertex and edge partitions is NP-hard // Inform. Process. Lett. 1992. V. 42. P. 153–159.

36. Lipton R. J., Tarjan R. E. A separator theorem for planar graphs // 1979. SIAM J. Appl. Math. V. 36. P. 177–189.

37. Feige U. Hajiaghayi M., Lee J. R. Improved approximation al-

gorithms for minimum-weight vertex separator // Proc. 37th ACM Symp. Theory of Comput. ACM Press, 2005. P. 63-72.

38. Amir E., Krauthgamer R., Rao S. Constant factor approximation of vertex-cuts in planar graphs // Proc. 35th ACM Symp. Theory of Comput. ACM Press, 2003. P. 90-99.

39. Feige U., Mahdian M. Finding small balanced separators // Proc. 38th ACM Symp. Theory of Comp. ACM Press, 2006. P. 375-384.

40. Uy J. Vertex Separators of Graphs // J. of Research in Sci., Comput., and Engineer. 2007. V. 4. N 1. P. 63-68.

41. Rosenberg A.L., Heath L.S. Graph separators with applications. Frontiers of computer science. Kluwers, 2001.

42. Kloks T., Kratsch D. Finding all minimal separators of a graph. // Lect. Notes in Comput. Sci. 1994. V. 775. P. 59-68.

43. Kloks T., Bodlaender H.L., Muller H. et al. Computing treewidth and minimum fill-in: all you need are the minimal separators. // Lect. Notes in Comput. Sci. 1993. V. 726. P. 60-71.

44. Yannakakis M. Computing the Minimum Fill-In is NP-Complete // SIAM. J. Algebraic and Discrete Methods. 1981. V. 2 N 1. P. 77-79.

45. Kloks T., Kratsch D. Listing all minimal separators of a graph // SIAM J. Comput. 1998. V. 27. N 3. P. 605-613.

46. Berry A., Bordat J.P., Cogis O. Generating all the minimal

separators of a graph // Int. J. Found. of Comput. Sci. 2000. V. 11. N 3. P. 397-404.

47. Mazoit F. Listing all the minimal separators of a 3-connected planar graph // Discrete Mathematics. 2006. V. 306. N 3. P. 372-380.

48. Aura T., Bishop M., Sniegowski D. Analyzing single-server network inhibition // Proc. IEEE 13th Comput. Security Found. Works. 2000. IEEE'00. P. 108-117.

49. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.

50. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ. Обзор теории. алгоритмов, программ и приложений// Math. Opetat. Statist. Ser. Optimizat. 1977. B. 8. N 2. C. 253-280.

СОДЕРЖАНИЕ

Список литературы

[1] Малашенко Ю.Е. Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.:ВЦ РАН, 1993.

[2] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[3] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Многокритериальный и максиминный анализ многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1988.

[4] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

[5] Phillips C. A. The network inhibition problem // Proc. 25th Ann. ACM Symp. on the Theory of Comput. Toronto: ACM Press, 1993. P. 776-785.

[6] Latora V., Marchiori M. Vulneravility and Protection of Infrastructure Networks // Physical Review E. 2005. V. 71. N 2.

[7] Costa M.-C., Létocart L., Roupin F. Minimai multicut and integer multiflow: A survey // European J. Operational Research. 2005. V. 162. P. 55-69.

[8] Назарова И.А. Модели и методы решения задачи анализа уязвимости сетей // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. N 4. С. 61-72.

[9] Назарова И.А. Лексикографическая задача анализа уязвимости многопродуктовой сети // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. N 5. С. 123-134.

[10] Назарова И.А. Модели и методы анализа многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2004.

[11] Назарова И.А. Анализ переборных алгоритмов для задачи оценки уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2006.

[12] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[13] Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G. et al. Complexity and Approximation. Springer-Verlag, 1999.

[14] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[15] Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск: ИВМ и МГ СОРАН, 2006.

[16] Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, Сибирское предприятие РАН, 1999.

[17] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. и др. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

[18] Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

[19] Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows: Theory, Algorithms and Application. Prentice Hall, 1993.

[20] Cormen T. H., Stein C., Rivest R. L. et al. Introduction to Algorithms. McGraw-Hill Higher Education, 2001.

[21] Garg, N., Vazirani, V. V., Yannakakis, M. Multiway cuts in directed and node weighted graphs // Lecture Notes in Comput. Sci. 1994. V. 820. P. 487-498.

[22] Garg N., Vazirani V.V., Yannakakis M. Primal-dual approximation algorothms for integral flow and multicut in trees // Algorithmica. 1997. N. 18. P. 3-20.

[23] Calinescu G., Fernandes C.G., Reed B. Multicuts in unweighted graphs and digraphs with bounded degree and bounded tree-wigth // Journal of Algorithms. 2003. V. 48. N 2. P. 333-359.

[24] Guo J., Huffner F., Kenar E. et al. Complexity and Exact Algorithms for Multicut // Lecture Notes in Comput. Sci. 2006. V. 3831. P. 137-147.

[25] Cunningham W.H. The optimal multiterminal cut problem // Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 1991. V. 5. P. 105-120.

[26] Downey R., Fellows M. Parametrized Complexity. Springer-Verlag, 1998.

[27] Marx D. Parametrized graph separation problem // Theoretical Computer Scince. 2006. V. 351. N 3. P. 394-406.

[28] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.

[29] N. Garg, V. V. Vazirani, and M. Yannakakis. Multiway cuts in node weighted graphs // J. Algorithms. 2004. V. 50. N 1. P. 49–61.

[30] Chen J., Liu Y., Lu S. An Improved Parameterized Algorithm for the Minimum Node Multiway Cut Problem // Lecture Notes in Comput. Sci. 2007. V. 4619. P. 495-506.

[31] Кауль С.Б., Попков В.К. О сложности вычисления характеристик связности// Эффективность и структурная надежность информационных систем. Системное моделирование. Новосибирск, 1982. С. 99-103.

[32] Henzinger M. R. Approximating minimum cuts under insertions // Lecture Notes in Computer Science. 1995. V. 944. P. 280-291.

[33] Smith D. Graphs with the smal lest number of minimum cut sets // Networks. 2006. V. 14. N 1. P. 47 - 61.

[34] Meng J., Zhanga Z. Number of minimum vertex cuts in transitive graphs // Discrete Mathematics. 2003. V. 270. N1-3. P. 311-317.

[35] Bui T. N., Jones C. Finding good approximate vertex and edge partitions is NP-hard // Inform. Process. Lett. 1992. V. 42. P. 153–159.

[36] Lipton R. J., Tarjan R. E. A separator theorem for planar graphs // 1979. SIAM J. Appl. Math. V. 36. P. 177–189.

[37] Feige U. Hajiaghayi M., Lee J. R. Improved approximation algorithms for minimum-weight vertex separator // Proc. 37th annual ACM Symp. Theory of Comput. ACM Press. 2005. P. 563-572.

[38] Amir E., Krauthgamer R., Rao S. Constant factor approximation of vertex-cuts in planar graphs // Proc.35th annual ACM Symp. Theory of Comput. ACM Press. 2003. P. 90-99.

[39] Feige U., Mahdian M. Finding small balanced separators // Proc. 38th annual ACM Symp. Theory of Comp. ACM Press, 2006.P. 375-384.

[40] Uy J. Vertex Separators of Graphs // J. of Research in Science, Computing, and Engineering. 2007. V.4. N 1. P.63-68.

[41] Rosenberg A.L., Heath L.S. Graph separators with applications. Frontiers of computer science. Kluwers, 2001.

[42] Kloks T., Kratsch D. Finding all minimal separators of a graph. // Lecture Notes in Comput. Sci. 1994. V. 775. P. 759-768.

[43] Kloks T., Bodlaender H.L., Muller H. et al. Computing treewidth and minimum fill-in: all you need are the minimal separators. // Lecture Notes in Comput. Sci. 1993. V. 726. P. 260-271.

[44] Yannakakis M. Computing the Minimum Fill-In is NP-Complete // SIAM. J. Algebraic and Discrete Methods. 1981. V. 2. N 1. P. 77-79.

[45] Kloks T., Kratsch D. Listing all minimal separators of a graph // SIAM J. Comput. 1998. V. 27. N 3. P. 605-613.

[46] Berry A., Bordat J.P., Cogis O. Generating all the minimal separators of a graph // Int. J. Found. of Comput. Sci. 2000. V. 11. N 3. P. 397-404.

[47] Mazoit F. Listing all the minimal separators of a 3-connected planar graph // Discrete Mathematics. 2006. V. 306. N 3. P. 372-380.

[48] Aura T., Bishop M., Sniegowski D. Analyzing single-server network inhibition // Proc. IEEE 13th Comput. Security Found. Works. 2000. IEEE'00. P. 108-117.

[49] Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.

[50] Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ. Обзор теории. алгоритмов, программ и приложений// Math. Opetat. Statist. Ser. Optimizat. 1977. B. 8. N 2. C. 253-280.