РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

И.А. НАЗАРОВА

АНАЛИЗ ПЕРЕБОРНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ УЯЗВИМОСТИ МНОГОПРОДУКТОВЫХ СЕТЕЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2006

УДК 519.85

Ответственный редактор
доктор физ.-матем. наук Ю.Е.Малашенко

Рассмотрена задача анализа уязвимости многопродуктовой сети с учетом возможности выхода из строя (полностью) одного или нескольких ребер. Проблема формализована в виде двухкритериальной лексикографической задачи оптимизации. Частные случаи исследованы с помощью потоковых и теоретико-графовых методов, указаны соответствующие алгоритмы. Для остальных случаев предлагается использовать алгоритм поиска простых разрезов и алгоритм комбинирования простых разрезов, основанный на схеме перебора по методу ветвей и границ. Алгоритмы тестированы на сетях, физические и логические графы которых являются случайными и разреженными, а также на построенной в работе модели междугородной телефонной сети России. Проведен анализ их эффективности по сравнению с другими переборными алгоритмами.

Работа поддержана грантом РФФИ N 04-01-00203.

Рецензенты: И.Х.Сигал,
В.Г.Ушаков

Научное издание

Введение

В связи с анализом функционирования реальных территориально-распределенных систем таких, как топливно-энергетический комплекс, Интернет, сети связи и управления, возникает вопрос о способности системы удовлетворять заданным требованиям при наличии возмущений, не являющихся пренебрежимо малыми.

Различают два вида таких возмущений. К первому относятся возникающие в системе независимые случайные помехи, сбои и отказы ее элементов. При этом предполагается, что вероятность одновременного появления большого числа неполадок достаточно мала и не может привести к каскадному эффекту. Соответствующие задачи находятся в ведении теории надежности и здесь нами рассматриваться не будут.

Ко второму виду возмущений относятся произвольные неслучайные, а в некоторых случаях и целенаправленные, разрушения такие, как аварии, техногенные катастрофы, диверсии, террористические акты или военные действия. Необходимость априорной оценки последствий подобных возмущений приводит к проблеме анализа уязвимости сетевых систем [1-3].

Математической моделью для различных реально существующих многопользовательских сетевых систем традиционно служит многопродуктовая потоковая сеть (МП-сеть, многопродуктовая сеть). В общем случае моделируемая территориально-распределенная структура описывается с помощью неориентированного взвешенного графа с заданными пропускными способностями ребер. В графе имеется выделенное подмножество упорядоченных пар вершин (тяготеющих пар), соответствующих источнику и стоку некоторого продукта. При передаче продукта по сети от его источника к стоку говорят о потоке продукта данного вида. Предполагается, что все потоки проходят по сети одновременно, потоки являются невзаимозаменяемыми, для каждого из них заданы требования, имеющие смысл заявки на поток данного вида. Кроме этого считается, что в неповрежденной сети все требования на передачу потока удовлетворяются, а количество обслуженных требований уменьшается в зависимости от степени ее разрушения.

Под анализом уязвимости обычно понимают исследование изменения интересующих нас функциональных характеристик сети в зависимости от ухудшения показателей работоспособности ее элементов или при полном разрушении последних [1].

В данной работе рассматриваются потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети при условии выхода из строя (полностью) одного или нескольких ребер, так, что передача потока хотя бы для одной тяготеющей пары становится невозможной. Нас будут интересовать характеристики уязвимости сети, связанные с ущербом пользователей, который они несут вследствие разрушения системы.

Для исследования уязвимости многопродуктовой сети будем применять методологический подход теории исследования операций (в частности теоретико-игровую модель "оборона против нападения"[4]), и в равной степени использовать методы теории графов [5, 6], дискретного программирования [7-9] и многокритериальной оптимизации [10].

В §1 делаются основные предположения и формулируются различные постановки рассматриваемой задачи. В §2 уязвимость МП-сети исследуется потоковыми и теоретико-графовыми методами, обсуждаются вопросы, связанные со сложностью поставленной задачи, а также поиском приближенного решения. В §3 можно найти краткое описание алгоритмов построения и комбинирования простых разрезов. §4 служит иллюстрацией работы алгоритмов на сетях, физические и логические графы которых являются случайными и разреженными, а также на предложенной в работе модели междугородной телефонной сети России. Там же анализируется эффективность их использования по сравнению с другими переборными алгоритмами.

Настоящая работа, хотя она может читаться самостоятельно, является продолжением работы [11], посвященной изучению свойств несократимых и простых разрезов сети, а также теоретическому обоснованию и исследованию допустимости алгоритмов построения и комбинирования простых разрезов. Полученные в [11] результаты позволили автору перейти к анализу уязвимости сетей с разреженными физическими и логическими графами.

§1. Основные предположения и формулировки

В качестве математической модели многопользовательской сетевой системы рассмотрим МП-сеть $D = \langle G, M \rangle$, которая задается физическим графом сети $G = \langle N, A \rangle$ (пусть, неориентированным, без петель), где $N = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ — множество вершин (узлов), $A = \{r_1, r_2, ..., r_a\} \subset N \times N$ — множество ребер, соединяющих вершины; и набором $M = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ тяготеющих пар (видов продуктов) — вершин (v_{s_i}, v_{t_i}) графа G, называемых источником и стоком для тяготеющей пары p_i, $i = \overline{1, m}$. Остальные вершины $N \times N \backslash M$ являются транзитными.

Каждому ребру $r_i \in A$ физического графа сети формально сопоставим пару противоположно направленных дуг e_i и e_{i+a} для потоков прямого и обратного направления, соответственно. При этом для любой вершины $v \in V$ определим множества $T(v)$ и $S(v)$ индексов входящих и выходящих дуг. Обозначим через $f = \{f_{ij}\}$ матрицу распределения потоков по дугам МП-сети, здесь $f_{ij} \geq 0$ — поток i-го вида продукта (тяготеющей пары p_i) по дуге e_j. Считается, что в транзитных для p_i узлах сети не происходит потери потока [12], т.е. выполнены условия сохранения

$$\sum_{j \in S(v)} f_{ij} = \sum_{j \in T(v)} f_{ij} \;\; \forall v \neq v_{s_i}, v_{t_i}, \; \sum_{j \in S(v_{s_i})} f_{ij} = \sum_{j \in T(v_{t_i})} f_{ij}, i = \overline{1, m}. \tag{1}$$

На ребрах графа G заданы веса, определяющие целочисленные значения $y_k \in \mathbf{Z}_+$ пропускной способности ребер r_k, $k = \overline{1, a}$, и соответствующие физическому числу каналов связи, имеющихся в сети. Набор $y = \{y_k | k = \overline{1, a}\}$ задает ограничения на распределение потоков различных тяготеющих пар по ребрам МП-сети. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{m} (f_{ik} + f_{i(k+a)}) \leq y_k \;\; \forall r_k \in A. \tag{2}$$

Ограничения (1), (2) определяют множество $Z(y)$ достижимых векторов $z(f) = (z_1(f), z_2(f), ..., z_m(f))$, где $z_i(f) = \sum\limits_{j \in S(v_{s_i})} f_{ij} = \sum\limits_{j \in T(v_{t_i})} f_{ij}$ — количество потока i-го вида продукта, $i = \overline{1, m}$, пропускаемое по сети в соответствии с распределением потоков f. Вектор $z(f)$ называется *мультипотоком* и характеризует эффективность функционирования сети, т.е. качество обслуживания пользователей сетевой системы (группы пользователей моделируются тяготеющими парами).

Для МП-сети D вводится неориентированный граф тяготений или логический граф $G^p = \langle N^p, M \rangle$, где $N^p = \{v \in N | \; \exists p_i \in M : v = v_{s_i}$ или $| = v_{t_i}\}$ — подмножество вершин графа G, являющихся источником или стоком для какой-либо тяготеющей пары p_i, $i = \overline{1, m}$; $M = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ – множество логических ребер, соединяющих источник v_{s_i} и сток v_{t_i} соответствующей пары. В отличие от графа G МП-сети D, который предполагается связным, граф G^p может состоять из $j \leq m$ компонент связности.

Традиционно для МП-сети предполагается заданным вектор $d = (d_1, d_2, ..., d_m)$ требований или заявок на величины потоков для всех тяготеющих пар, $d_i > 0$, $i = \overline{1, m}$. Таким образом, всем ребрам $p_i \in M$ логического графа приписаны числа $d_i > 0$, измеряемые в условных единицах потока, и указывающие какой поток следует пропустить по соответствующему логическому ребру. Если $d \in Z(y)$, то сеть называется допустимой [13].

Предположим, что МП-сеть подвергается разрушающему воздействию. Пусть такое воздействие приводит к полному уничтожению одного или нескольких (заранее неизвестно каких) ребер сети D, а множество узлов и тяготеющих пар остается прежним. Обозначим через $R(w)$ множество ребер сети, уничтоженных в результате удара w, тогда $A \backslash R(w)$ — множество ребер, оставшихся в графе G. Вследствие изменения графа G происходит изменение вектора пропускной способности y, задающего ограничения на распределение потоков в сети, в зависимости от удара w, поэтому далее этот вектор будем обозначать $y(w) = \{y_k(w) |\ k = \overline{1, a}\}$. Таким образом, вместо вектора ограничений y получаем $y(w)$, где $y_j(w) = 0$ для ребер $r_j \in R(w)$ и $y_j(w) = y_j$ для $r_j \notin R(w)$. Пусть распределение потоков в сети после разрушения производится исходя из правила суперконкурентного распределения потоков [14].

Введем понятие мощности (силы) удара как суммарной пропускной способности выбитых ребер $r_j \in R(w)$, обозначим ее $U(w) = \sum\limits_{r_j \in R(w)} y_j$ и будем считать, что она ограничена величиной $W_0, U(w) \leq W_0$. Мощность удара можно также интерпретировать и в терминах числа ребер (что формально соответствует единичной пропускной способности), далее ограничение по числу ребер будет обозначаться через l_0.

Под анализом уязвимости МП-сети будем понимать построение зависимости, которая связывает ухудшение пользовательских характеристик системы с разрушением ее элементов. Решение задачи анализа уязвимости — это получение гарантированных оценок уязвимости при неточно известных заранее внешних воздействиях, приводящих к полному уничтожению произвольных ребер сети. Следуя общей методологии исследования операций, будем ориентироваться на принцип гарантированного результата, т.е. учитывать всю доступную информацию и рассчитывать на худший случай в рамках имеющейся неопределенности.

Для получения гарантированной оценки возможного ущерба пользователей, возникающего в результате потери работоспособности сети, рассмотрим двухкритериальную лексикографическую задачу оптимизации в следующих постановках [11].

Постановка 1. При мощности удара, не превосходящей W_0, необходимо найти множество ребер $R(w^*)$, при удалении которых из сети разъединяется хотя бы одна тяготеющая пара, такое, что сумма требований для разъединенных пар максимальна.

Постановка $1'$**.** Необходимо найти множество $R(w^*)$ из не более l_0 ребер, при удалении которых из сети разъединяется максимальное число тяготеющих пар.

Постановка 2. Найти удар w^* минимальной мощности $U(w^*)$, разъединяющий хотя бы одну тяготеющую пару.

Постановка $2'$**.** Найти удар w^*, выбивающий минимальное число l^* ребер, при удалении которых из сети была бы разъединена хотя бы одна тяготеющая пара.

Под эффективным использованием мощности удара будем понимать следующее. Из двух ударов, разделяющих один и тот же набор тяготеющих пар, предпочтительным будем считать тот, который требует меньших затрат.

Для указанных постановок будем различать две задачи:

1) найти один удар w^* (найти одно, любое решение) — **задача** A**;**

2) найти все множество решений — ударов наносящих максимальный ущерб, кроме неэффективно использующих мощность — **задача** B**.**

§2. Анализ уязвимости МП-сети с помощью потоковых и теоретико-графовых методов

Потоковые, теоретико-графовые, вероятностные, и многокритериальные методы являются традиционными математическими инструментами, с помощью которых исследуются процессы, происходящие в потоковых сетях.

Потоковые методы [15-18], опирающиеся на основополагающую теорему Форда-Фалкерсона [12], позволяют подробно изучать одно- и двухпродуктовые сети. Теоретико-графовые методы анализируют структуру сети [19-22], в частности, ее изменение в случае удаления из последней ребер или вершин. Вероятностными методами решаются проблемы, связанные с надежностью и живучестью сетей [23-28]. Методы многокритериальной оптимизации позволяют наиболее точно описывать и комплексно исследовать МП-сети [1-3].

Задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1', 2, 2'$ имеет свою специфику. С одной стороны условие полного уничтожения ребер делает невозможным применение к ней методов оптимизации, успешно используемых для решения аналогичных задач [2, 3], в которых предполагается частичное понижение пропускной способности любого ребра сети, т.е. непрерывность переменных, ставших дискретными в постановках $1, 1', 2, 2'$. С другой стороны предполагаемое в указанных постановках целенаправленное разрушающее воздействие, приводящее к наихудшим последствиям для пользователей, вряд ли можно рассматривать как случайное многократно повторяющееся событие. В этой ситуации трудно представить себе вероятностную модель, которая позволила бы достоверно описать такое воздействие. Таким образом, вероятностный и нормативный [1] подходы оказываются неприменимы к задаче анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1', 2, 2'$. Далее рассмотрим случаи, в которых для решения поставленной задачи могут применяться потоковые и теоретико-графовые методы.

Исследуем задачу анализа уязвимости МП-сети с постановках $1, 1', 2, 2'$ в предположении, что нападающий не ограничен в мощности наносимого удара, т.е. допустим, что у противника достаточно ресурсов для разрушения любого разреза сети.

Определение 1. Разрезом для связного графа G называется множество ребер таких, что удаление их из G приводит к несвязному графу.

Определение 2. Пропускной способностью разреза называется сумма пропускных способностей ребер, входящих в этот разрез. Величину пропускной способности произвольного разреза R обозначим через $Y(R)$,

$$Y(R) = \sum_{r_k \in R} y_k.$$

Далее будем рассматривать два вида пропускной способности: исходную y_k и единичную пропускную способность. В последнем случае пропускная способность разреза равна числу входящих в него ребер.

Определение 3. Разрезом для тяготеющей пары называется множество ребер таких, что их удаление из сети разрушает все пути соединения для этой тяготеющей пары.

Определение 4. Минимальным разрезом для тяготеющей пары называется разрез с минимальной пропускной способностью из разделяющих источник и сток данной тяготеющей пары. Минимальным сетевым разрезом будем называть минимальный по всем тяготеющим парам из минимальных разрезов тяготеющих пар.

Оптимальным решением задачи уязвимости МП-сети в постановках $2, 2'$ для задачи A является минимальный сетевой разрез, или все такие разрезы для задачи B. Решение может быть найдено следующим образом. Для каждой тяготеющей пары вершин с помощью полиномиального потокового алгоритма, например Эдмондса - Карпа (сложность $O(na^2)$ [29], для планарных графов — $O(n \log n)$ [30], где n — число вершин, a — число ребер), определим минимальный разрез для ее разделения, затем среди всех построенных разрезов выберем минимальный сетевой для задачи А, или все такие разрезы для задачи В. При этом решение задачи А оказывается эквивалентно решению задачи В, поскольку сначала находятся все минимальные разрезы тяготеющих пар, а затем из них выбирается минимальный сетевой разрез (или все такие разрезы).

Утверждение 1. Задача анализа уязвимости МП-сети в постановке $2, 2'$ (задачи А,В) допускает эффективное решение, при условии, что мощности удара W_0 достаточно для разрушения минимального сетевого разреза. Решение задачи — соответствующие минимальные сетевые разрезы, сложность — не более $O(mna^2)$, для планарных графов — $O(mn \log n)$, где m — число тяготеющих пар.

Определение 5. Многопродуктовым разрезом (МП-разрезом) называется множество ребер таких, что удаление их из сети разрушает все пути соединения для всех тяготеющих пар. Пропускная способность МП-разреза — сумма пропускных способностей всех входящих в него ребер.

Определение 6. Минимальным МП-разрезом называется разрез с минимальной пропускной способностью.

Сформулируем задачу о минимальном МП-разрезе [31]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, набор тяготеющих пар $M = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$, и вес каждого ребра $c(r)$, $C : A \to N$. Найти минимальный МП-разрез, т.е. множество ребер $R \subseteq A$, удаление которого из G разделит источник и сток каждой тяготеющей пары из M, и имеющее минимальный вес. Далее вес ребра $c(r)$ будем отождествлять с его пропускной способностью.

Если мощности удара W_0 достаточно для разрушения минимального МП-разреза, решение задачи анализа уязвимости МП-сети совпадает с решением задачи о минимальном МП-разрезе. Однако последняя в общем случае является NP-трудной [32] для любого $m > 2$ [33], и NP-трудной для нахождения приближенного решения [34]. Для $m = 2$ задача о минимальном МП-разрезе может быть решена за полиномиальное время, например, двухкратным применением потокового алгоритма, находящего минимальный разрез для пары вершин.

Можно указать три класса графов, для которых задача построения минимального МП-разреза является полиномиально разрешимой — кольцевые графы, ориентированные и корневые деревья. Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 2. Задача анализа уязвимости МП-сети в постановке $1, 1'$ (задачи А,В) допускает эффективное решение для двухпродуктовой сети, и для сетей, граф которых являются кольцевым графом (сложность $O(\min[an^2, n^3])$, где a — число ребер, n — число вершин графа [35]), ориентированным или корневым деревом (сложность соответственно $O(\max[m^2 \log n, n^2 \log n])$ и $O(\min[an, n^2])$, где m — число тяготеющих пар [36]), при условии, что $W_0 \geq \sum\limits_{r_j \in R(w^*)} y_j$. Решением задачи в этом случае является соответствующие минимальные МП-разрезы.

В работе [34] представлен потоковый полиномиальный $O(\log m)$ — аппроксимационный алгоритм, позволяющий находить допустимое решение задачи о минимальном МП-разрезе, вес которого не превосходит величины $F \cdot O(\log m)$, где F — максимальный поток в сети, m — число тяготеющих пар. Дальнейшие исследования [37] подтверждают изложенный выше результат для конкурентного распределения потоков, а [38] — понижают трудоемкость алгоритма до $O(\log k^*)$, где k^* — мощность минимального вершинного покрытия графа тяготений.

В задаче о минимальном МП-разрезе не учитываются изменения величин потоков в поврежденной сети и удовлетворенность требований пользователей, а ведется поиск разреза, разделяющего все тяготеющие пары. Поэтому она, хотя и решается с помощью потоковых методов, является скорее комбинаторно-графовой, чем сетевой. Рассмотрим случаи, когда уязвимость МП-сети можно исследовать с помощью теоретико-графовых методов.

Задача анализа уязвимости сети в постановках 1,1',2,2' предполагает поиск такого разреза, что его удаление из сети разрушит все пути соединения хотя бы для одной тяготеющей пары, то есть между выделенной парой вершин. Схожие задачи исследуются теорией графов в разделе, изучающем связность [39]. Под связностью далее будем подразумевать реберную связность [40].

Определение 7. Неориентированный граф $G = \langle N, A \rangle$ называется k-связным относительно пары вершин $v_1, v_2 \in V$, если после удаления любых $(k-1)$ ребер останется путь, соединяющий v_1 и v_2. Граф G называется k-связным, если он k-связен относительно любой пары вершин.

Определение 8. Числом реберной связности называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Определение 9. Остовным деревом называется подграф данного графа, содержащий все его вершины и являющийся деревом.

Сформулируем несколько классических задач теории графов, результаты решения которых позволяют исследовать некоторые частные случаи задачи анализа уязвимости сети.

I. Задача о минимальном разрезе графа [31]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, вес каждого ребра $c(r), C : A \to N$. Найти разрез минимального веса, разделяющий данный граф на две непустые части.

II. Задача о связностных характеристиках графа [41, 39]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, и целые числа δ, k. Существует ли k-элементное множество $A' \subset A$ такое, что $G - A'$ состоит по крайней мере из δ связных компонент. В случае $\delta = 2$, задача II называется задачей о поиске числа k реберной связности и по сути является задачей о минимальном разрезе для графа с единичными весами ребер.
III. Задача о минимальном δ-разрезе [31]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, вес каждого ребра $c(r), C : A \to N$, и целое число δ. Найти разрез минимального веса, разделяющий данный граф на δ непустых частей.

В общем случае задача о минимальном разрезе является полиномиально разрешимой, и для ее решения традиционно используются потоковые методы. Однако все чаще им на смену приходят более быстрые алгоритмы, опирающиеся на вероятностные [42-44], эвристические [45], и другие [46, 47] методы. Общий случай задачи о связностных характеристиках графа является NP-полным для любого $2 < \delta < n$ [39]. Задача о минимальном δ-разрезе NP-трудна для любого $2 < \delta < n$ [31], и полиномиально разрешима в случае построения приближенного решения [48].

Используя задачу о поиске числа k реберной связности для графа многопродуктовой сети с единичной пропускной способностью, можно определить достаточное условие для случая, когда решения задачи уязвимости в рассматриваемых постановках не существует. Действительно, если для графа с единичной пропускной способностью ребер число реберной связности $k > l_0$, то задача в постановках 1',2' решения не имеет.

В задачах I-III, как и в рассматриваемых постановках задачи анализа уязвимости МП-сети, предполагается поиск разрезов, удаление которых из сети нарушает связность исследуемых графов. В первом случае изучается только структура графа: определяется число ребер, или вес соответствующего разреза. Во втором случае мы пытаемся увеличить число разъединенных тяготеющих пар, удаляя ребра, при этом граф сети становится несвязным. Однако разделение графа сети на две или более связных компонент в общем случае не означает разъединение хотя бы одной тяготеющей пары в сети (источник и сток могут оказаться в одной связной компоненте для всех видов продуктов). Таким образом, расположение тяготеющих пар, наличие транзитных вершин и требований на поток в общем случае определяет недостаточность методов, используемых при решении задач I-III, для исследования уязвимости многопродуктовых сетей. Тем не менее, нарушение связности графа дает решение задачи в постановке 2 для МП-сети в случае, когда множество N^p вершин графа тяготений G^p совпадает со всем N, и граф G^p содержит остовное дерево физического графа G. Такой граф тяготений обозначим G^p_o. В самом деле, если в графе G нет транзитных вершин, и граф тяготений G^p_o состоит из одной связной компоненты, то разбиение графа G на две части автоматически влечет за собой разделение хотя бы одной тяготеющей пары.

В случае G^p_o решения задачи анализа уязвимости в постановках $2{,}2'$ могут быть найдены с помощью полиномиального алгоритма поиска минимального разреза [49]. Этот алгоритм позволяет построить любой минимальный разрез для графа, ребра которого имеют единичную пропускную способность за $O(n(a+1))$ операций.

Для графа G с тяготениями G^p_o минимальный реберный разрез является минимальным сетевым, поэтому решение задачи A в постановке $2'$ — минимальный реберный разрез, построенный для графа G, все ребра которого имеют единичную пропускную способность. Если число ребер в минимальном сетевом разрезе не превосходит l_0, то это — решение. Иначе —

нет решения.

Для решения задачи A в постановке 2 каждое ребро графа G с пропускной способностью больше единицы представим кратными ребрами единичной пропускной способности. Решение задачи A в постановке 2 дает любой построенный минимальный разрез для графа сети с кратными ребрами. Если число ребер в нем не превосходит W_0, то он и является минимальным сетевым разрезом. Иначе — нет решения.

Из результата [49] также следует, что существует полиномиальный алгоритм, строящий все минимальные разрезы графа. Он имеет тот же порядок сложности, что и алгоритм Форда-Фалкерсона — $O(\lambda n^2)$, где λ — число ребер в минимальном разрезе графа G, но алгоритм из [49] находит все минимальные разрезы, а алгоритм Форда-Фалкерсона — только между заданной парой вершин. Используя алгоритм из [49] , для задачи в постановке 2 укажем все минимальные разрезы для сети G с ребрами, имеющими единичную пропускную способность. Для задачи в постановке $2'$ укажем все минимальные реберные разрезы для графа с кратными ребрами единичной пропускной способности. Таким образом, нами доказано

Утверждение 3. Для случая графа тяготений G_o^p задачи А, В в постановках 2, $2'$ допускают эффективное решение. Решение задачи — соответствующие минимальные разрезы сети, сложность — $O(\lambda n^2)$, где n — число вершин, λ — число ребер в минимальном разрезе графа G.

Заметим, что специфика графа тяготений G_o^p позволяет снизить сложность поиска решения для задачи в постановках 2, $2'$ с $O(mna^2)$ до $O(\lambda n^2)$. К сожалению, для постановок $1, 1'$ даже в случае G_o^p, изложенный выше полиномиальный алгоритм применить не удается, для них таким образом можно только убедиться в отсутствии решения.

Сформулируем еще одну классическую задачу, решение которой в одном из частных случаев совпадает с решением задачи уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$.

IV. Задача о минимальном терминальном разрезе [31]. Дан граф $G = \langle V, A \rangle$, множество вершин $S \subseteq V$, называемых терминалами, и вес каждого ребра $c(r), C : A \to N$. Найти минимальный разрез, разделяющий все пути между всеми терминалами, т.е. множество ребер $R \subseteq A$, удаление которого из G отделит любой терминал из S от других, и имеющее минимальный суммарный вес.

Задача о минимальном терминальном разрезе NP-полна для любого $|S| > 2$, и остается NP-полной для построения приближенного решения [33]. Лучший полиномиальный аппроксимационный алгоритм, который строит допустимое решение этой задачи изложен в [51].

Задача IV значительно ближе по смыслу к задаче анализа уязвимости МП-сети в постановках 1,1', чем задачи I-III. Действительно, если в I-III требуется просто разделить граф минимальным разрезом на $\delta \geq 2$ непустых частей, то в IV граф делится минимальным разрезом на части так, что каждая из них содержит не более одной терминальной вершины. В этом случае терминальные вершины можно рассматривать как аналоги источников и стоков тяготеющих пар МП-сети. Однако задача IV предполагает отделение любого терминала от остальных, что значительно ужесточает условие по сравнению с постановками $1, 1'$, в которой не требуется даже связности графа тяготений. Поэтому решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ совпадает с решением задачи о минимальном терминальном разрезе только для случая полного графа тяготений G^p в случае, когда мощности удара достаточно для разрушения соответствующего разреза. При этом не требуется совпадения множеств N и N^p, а это означает, что не каждая вершина графа G обязана быть источником или стоком какоголибо продукта, т.е. в графе G допускается наличие транзитных вершин.

Анализ задач I-IV позволяет сделать следующий вывод. Теоретико-графовый подход не учитывает структуру требований пользователей, что фактически означает исследование одного частного случая — МП-сети с полным графом тяготений.

Обратим внимание на некоторые особенности построения решения общего случая задачи анализа уязвимости сети в постановках $1, 1', 2, 2'$. Предположим, что нам неизвестно достаточно ли у нападающего ресурсов для разрушения соответственно минимального сетевого и минимального многопродуктового разрезов. Кроме того, допустим, что в сети более двух видов продуктов, физический граф не является кольцевым графом, ориентированным или корневым деревом, а логический — является связным, но не полным.

Для решения задачи анализа уязвимости МП-сети в любой из рассматриваемых постановок с помощью полиномиальных алгоритмов разумно построить минимальный сетевой разрез. Если ресурсов нападающего недостаточно для разрушения этого разреза, то решения задачи в постановках $1, 1', 2, 2'$ не существует. Если ресурсов нападающего достаточно, то построенный минимальный сетевой разрез является оптимальным решением задачи в постановках $2, 2'$, и некоторым решением задачи в постановках $1, 1'$. Кроме того, такой результат указывает на перспективность продолжения поиска оптимального решения для постановок $1, 1'$. Чтобы не ограничиваться тривиальным случаем, далее будем считать, что МП-разрез, разделяющий более двух тяготеющих пар, и минимальный сетевой разрез, пропускная способность которых не превосходит W_0, в сети существуют.

В силу невыполнения условия потоково-разрезной двойственности, даже если ресурсы нападающего равны по величине сумме всех требований на поток, это не означает, что в сети найдется минимальный МП-разрез с соответствующей пропускной способностью. Таким образом, определение величины удара, достаточной для разрушения минимального МП-разреза оказывается эквивалентно решению NP-полной задачи о построении последнего.

Обозначим через $I(R)$ множество номеров тяготеющих пар, разделенных разрезом R. Если R' — минимальный МП-разрез, то $|I(R')| = m$. Предположим, что нам известно, что ресурсов нападающего недостаточно для разрушения минимального МП-разреза, например, если W_0 заведомо меньше суммы всех требований на поток. Тогда оптимальным решением задачи анализа уязвимости является разрез R^*, разделяющий непустое множество тяготеющих пар с номерами $I(R^*) \subset M$, и пропускной способностью $Y(R^*) \leq W^0$, удаление которого из сети наносит максимальный ущерб пользователям. Определить его, объединяя построенные полиномиальным алгоритмом минимальные разрезы тяготеющих пар, не удается. Действительно, если в сети существует разрез R, разделяющий, например, три тяготеющих пары так, что $\quad Y(R) > Y(R_i^*), \quad i = \overline{1,3}$, где R_i^* — минимальный разрез для пары $p_i, \quad R \bigcap R_i^* = \varnothing$, и $Y(R) < \sum_{i=1}^{3}(Y(R_i^*))$, то R — оптимальное решение.

В работе [52] высказывается предположение об NP-трудности задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ для $m > 2$, хотя в литературе отсутствуют прямые ссылки на эту задачу как на NP-трудную. Близкие по смыслу задача сетевого торможения [53, 54], задача торможения сети с единственным сервером [52] для однопродуктовой сети и задача о разделении для однопродуктовой сети с единственным источником и несколькими стоками [55] являются соответственно NP-полными и NP-трудной. Результаты исследования частных случаев задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ говорят скорее о ее вычислительной сложности. Основная трудность, с которой мы сталкиваемся решая задачу в этих постановках состоит в том, что до построения произвольного разреза R сети D мы не можем знать точно, сколько тяготеющих пар он разделит, и какой ущерб будет нанесен вследствие его разрушения. Очевидно, что и то, и другое зависит от имеющихся у нападающего ресурсов, расположения тяготеющих пар, структуры сети и пропускной способности ребер. Для $|I(R^*)| > 2$ оптимальное решение R^* в общем случае вряд ли можно найти с помощью полиномиального алгоритма.

Задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ является задачей на поиск максимального значения соответствующей целевой функции, кроме того, из условия полного уничтожения ребер следует, что множество ее допустимых решений хотя и велико, но конечно. Это дает нам право рассматривать указанную задачу как задачу дискретной оптимизации [8, 9]. Для их решения, как правило, применяют либо приближенные, либо комбинаторные методы.

Суть первой группы методов состоит в отказе от поиска оптимального решения и построении вместо него приближенного, или ε-оптимального [9, 56] за приемлемое время.

Для задачи в постановке $1, 1'$ ε-оптимальным решением логично было бы считать разрез R^ε, наносящий пользователям ущерб, "близкий"к максимальному. Проблема состоит в том, как рассчитать величину такого ущерба не зная решения задачи. С одной стороны, определять возможный ущерб как часть ресурсов нападающего не имеет смысла (например, в избыточной сети, пропускные способности которой используются не полностью, ущерб от удаления разреза R может составлять достаточно малую часть от $Y(R)$, в то время, как в неизбыточной ущерб и удар могут быть равны). С другой стороны, если искать R^ε, наносящий наибольший ущерб среди разрезов с заданной пропускной способностью, например, $Y(R^\varepsilon) = W_0$, то, во-первых, до построения не понятно, существуют ли в сети разрезы с такой пропускной способностью; во-вторых, если такие разрезы есть, и они разделяют более двух тяготеющих пар, то задача их поиска оказывается NP-трудной.

ε-оптимальным можно было бы считать решение, полученное комбинированием минимальных разрезов тяготеющих пар. В этом случае мы действительно получаем хороший выигрыш, поскольку находим R^ε полиномиальным алгоритмом. Однако здесь возникает вопрос о том, насколько ущерб от удаления такого разреза близок к максимальному. Вычислительный эксперимент показывает, что ущерб от удаления R^ε — комбинации минимальных разрезов может отличаться от ущерба, соответствующего оптимальному решению, в несколько раз.

Возникшие трудности ставят под сомнение целесообразность построения ε-оптимального решения для задачи в постановках $1, 1'$. Далее перейдем к построению оптимального решения. Воспользуемся комбинаторными методами, с помощью которых делается попытка максимально сократить перебор, хотя при этом признается, что на решение задачи в "худшем"случае алгоритму потребуется экспоненциальное время [57]-[60]. К наиболее часто применяемым способам сокращения перебора относятся методы, основанные на схемах "ветвей и границ"[8, 9, 61] или "оценочных функций"[62]-[64]. Эти схемы состоят в построении "частичных решений", представленных в виде ветвей дерева поиска, и в получении нетривиальных оценок, позволяющих исключить проверку вариантов, которые доминируются построенными ранее решениями.

§3. Алгоритмы построения и комбинирования простых разрезов

Рассмотрим задачи A и B в постановках $1, 1'$ для сетей, физический и логический графы которых являются разреженными, т.е. связными, но с небольшими степенями вершин. Предположим, что все требования на поток в сети удовлетворяются, а ресурсы нападающего не позволяют разрушить минимальный МП-разрез.

Напомним, что величина пропускной способности произвольного разреза R выше была нами обозначена через

$$Y(R) = \sum_{r_k \in R} y_k,$$

а множество номеров тяготеющих пар, разделенных произвольным разрезом R — через $I(R)$: $\quad I(R) = \{i|\ R \text{ разделяет } p_i\}$. Последнее означает, что любой путь из вершины v_{s_i} в v_{t_i} содержит какое-либо ребро из разреза R.

Множество ребер $R \subset A$ является разрезом, делящим связный граф $G = \langle N, A\rangle$ на n связных компонент, если после его удаления из G последний распадается на n связных графов $G_1 = \langle N_1, A_1\rangle, ..., G_n = \langle N_n, A_n\rangle$. При этом $N_1 \bigcup ... \bigcup N_n = N$, $A_1 \bigcup ... \bigcup A_n = A \backslash R$, и $N_i \bigcap N_j = \varnothing$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ для любого $i \neq j$. Заметим, что в самом общем случае для любого k в разрез R могут входить не только ребра $r = (v_i, v_j)$, для которых $v_i \in N_k$ и $v_j \notin N_k$, но и некоторые ребра r, для которых $v_i \in N_k$ и $v_j \in N_k$. Ниже будем полагать, что граф G состоит из одной связной компоненты. Множества вершин и ребер подграфа G_i будем обозначать соответствующим индексом i, т.е. считать, что G_i включает в себя множества вершин N_i и ребер A_i.

Введем следующие определения.

Определение 10. Простым разрезом графа G назовем такой разрез R, у которого любое собственное подмножество элементов разрезом не является, т.е. R — простой, если любое подмножество $R' \subset R, R' \neq R, R' \neq \varnothing$, не является разрезом.

Определение 11. Простым разрезом для множества тяготеющих пар с индексами I будем называть такой простой разрез R графа G, для которого $I(R) = I$. Далее нас будут интересовать те простые разрезы R сети, для которых $I(R) \neq \varnothing$.

Определение 12. Несократимым разрезом назовем такой разрез R графа G, что удаление любого ребра r из R приводит к уменьшению ущерба пользователей, т.е. R несократим, если $\forall\ r \in R, \quad I(R \backslash \{r\}) \subset I(R)$.

Определение 13. Для произвольного разреза R введем величину $S(R)$ ущерба пользователей как сумму требований на поток, который невозможно удовлетворить в сети после удаления R:

$$S(R) = \sum_{i \in I(R)} d_i. \tag{3}$$

Задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ состоит в поиске

$$\max_{R \subseteq A} S(R), \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{r_k \in R} y_k \leq W_0. \tag{5}$$

В §1 нами было сделано предположение о том, что противник использует мощность удара эффективно, поэтому решение задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети в постановках $1, 1'$ будем искать среди несократимых разрезов. Для решения задачи воспользуемся следующим свойством последних.

Свойство 1. Пусть разрез R разделяет граф G на две связные компоненты, и $I(R) \neq \varnothing$. Этот разрез несократим тогда и только тогда, когда он простой.

Указанное свойство является основополагающим, поскольку из него следует, что если ресурсы нападающего ограничены небольшой величиной W_0 и удар, нанесенный по сети, не может разрушить более одного разреза, разделяющего непустое множество тяготеющих пар, то решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ следует искать среди множества всех простых разрезов сети, для которых $I(R) \neq \varnothing$ и $Y(R) \leq W_0$. При этом решение задачи А эквивалентно решению задачи В кроме случая постановки 1, когда ущерб от удаления разреза-решения равен пропускной способности этого разреза и величине W_0.

В общем случае для решения задачи придется построить не множество $\overline{R} = \{R \mid R$ – простой, $I(R) \neq \varnothing, Y(R) \leq W_0\}$, а более широкое множество $\mathcal{R}$ всех простых разрезов сети, так как до построения разреза трудно определить, разделит ли он какие-нибудь тяготеющие пары. Если в сети нет транзитных вершин, т.е. $N = N^p$, то $I(R) \neq \varnothing$ для любого разреза R из $\mathcal{R}$. Вообще говоря, до удаления произвольного разреза из сети, независимо от способа его построения, часто сложно понять, является ли он простым. Исключения составляют разрезы, отделяющие от графа висячие вершины, точки сочленения и ребра-мосты. Очевидно, что в первом случае соответствующий разрез – простой, в остальных — нет. Таким образом, построение множества $\mathcal{R}$ — отдельная, достаточно непростая задача.

Для построения множества $\mathcal{R}$ всех простых разрезов сети предлагается использовать *алгоритм построения простых разрезов (АППР)*[11]. Суть работы АППР состоит в следующем. Рассмотрим все множества $N_1' \subset N$, содержащие одну вершину, и с помощью полиномиального алгоритма пометок ПОИСК [7], исследуем на связность соответствующие подграфы $G \backslash G_1'$. Таким образом построим простые разрезы R^1, разделяющие подграфы $G^1 = v^i$ и $G \backslash v^i$. Вершины, которые отделяются от графа простыми разрезами, поместим в N^1. Далее рассмотрим только такие множества N_2', содержащие две смежных вершины, у которых одна из вершин входит в N^1. Перебирая все вершины, смежные с каждой из $v^i \in N^1$, мы рассмотрим все подграфы $G_2', G_2' = \langle \{v^i, v\}, (v^i, v) \rangle$, проверим на связность $G \backslash G^2$, и построим все соответствующие простые разрезы R^2. Занесем отделяемые простыми разрезами пары вершин в N_2. Далее рассмотрим только такие множества N_3', содержащие тройку смежных вершин, у которых пара вершин входит в N^2. И так далее.

Допустим, что нами построены все последовательности связных подграфов G^j и соответствующие последовательности простых разрезов R^j до номера $i < m - 1$ включительно. Для построения очередного простого разреза R^{i+1} рассмотрим все возможные множества $N_{i+1}' = N^i \bigcup v$, где вершина v является смежной с одной из вершин из N^i, подграфы $G^i, G \backslash G^i$ — связны, R^i, отделяющий G^i от $G \backslash G^i$, — простой. При этом, если множество N_i' состоит из i вершин, но простого разреза, отделяющего G_i' от $G \backslash G_i'$ не существует, то ни одно из множеств $N_{i+1}' = N_i \bigcup v$, где вершина v является смежной с одной из вершин из N_i, нами рассматриваться не будет, и процесс построения $\mathcal{R}$ будет закончен. Мы рассмотрим подграфы G^{i+1}, исследуем связность подграфа $G \backslash G^{i+1}$ и построим разрез R^{i+1}. С помощью предложенной процедуры будут найдены соответственно все простые разрезы $\mathcal{R}$, отделяющие от связного подграфа $G \backslash G_i'$ подграф $G_i', i = \overline{1, m}$, каждый из которых является связным и содержит одну, две, ..., m смежных вершин.

Теоретическое обоснование, формализованное описание и доказательство допустимости АППР можно найти в [11].

Вопрос о сложности АППР остается открытым, поскольку она зависит от числа простых разрезов в сети. Если граф сети и граф тяготений — полные, то каждый разрез такого графа — простой. В этом случае число разрезов экспоненциально зависит от числа вершин, и, следовательно, построение всех разрезов потребует экспоненциального числа операций. В кольцевом графе число простых разрезов $O(n^2)$. Для произвольного графа не удается заранее определить, является ли простым разрез, отделяющий выбранные смежные вершины от графа G, поэтому в общем случае не представляется возможным подсчитать до построения число простых разрезов такого графа. Вопрос об оценке числа простых разрезов пока остается открытым даже для регулярных графов со степенью вершины три. Оценкой сверху для числа простых разрезов может служить общее число разрезов графа.

Решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ для случая, когда ресурсы нападающего ограничены небольшой величиной W_0 выберем из построенного $\mathcal{R}$ исходя из ограничения на удар. Вместе с решениями задачи в постановках $1, 1'$, $\overline{R}$ содержит и решения в постановках $2, 2'$ (если эти решения существуют), поскольку очевидно, что минимальный сетевой разрез является простым и разделяет непустое множество тяготеющих пар. Таким образом, решение задача анализа уязвимости МП-сети в постановках $2, 2'$ может быть найдено в процессе поиска решения для постановок $1, 1'$.

Допустим, что ресурсы нападающего превосходят пропускную способность простого разреза с минимальной пропускной способностью. Более того, предположим, что удар, нанесенный по сети, может разрушить одновременно несколько разрезов, каждый из которых разделяет непустое множество тяготеющих пар. В этом случае решение задачи анализа уязвимости МП-сети в постановках $1, 1'$ будем искать в виде комбинации простых разрезов R из $\overline{R}$. В [11] показано, что любой несократимый разрез графа G представим в виде объединения простых разрезов этого графа. Тогда для решения поставленной задачи достаточно построить все возможные комбинации простых разрезов исследуемого графа и выбрать из них комбинацию простых разрезов — несократимый разрез, удовлетворяющий условиям (4), (5) для задачи A (все несократимые разрезы, удовлетворяющие условиям (4), (5) для задачи B).

Для решения задачи анализа уязвимости многопродуктовой сети в постановках $1, 1'$ для случая, когда ресурсов нападающего достаточно для разрушения нескольких простых разрезов одновременно, предлагается метод, основанный на схеме ветвей и границ. В качестве вариантов будем использовать различные комбинации разрезов из $\overline{R}$. Если в сети D нет транзитных вершин, $N = N^p$, и ее граф тяготений является связным, то все построенные простые разрезы будут автоматически удовлетворять условию $I(R) \neq \varnothing$, и для построения $\overline{R}$ из $\mathcal{R}$ достаточно будет выбрать R согласно (5). Разрез, отделяющий от подграфа $G \backslash G_i$ связную компоненту G_i так, что $G \backslash G_i$ распадается на q частей, будем считать объединением нескольких простых разрезов.

На предварительном этапе поиска решения поставленной задачи для исследуемой сети с помощью алгоритма АППР построим все простые разрезы, пропускная способность которых не превосходит W_0. Вычислим для них значения величины ущерба $S(R)$, для определенности упорядочим эти простые разрезы по невозрастанию $S(R)$ и перенумеруем: $R_1, R_2, ..., R_v$. Таким образом, разрез R_1 будет иметь максимальное значение $S(R)$. Решение задачи уязвимости многопродуктовой сети в постановках $1, 1'$ будем искать в виде комбинации разрезов $R_1, R_2, ..., R_v$. Для удобства воспользуемся деревом перебора.

Корневая вершина O соответствует началу поиска, из нее выходят дуги, каждая из которых обозначает один из разрезов $R_1, R_2, ..., R_v$. Вершины дерева обозначают кандидатов на ветвление. На первом ярусе им соответствуют разрезы, построенные на предварительном этапе, на последующих ярусах — различные комбинации разрезов $R = R_a \bigcup R_{a+1} \bigcup ... \bigcup R_n$, полученные в процессе построения дерева перебора. Далее под R будем подразумевать комбинацию простых разрезов

$$R = R_a \bigcup R_{a+1} \bigcup ... \bigcup R_n, a < n. \qquad (6)$$

При ветвлении вершины, не являющейся корневой, дуга будет соответствовать простому разрезу первого яруса, который объединяется с простым разрезом (комбинацией разрезов), соответствующим этой вершине. При построении дерева перебора дуги, отвечающие простым разрезам R_i, разместим по порядку слева направо: $R_1, R_2, ...R_v$. Каждая ветвь такого дерева образует вариант удаления из сети некоторой комбинации простых разрезов R. Полное дерево перебора содержит все возможные комбинации разрезов, построив его, мы, очевидно, построим и решение поставленной задачи. Однако при этом будет рассмотрено много не относящихся к делу комбинаций разрезов, поэтому будем вести поиск решения и построение части дерева перебора, его содержащей, одновременно. Далее этот процесс будем называть поиском на дереве перебора. В зависимости от того, как он организован, будет построена бóльшая или меньшая часть дерева. В худшем случае дерево перебора придется строить полностью.

Определение 15. Оценкой ущерба пользователей после удаления из сети комбинации разрезов R, назовем сумму величин ущерба пользователей при удалении из сети каждого разреза, входящего в $R = (R_a \bigcup ... \bigcup R_l \bigcup R_n)$ в отдельности, и обозначим ее $\overline{S}(R)$, т.е.

$$\overline{S}(R) = S(R_a) + ... + S(R_l) + S(R_n). \qquad (7)$$

Для произвольного простого разреза R оценку $\overline{S}(R)$ будем считать равной $S(R)$, т.е. $\overline{S}(R) = S(R)$. Если $J(R)$ — множество номеров разрезов R_j, входящих в R, тогда

$$\overline{S}(R) = \sum_{j \in J(R)} S(R_j). \tag{8}$$

Поиск на дереве перебора будем вести в глубину, о перспективности разрушения простого разреза или комбинации таких разрезов будем судить по оценке величины ущерба, причиненного разделенным пользователям поврежденной сети (после удаления этого разреза или комбинации разрезов). Простые разрезы R_n (или их комбинации R), имеющие бо́льшие значения оценки $\overline{S}(R_n)$ ($\overline{S}(R)$), будем последовательно объединять с простыми разрезами с меньшими значениями $\overline{S}(R_t)$, $t = n+1, n+2, ...$, так, чтобы не выйти за границу силы удара W_0. Будем следить, чтобы каждый разрез, присоединяемый к уже построенной комбинации, разделял хотя бы одну тяготеющую пару, не разделенную этой комбинацией ранее, и отсекать бесперспективные ветви, если сила удара, необходимая для уничтожения комбинации простых разрезов, больше W_0. Такое построение дерева перебора отвечает нашему предположению о том, что противник использует свои ресурсы эффективно (§1).

Основным критерием, позволяющим отсекать как бесперспективные целые ветви дерева перебора, будем считать ограничение на силу удара. Дополнительным — оценку величины ущерба, нанесенного пользователям удалением из сети разреза R. Тогда перебор можно сократить, не рассматривая такие комбинации простых разрезов (6), оценка ущерба от удаления которых из сети $\overline{S}(R)$ меньше ущерба от удаления построенного решения R^*, т.е. отсечь на дереве такие ветви, отвечающие R, для которых $\overline{S}(R) < S(R^*)$, при условии, что $Y(R) \leq W_0$. Более того, мы можем отсечь все ветви, расположенные правее ветви R и ниже вершины R_a. Перечисленные правила построения дерева перебора будем называть соответственно правилами ветвления и отсечения.

Изложенный выше в общих чертах алгоритм формализован в [11] и назван *алгоритмом комбинирования простых разрезов (АКПР)*. В той же работе можно найти теоретическое обоснование, описание свойств и доказательство допустимости предложенного алгоритма.

Для решения задачи А в постановке 1 одно решение достаточно построить только в том случае, если в исследуемой сети до атаки все требования на поток были полностью удовлетворены, а после удара максимальный ущерб пользователей оказался равен пропускной способности разрушаемого разреза и силе удара W_0. В остальных случаях решение задачи А оказывается эквивалентно решению задачи В. Действительно, только после построения множества всех оптимальных решений R^*, т.е. комбинаций простых разрезов, ущерб от удаления которых из сети G не меньше рекордного, из R^* можно выбрать комбинацию разрезов, ущерб от удаления которой из сети будет максимальным.

Теперь обратимся к решению задачи В в постановке $1'$. Напомним, что в этой постановке пропускная способность всех ребер исследуемой сети и требования для всех тяготеющих пар полагаются равными единице, поскольку противник просто стремится разделить максимальное число тяготеющих пар, удалив минимальное число ребер. При этом поток между тяготеющими парами является величиной условной, и по отдельным ребрам сети с пропускной способностью единица может проходить несколько различных потоков. Вследствие этого решением задачи в постановке $1'$ может являться разрез, удаление которого из сети наносит пользователям ущерб, больший его пропускной способности. Поэтому решение задачи А в постановке $1'$ всегда оказывается эквивалентно решению задачи В.

Применив описанный выше алгоритм АКПР к сетям с единичными, и требованиями, и пропускными способностями, мы также получим часть дерева перебора, обладающую свойствами 1 – 3. Использование алгоритма АКПР для исследования простейшим сетей, физические графы которых имеют по 4-6 вершинах со степенями не более четырех и различными графами тяготений, практически не дает сокращения перебора. Эта неудача объясняется небольшим числом вершин и тяготеющих пар в сети, что в свою очередь обусловливает наличие в сети оптимальных решений, являющихся простыми разрезами. Для поиска решения в этом случае достаточно с помощью алгоритма АППР построить простой разрез, удаление которого наносит максимальный ущерб пользователям или все такие разрезы. Комбинирование в такой ситуации теряет смысл. Более адекватные примеры рассмотрим в §4.

Прежде чем перейти непосредственно к вычислительному эксперименту, обратим внимание на следующее: алгоритм АКПР по своей сути является направленным поиском в пространстве состояний [62, 63], каждое из которых определяется удалением из сети одного или нескольких простых разрезов. На базе этого метода в последнее время активно разрабатываются экспертные системы, позволяющие оценивать уязвимость реальных сетей, в частности Интернета. В качестве модели для исследования рассматривается однопродуктовая сеть, по которой наносится удар ограниченной мощности. Все возможные последствия атаки описываются как пространство состояний, в котором ведется поиск оптимального решения — пути перехода системы из начального состояния в целевое. Под целевым, как правило, понимается состояние, приводящее к максимальному падению потока в сети вследствие уменьшения пропускной способности ребер или полного разрушения последних. При этом предполагается, что ресурсов атакующего недостаточно для разрушения минимального разреза.

Наиболее интересный подход к поиску решения в пространстве состояний предложен в [57]. Авторы строят граф "атаки", каждая вершина которого соответствует определенному состоянию системы — разрушению ребра (вершины) или множества ребер (вершин), а дуги — изменению этого состояния вследствие единичного воздействия нападающего, под которым подразумевается удаление из сети отдельного ребра (вершины). В зависимости от постановки задачи каждому ребру присваивается вес, характеризующий, например, затраты нападающего на данное разрушающее воздействие, приводящее к переходу системы из одного состояния в другое, или вероятность того, что данное состояние системы будет достигнуто. Затем с помощью традиционных методов, таких, как построение кратчайшего пути или пути минимальной стоимости, для взвешенного графа "атаки" строится оптимальное решение задачи, например минимального веса. При этом поиск решения может вестись как от начальной вершины к целевой, так и в обратном направлении [58, 65], кроме того, могут существенно различаться методы построения графа "атаки"[66, 59]. Так, например, в [67] для описания всех возможных состояний системы используются Марковский процесс и формальная логика.

Построение пространства состояний для задачи анализа уязвимости однопродуктовой сети затруднений не вызывает, поскольку естественно считать, что каждое следующее состояние достигается из предыдущего удалением из сети очередной вершины или ребра. Если сеть не является избыточной, то в общем случае такое разрушение действительно ведет к уменьшению потока в сети и к увеличению ущерба пользователей. Другая ситуация складывается в случае удаления вершины или ребра из неповрежденной МП-сети. Если удаляемая вершина не является точкой сочленения или удаляемое ребро — реброммостом физического графа сети, то повреждение не ведет к разделению тяготеющих пар, а поиск в таком пространстве состояний сводится к "составлению" разреза — решения из отдельных ребер.

В [64] исследована возможность анализа уязвимости МП-сети с помощью пространства состояний при условии, что переход системы из состояния в состояние происходит в случае удаления из сети некоторого ребра. Поиск решения проводился на дереве перебора при помощи аппарата оценочных функций. Автором предложены алгоритмы перебора, использующие несколько оценочных функций (равноправных или лексикографически упорядоченных). Алгоритмы из [64] оказались менее эффективными, чем алгоритмы из [11], поскольку последние оперировали как состоянием системы удалением разреза, а не отдельного его ребра, а гарантировать разделение хотя бы одной тяготеющей пары может только удаление из сети соответствующего разреза. Кроме того, оказалось непросто определить "ценность"отдельного ребра для формируемого разреза и логически обосновать предлагаемые оценочные функции. В противоположность этому перспективность разрушения разреза естественно определяется ущербом пользователей поврежденной сети, а использование оценки объяснения не требует. В пользу использования алгоритмов АППР, АКПР говорят и результаты численного эксперимента, к описанию которого перейдем в следующем параграфе.

§4. Вычислительный эксперимент

Для исследования эффективности работы алгоритмов АППР и АКПР был проведен вычислительный эксперимент, который состоял из двух не зависящих друг от друга частей. В первом случае пара АППР-АКПР применялась для исследования модели сети связи, в определенном смысле повторяющей структуру междугородного телефонного обмена России, и нас прежде всего интересовало насколько достоверные оценки позволяет делать предложенный алгоритм. Во втором — для исследования уязвимости разреженных случайных графов, и здесь мы больше обращали внимание на то, как алгоритм справляется с поставленной задачей, т.е. насколько быстро и точно строится оптимальное решение. Вычислительный эксперимент проводился на персональном компьютере $Pentium(R)4$ с объемом оперативной памяти 512 MB, частотой 2.43 GHz. АППР и АКПР были запрограммированы на языке $Microsoft$ $Visual$ C^{++} 2005 под оперативную систему $Microsoft$ $Windows\ HP\ Professional, Version$ 2002.

Для проверки правильности построения оптимального решения дополнительно к АППР были написаны алгоритмы, использующие для построения простых разрезов соответственно полный перебор всех возможных комбинаций ребер графа и полный перебор всех возможных комбинаций отделяемых вершин (ППВ). Заметим сразу, что попытка построить простые разрезы перебором ребер потребовала таких временных затрат, что от нее пришлось отказаться.

Алгоритм ППВ экономичнее полного перебора ребер, его суть состоит в следующем. Для подмножества N' вершин графа $G, 1 < |N'| < n$ исследуется связность порожденного множеством N' подграфа G'. Если он связен, то проверяется и $G \backslash G'$. Если G' и $G \backslash G'$ связны, то разделяющий их разрез R — простой. Для построения всех разрезов делается полный перебор всех возможных комбинаций вершин для N'.

Дополнительно к АКПР были запрограммированы алгоритмы, использующие соответственно полный перебор всех возможных разрезов (ППР) и перебор с помощью дерева. Последний представлен в двух вариантах, каждый из которых предполагает использование дерева перебора, описанного в §3, и величины ущерба пользователей $S(R)$ при выборе вершины для ветвления. При этом первый вариант является упрощением АКПР, так как ветвление и отсечение вершины происходит согласно соответствующим правилам алгоритма АКПР с той лишь разницей, что вместо $\overline{S}(R)$ используется $S(R)$. Назовем этот алгоритм перебором по дереву согласно ущербу (ПДУ). Второй вариант также использует $S(R)$ вместо $\overline{S}(R)$, но у него свое правило ветвления: разрез R_n добавляется к комбинации разрезов, если он содержит хотя бы одно ребро, не входящее в R. Назовем этот алгоритм перебором по дереву согласно ребрам (ПДР).

Работа алгоритмов сравнивалась по следующим критериям: число построенных оптимальных решений и их соответствие; число рассмотренных комбинаций разрезов; число вариантов, которые исследовались на оптимальность (для них вычислялось точное значение ущерба); число ветвей дерева, построенных до конца; время решения задачи.

Перейдем к описанию первой части эксперимента. Была построена умозрительную модель для междугородной телефонной связи городов России в форме МП-сети. Для создания физического графа МП-сети была взята за основу карта железных дорог России. На ней были выбраны до 30 наиболее крупных городов и описаны средние потоки между ними. На этом этапе построения модели считалось, что связь необходима между каждой парой городов. Для определения среднего потока такой пары мы воспользовались подтвержденной практически-ми результатами гравитационной моделью информационного обмена. По ней эвристическая оценка числа необходимых каналов связи составляет $(\frac{X_i X_j}{L_{ij}^2})$, где X_i,X_j — число жителей, L_{ij} — расстояние между городами, которое определяется длиной отрезка, соединяющего города на географической карте. Затем по железнодорожной карте были проложены кратчайшие пути соединения соответствующих пар, они и дали физические ребра. Значение пропускной способности ребер сети подбирались так, чтобы они были достаточны для передачи потока и не избыточны, т.е. целиком заполнены. В построенном таким образом графе оказалось 30 вершин и более 45 ребер, причем для 3 из 30 городов-вершин средние потоки и пропускная способность ребер соединения с другими городами-вершинами оказались на порядок меньше, чем для остальных, в построенном графе этим городам соответствовали “висячие"вершины. Поэтому далее вершины, а значит и города, с такими средними потоками не рассматривались, их потоки переадресовывались ближайшим городам.

Построенная модель имеет две транзитные вершины. В реальной жизни они соответствуют двум железнодорожным узлам с небольшим населением и важным стратегическим положением. Средний поток для этих вершин оказался на несколько порядков меньше, чем для остальных, поэтому он не учитывался. Присутствие в модели транзитных вершин делает ее более достоверной. В результате получилась сеть с рис. 1. На нем в кружках — номера вершин, рядом с ними — названия городов. Вершины 27 и 28 — без названия, т.к. являются транзитными. Ребрами обозначены пути между городами. Рядом с ребрами — их пропускные способности. В построенной сети 29 вершин и 45 ребер.

Граф тяготений строился следующим образом. Сначала рассматривался полный граф тяготений на 27 вершинах, затем из полученных пар были выбраны тяготеющие пары для модели телефонной сети по следующим принципам. Во-первых: граф тяготений должен учитывать основные (максимальные) потоки, он не обязан быть полным, но должен быть, по крайней мере, связным; во-вторых: должны быть учтены все возможные тяготения внутри страны. Невыполнение первого условия практически означало бы для отдельных городов или регионов отсутствие заявок (телефонных звонков) в Москву, если она оказалась в другой связной компоненте. Это не соответствует действительности. Второе условие влияет на объективность получаемых результатов. Чтобы удовлетворить первому условию, потоки, проходящие через транзитные вершины были разделены на две части — поток от источника до транзитной вершины и поток от транзитной вершины к стоку. Чтобы удовлетворить второму условию, оставшиеся неучтенными потоки были переадресованы ближайшим узлам, включенным в множество рассматриваемых тяготеющих пар.

Мы остановились на 50 тяготеющих парах с самыми большими потоками. Полученный граф тяготений изображен на рис. 2. На нем в кружках обозначены номера вершин, рядом с ними — названия городов. Ребрами обозначены тяготения между городами. Рядом с ребрами — требования на поток между этими парами. В построенном графе тяготений 27 вершин и 50 ребер. Построенная таким образом МП-сеть является моделью информационного обмена между городами России и отражает его основные тенденции.

Под силами, способными разрушить структуру сети, будем подразумевать как природные явления и техногенные катастрофы, развивающиеся по самому неблагоприятному сценарию, так и целенаправленный удар противника, обладающего достаточной разведывательной информацией. Пусть разрушающее воздействие на сеть приводит к полному уничтожению

одного или нескольких ребер.

Предположим, что пользователи смоделированной сети хотели бы до ее разрушения оценить ущерб, который они, возможно, понесут в случае самого неблагоприятного развития ситуации. Под ущербом будем понимать количество неудовлетворенных заявок на телефонные разговоры для пар городов, оставшихся без связи.

Мощность удара (силу разрушения) разумно задать как процент от суммы пропускной способности всех ребер сети. В частности, рассмотрим разрушение 5% и 10% суммарной пропускной способности сети, что составляет 217 и 434 единиц соответственно.

Формальная постановка для описанной пользовательской задачи предполагает поиск такого множества ребер, что удаление их из сети разъединит хотя бы одну тяготеющую пару и повлечет максимальное количество неудовлетворенных заявок на телефонные разговоры между абонентами разъединенных городов, т. е. нанесет максимальный ущерб пользователям. Такой подход позволяет решать описанную пользовательскую задачу как задачу В в постановке 1. Физический граф сети полностью удовлетворяет условиям теорем 1, 2 [11], т.е. является связным, в нем нет кратных ребер, и для любой пары вершин существует по крайней мере два вершинно непересекающихся пути, их соединяющих, поэтому к сети применимы предложенные выше алгоритмы АППР и АКПР.

Для исследуемой сети простые разрезы были построены двумя способами — с помощью алгоритмов ППВ и АППР. Оба алгоритма построили одни и те же разрезы — 29 для 5% и 61+29 для 10% пропускной способности. ППВ справился с этой задачей для 5% и 10% за 268435456 шагов и 3403 с (примерно 57 мин). АППР — для 5% и 10% — за 38697 шагов и 2 с. Такой

.

результат объясняется тем, что алгоритмы строят множество $\mathcal{R}$ исходя только из структуры графа, пропускные способности ребер во внимание не берутся. На это уходит основное время решения, а $\overline{R}$ выбирается из $\mathcal{R}$ исходя из ограничения на удар. Для единичного графа сети (задачи A,B в постановке $1'$) время построения разрезов получилось то же.

Оптимальные решения задачи в постановке 1 были построены с помощью алгоритмов ППР, ПДР, ПДУ и АКПР. Результаты для 5% можно сравнить с помощью табл. 1, для 10% — с помощью табл. 2.

Табл. 1

	ППР	ПДР	ПДУ	АКПР
Число решений и оптимальность	48 соотв.	48 соотв.	48 соотв.	48 соотв.
Общее число рассмотренных вариантов	$\approx 2^{29}$	76306	80025	73164
Исследовано на оптимальность	—	71332	67177	4530
Построено ветвей	—	13320	13321	85
Время решения	$\approx$ 42 мин	2 с	2 с	2 с

Для поиска решения в случае 10% алгоритм ППР не применялся, поскольку на комбинирование 29 разрезов потребовалось 42 мин, следовательно, на "экономичную"проверку всех комбинаций (один разрез из 61-го плюс 29 разрезов) ушло бы около двух суток. Какой промежуток времени потребовался бы для полного перебора всех возможных комбинаций 90 разрезов трудно даже предположить.

Самая “длинная"ветвь дерева перебора состояла из пяти разрезов для 5% и семи разрезов для 10%. “Типичные"ветви представляли собой объединение разреза с большой пропускной способностью (например, разрез, отделяющий Урал и Сибирь) и одного, или нескольких разрезов с небольшой пропускной способностью (например, разрезы для отдельных вершин), или объединение двух или более разрезов со средней пропускной способностью, для которых множества разделенных тяготеющих пар пересекаются, с одним, или несколькими разрезами с небольшой пропускной способностью.

Табл. 2

	ПДР	ПДУ	АКПР
Число решений и оптимальность	183 соотв.	183 соотв.	183 соотв.
Общее число рассмотренных комбинаций	4987389	5127179	4942182
Исследовано на оптимальность	4707885	4416845	295655
Построено ветвей	677159	677160	1868
Время решения	9 с	8 с	7 с

Результаты расчетов для задачи В в постановке 1 позволили сделать следующие содержательные выводы.

I) Удаления из сети 5% пропускной способности уже достаточно, чтобы в построенной гипотетической сети оставить без связи с центром либо Урал и Сибирь, либо Кавказ и Черноморское побережье, либо Восточную Сибирь. Кроме этого от центральной России могут быть одновременно отделены как отдельные города: Смоленск, Псков, Грозный, Киров, или группы городов: Армавир, Ростов, Грозный; Нижневартовск, Норильск; Якутск, Хабаровск; так и целые районы: Кавказ, Черноморское побережье и Восточная Сибирь. В этом случае ограничение по силе удара не позволяет комбинировать разрезы с большой пропускной способностью.

II) Удаление из построенной сети 10% пропускной способности грозит либо одновременным отделением Урала и Сибири, Кавказа и Черноморского побережья от центра, либо лишением связи городов: Санкт-Петербург, Курск, Волгоград, Саратов, Ростов, Воронеж, Петрозаводск, Новосибирск по отдельности, и в некоторых комбинациях (например, отделить Волгоград и Саратов; Псков, Орел, Смоленск и Курск; Курск, Воронеж и Орел; Петербург, Псков и Петрозаводск; Ростов, Волгоград и Саратов; и т.д.), а также отделением групп Норильск, Нижневартовск; Хабаровск и Якутск. Для нарушения связности центрального района этой мощности недостаточно.

Рассмотрим задачу А анализа уязвимости МП-сети в постановке 1. По построению в исследуемой сети до атаки все требования на поток полностью удовлетворялись, поэтому, если в рассматриваемой сети существуют разрезы, пропускная способность которых равна ущербу от их удаления и ограничению на удар, то для решения задачи А достаточно указать один из них.

Для алгоритмов ПДУ, ПДР, АКПР дерево перебора строилось одинаковым способом, вследствие чего за примерно одинаковое число шагов ими было найдено одно и то же решение. Такой результат указывает на зависимость выигрыша в случае применения алгоритма АКПР от расположения оптимального решения на дереве перебора. Чем правее оно будет находиться, тем больший выигрыш во времени и в шагах можно будет получить. Подчеркнем еще раз, что в этом примере нам "повезло"с сетью, так как в ней нашелся подходящий разрез, иначе решение задачи А оказалось бы эквивалентно решению задачи

В, которую мы рассматривали выше.

Теперь оценим уязвимость сети, как функцию числа ребер, вышедших из строя. Для этого положим всю пропускную способность ребер и все требования тяготеющих пар равными единице. При этом структура сети не изменится. Здесь возникает ситуация, на которую мы обращали внимание в §3, когда по m ребрам единичной пропускной способности нужно пропустить n единичных потоков, при этом $m < n$ (например, для Саратова по трем ребрам единичной пропускной способности нужно пропустить четыре единичных потока). Напомним, что при решении задачи В в постановке $1'$ нас интересует число разделенных пар и уничтоженных ребер, а не количество неудовлетворенных заявок пользователей и не суммарная пропускная способность вышедших из строя ребер, и что для этой постановки решение задач А и В эквивалентно (для первой решение выбирается из множества решений второй). Поэтому далее случай А постановки $1'$ для задачи анализа уязвимости МП-сети отдельно рассматривать не будем.

Оценим, к каким последствиям может привести уничтожение в сети 5% и 10% ребер, что составляет 2 и 5 ребер соответственно.

Для исследуемой сети простые разрезы были построены двумя способами — с помощью алгоритмов ППВ и АППР. Оба алгоритма построили одни и те же разрезы — 16 для 5% и 127+16 для 10% пропускной способности. Затем с помощью алгоритмов ПДР, ПДУ и АКПР были построены оптимальные решения задачи В в постановке $1'$ для 10% уничтоженной пропускной способности. Вследствие весьма ограниченных ресурсов у нападающего и отсутствия висячих вершин в физическом графе сети, комбинирование разрезов для потери 5-ти % пропускной способности не рассматривались. Результаты для 10% представлены в табл. 3.

Специфика исследуемой сети, в которой оптимальными решениями оказались простые разрезы, свела поиск к проверке отсутствия решения в виде комбинации разрезов. Эксперимент показал, что в условиях, когда решением задачи является простой разрез, применение алгоритма АКПР не дает никаких преимуществ во времени по сравнению с алгоритмами ПДР и ПДУ. Однако благодаря использованию оценки $\overline{S}(R)$ значительно сокращается число комбинаций разрезов, для которых вычисляется точное значение $S(R)$ (строка "Исследовано на оптимальность"в табл. 3), а также размер построенного дерева перебора— 1062 ветви для ПДР и ПДУ, и 10 для АКПР.

Табл. 3

	ПДР	ПДУ	АКПР
Число решений и оптимальность	3 соотв.	3 соотв.	3 соотв.
Общее число рассмотренных вариантов	3775	3775	3564
Исследовано на оптимальность	2237	2132	10
Построено ветвей	1062	1062	10
Время решения	2 с	2 с	2 с

Результаты расчетов для задачи В в постановке $1'$ позволили сделать следующие содержательные выводы.

III) Удаления из сети 5% ребер уже достаточно для того, чтобы в построенной гипотетической междугородной телефонной сети была нарушена связь между центральной Россией и Уралом; Россией и Сибирью; Россией и Черноморским побережьем, включая Кавказ. Могут быть лишены связи отдельные города (они обозначены на графе сети вершинами степени 2: Петрозаводск, Псков, и др.), или группы городов Нижневартовск и Норильск, Хабаровск и Якутск, Армавир и Грозный.

IV) Удаления из построенной сети 10% ребер уже достаточно, чтобы в построенной гипотетической сети либо оставить без связи с остальной Россией центральный железнодорожный узел (Самара, Ульяновск), либо отделить от центральной России Урал и Сибирь, при этом Самара и Ульяновск также останутся без связи с центром. Для нарушения связности центрального района этой мощности недостаточно.

Решая задачу уязвимости МП-сети в постановке $1'$ (задача B), мы получили достоверную оценку ситуации, менее благоприятной для пользователей, чем ситуация, которая рассматривается при решении этой задачи в постановке 1 (задача B), хотя некоторые результаты для обеих постановок совпадали. Оказалось, что удаление 5% и 10% от числа ребер сети приводит к более серьезным последствиям, чем выход из строя 5% и 10% ее пропускной способности. Так, например, выход из строя 10% пропускной способности сети делает невозможным передачу не более 10% от суммы всех требуемых потоков, в то время как удаление 10% ребер может повлечь разделение 21% тяготеющих пар.

Перейдем к описанию второй части эксперимента, в которой исследовалась уязвимость МП-сетей, физический и граф тяготений которых задавались случайным образом. Как и в первой части, под анализом уязвимости будем понимать решение задачи B в постановке $1'$.

Нашей целью является изучение случайных сетей, имеющих примерно то же строение, что и предложенная в первой части эксперимента модель информационного обмена России. Поэтому моделировались сети с физическим и логическими графами, которые имеют небольшую степень вершин (2-5). При этом допускалось наличие одной вершины со степенью от 6 до 8. Степени вершин выбирались случайным образом, но требования для тяготеющих пар и пропускные способности были выбраны единичные, поскольку иные значения необходимо было бы логически обосновывать. Кроме этого, в случае выбора случайных тяготений и пропускной способности в сети мог бы возникнуть дефицит или избыток последней. Тогда созданная модель больше подходила бы для решения задач, связанных с трассировкой потоков или модернизацией сети.

Для произвольных графов, имеющих 25 вершин, алгоритм ППВ формирует множество $\mathcal{R}$ за несколько минут. Добавление каждой новой вершины увеличивает это время примерно вдвое, на поиск $\mathcal{R}$ для графа с 30 вершинами требуется уже около двух часов. Интересно, что при равной относительной силе удара в 10% число разрезов множества $\overline{R}$ для графов с 25-ю и 30-ю вершинами отличается незначительно, примерно на восьмую часть. Таким образом, увеличение числа вершин графа на пятую часть влечет за собой рост множества $\overline{R}$ на восьмую часть, а времени поиска — в 30-40 раз, поэтому нам показалось разумным ограничить число вершин графа 25-ю.

Уязвимость случайных сетей предполагалось исследовать с помощью АППР и АКПР, поэтому физические графы строились таким образом, чтобы удовлетворять условиям соответствующих теорем [11], поэтому граф сети моделировался следующим образом.

Из 25 вершин графа, имеющих степень вершины $'1'$ или $'0'$, случайным образом выбиралась одна и соединялась с тремя другими случайно выбранными вершинами. Этот процесс продолжался до тех пор, пока в графе оставались вершины со степенью $'1'$ или меньше. Отсутствие кратных ребер, точек сочленения и ребер-мостов проверялось специальными процедурами. Если построенный граф удовлетворял условиям теорем, то осуществлялся переход к построению логического, иначе — строился новый физический граф сети.

Граф тяготений моделировался аналогично, с той лишь разницей, что проверка на наличие кратных ребер, точек сочленения и ребер-мостов не проводилась, поскольку исходя из логики задачи от него требуется только связность и совпадение множеств N и N^p.

На число тяготеющих пар было наложено следующее ограничение: число тяготеющих пар не должно превосходить число ребер физического графа сети. Это ограничение понижает вероятность возникновения ситуации, в которой удаление разреза с небольшой пропускной способностью приводит к максимальному ущербу, что соответствует оптимальному решению — простому разрезу. На сеть — модель информационного обмена России (постановка $1'$) такое ограничение наложено не было, и оптимальными решениями оказались только простые разрезы.

Построенные графы тестировались с помощью трех пар алгоритмов ППВ — ППР, ППВ — ПДУ и АППР — АКПР. Первая пара алгоритмов не использует никаких способов сокращения перебора. Вторая — находит простые разрезы — решения полным перебором, но для поиска комбинации разрезов вычисляет ущерб пользователей и, опираясь на него, строит часть дерева перебора. Третья пара — определяет простые разрезы исходя из последовательности связных подграфов, а при поиске оптимальных решений пытается максимально сократить перебор, используя оценку ущерба. Алгоритмы последовательно применялись к одним и тем же сетям, оптимальные решения во всех случаях были найдены каждой из трех пар алгоритмов.

Результаты работы алгоритмов сравнивались по тем же критериям, что и в первой части эксперимента, но для каждого критерия вычислялось среднее значение. Кроме этого была сделана попытка классифицировать уязвимость сетей (соотношение удар — ущерб) и определить конфигурацию оптимального решения (комбинация разрезов или простой разрез) в зависимости от строения графов сети и тяготений.

Нами было построено и тестировано 100 моделей МП-сетей со случайными физическими и логическими графами. Сгенерированные физические графы сети содержали от 35 до 38 ребер, логические — от 30 до 36 тяготений. Максимальная степень вершины для физического графа не превосходила 8, логического — 7. Построенные случайные графы имели различную структуру, от близких к регулярным (степень каждой вершины не превосходила 4), до близких к колесу [40] (степень одной из вершин — 6, 7 или 8, остальных — не более 3).

Мы исследовали разрушение 5%, 10% и 15% ребер сети. Последний вариант мощности удара был добавлен для того, чтобы с помощью эксперимента выяснить, как работают алгоритмы с большим числом построенных разрезов. Сила удара рассчитывалась следующим образом: соответствующий процент от общего числа ребер округлялся до целых. При этом потеря 5% означает разрушение двух ребер, 10% — четырех ребер, 15% — шести ребер.

Размер множества $\overline{R}$, построенного для рассматриваемых случаев уничтожения ребер варьировался в зависимости от конфигурации сети и силы удара. Табл. 4 отражает структуру множества построенных разрезов. Для 10% и 15% число простых разрезов дается в виде суммы $a + b$, где a — число разрезов с пропускной способностью более 2 и 3 соответственно, b — ровно 2 и 2,3 (АКПР комбинирует один разрез с пропускной способностью, большей половины удара, с несколькими разрезами пропускной способности менее половины удара).

Согласно построению в физическом графе сети нет висячих вершин, поэтому решением задачи в постановке $1'$ (потеря 5% ребер), является простой разрез, поиск которого сводится к построению множества $\overline{R}$ и выбору из него элемента, ущерб от удаления которого из сети максимален. Пара алгоритмов АППР - АКПР справлялась с этой задачей в среднем за 40 с, пары ППВ-ППР, ППВ-ПДУ за примерно одинаковое время 167-168 с. Комбинирование разрезов для потери 5% ребер не рассматривалось.

Табл. 4

	5%	10%	15%
Максимальное число построенных простых разрезов	22	123+16	816+38
Минимальное число построенных простых разрезов	10	40+12	187+34
Среднее число построенных простых разрезов	15	73+15	462+37
Оптимальные решения - комбинации разрезов составляют	0%	18%	71%

Наиболее уязвимыми в случае потери 5% ребер оказались сети, имеющие вершину, степень которой в физическом графе минимальна (т.е. равна двум), а в логическом графе — максимальна (например, равна 6 или 7). Для таких сетей ущерб мог достигать 20%.

Более интересные результаты были получены для случаев потери 10% и 15% суммарной пропускной способности сети, их средние значения можно сравнить с помощью табл. 5 и 6.

В случае потери 15% ребер алгоритм ППР использовать не удалось, поскольку размер множеств $\overline{R}$ для смоделированных сетей оказался слишком большим. Например, комбинирование элементов одного из минимальных по мощности множеств построенных простых разрезов (391 + 26), могло бы затянуться не менее, чем на 32 ч.

Табл. 5

	ППВ-ППР	ППВ-ПДУ	АППР-АКПР
Среднее число рассмотренных вариантов	13034654	2065	2056
В среднем исследовано	—	336	8
В среднем построено ветвей	—	205	3
Среднее время решения	242 с	181 с	43 с

Табл. 6

	ППВ-ПДУ	АППР-АКПР
Среднее число рассмотренных вариантов	66496	66877
В среднем исследовано	10530	420
В среднем построено ветвей	3712	11
Среднее время решения	185 с	44 с

Интересно, что для случая потери 15% ребер пара АППР-АКПР рассматривает в среднем на 0,5% больше вариантов, т.е. вершин — кандидатов на ветвление, но при этом в среднем исследует на оптимальность только 0,6% последних, в то время, как пара ППВ-ПДУ исследует 15,8%, т.е. примерно 5 из каждых 33-х кандидатов. Для 10%, при почти равном числе рассмотренных кандидатов, это — соответственно 0,4% и 16,3%.

В целом вычислительный эксперимент, проведенный для сетей, со случайными разреженными физическими и логическими графами подтвердил закономерность, проявившуюся в первой части эксперимента: при относительно равном числе рассматриваемых кандидатов на ветвление, оценки, которые использует АКПР, позволяют значительно уменьшить число комбинаций разрезов, для которых находится точное значение ущерба, и сократить объем построенного дерева перебора. Более внушительной стала разница во времени при построении решения разными способами. Кроме этого мы получили подтверждение того, что удаление из сети 5%, 10% и 15% ребер ведет к более серьезным последствиям, чем удаление соответствующей пропускной способности. Эту тенденцию можно отследить по табл. 7. Напомним, что при потере пропускной способности, ущерб от удаления разреза не может превосходить его пропускной способности.

Табл. 7

	5%	10%	15%
Максимальный ущерб от удаления ребер	20%	66%	90%
Минимальный ущерб от удаления ребер	6%	30%	51%
Ущерб в среднем	14%	49%	68%

Наиболее уязвимыми в случае потери 10% и 15% ребер оказались сети, имеющие сочетание: физический граф сети близок к регулярному (максимальная степень вершины 4 и меньше), логический — к колесу, при этом вершина, степень которой в логическом графе максимальна, имеет в физическом — степень 2 или 3; либо оба графа имеют по несколько вершин степени не более пяти, но при этом степень каждой вершины в них максимально различается, т.е. если в физическом графе вершина имеет степень 2, то в логическом — не менее четырех, и наоборот.

Выявить закономерность, связывающую строение оптимального решения (простой разрез или комбинация разрезов) с конфигурацией сети, пока не удалось.

Заключение

Продолжено исследование уязвимости МП-сети, начатое в работе [11].

Частные случаи проблемы, формализованной в виде двухкритериальной лексикографической задачи оптимизации, исследованы с помощью потоковых и теоретико-графовых методов, указаны соответствующие алгоритмы.

Затронуты вопросы, связанные со сложностью поставленной задачи и построением приближенного решения.

В общем случае для анализа уязвимости многопродуктовой сети предложено использовать алгоритмы АППР и АКПР, опирающиеся на свойства несократимых разрезов. АППР строит несократимые простые разрезы исходя из последовательности связных подграфов. АКПР, основанный на схеме перебора по методу ветвей и границ, ведет поиск на дереве перебора опираясь на оценку ущерба пользователей в поврежденной сети. При этом в качестве вариантов рассматриваются различные комбинации простых разрезов, найденных АППР.

Предложенные алгоритмы тестированы на сетях, физические и логические графы которых являются случайными и разреженными, а также на построенной в работе модели междугородной телефонной сети России. Работа АППР, АКПР и соответствующих алгоритмов, использующих полный перебор или направленный поиск с помощью дерева, сравнивалась по следующим критериям: число построенных оптимальных решений и их соответствие; число вариантов рассмотренных комбинаций разрезов; число вариантов, которые исследовались на оптимальность; число ветвей дерева, построенных до конца; время решения задачи. Вычислительный эксперимент продемонстрировал более высокую эффективность применения АППР и АКПР для оценки уязвимости МП-сетей по сравнению с перечисленными алгоритмами.

Литература

1. Малашенко Ю.Е. Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.: ВЦ РАН, 1993.

2. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

3. Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

4. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

6. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

7. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. М.; Мир, 1985.

8. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наукова думка, 1988.

9. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.

10. Подиновский В.В. Ногин В.Д. Парето-оптимальные реше-

ния многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

11. Назарова И.А. Модели и методы анализа многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2004.

12. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

13. Карзанов А.В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып. 3. М.: ВНИИСИ, 1979. С. 6-69.

14. Matula D.W. Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.-Y.: Wiley-Intersci. Publ., 1985. P. 543-559.

15. Андельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.

16. Йенсен П., Барнес Д. Потоковое программирование. М.: Радио и связь, 1984.

17. Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Статические потоки в сетях //Автоматика и телемеханика. 1987. N 10. С. 3-29.

18. Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Статические потоки в сетях //Автоматика и телемеханика. 1987. N 11. С. 7-29.

19. Linial N., London E. Rabinovich Y. The geometry of graphs and some of its algorithmic application // Combinatorica. 1995. N 15. P. 215-246.

20. Chen Y., Tan J., Hsu L. et al. Super-connectivity and super-

edge-connectivity for some interconnection networks // Appl. Math. and Comput. 2003. V. 140. N. 2-3. P. 245-254.

21. Petingi L., Urquhart M. Algorithms for the Computation of Communication Network Vulnerability Indexes. Serie “Reports tecnicos”, INCO 96-04. Montevideo: Instituto de Computacion, 1996.

22. Holm P., Kim B.J., Yoon C.N. et al. Attack vulverability of complex networks // Physical Review E. 2002. V. 65. N 5.

23. Lucet C., Manouvrier J.-F., Carlier J. Evaluatign Network Reliability and 2-Edge-Connected Reliability in Linear Time for Bounded Pathwidth Graphs // Algorithmica. 2000. V. 27. P. 316-336.

24. Jane C.-C., Yuan J. A sum of disjoint products algorithm for reliability evaluation of flow networks // European J. Operational Research. 2001. V. 131. P. 664-675.

25. Cormican K.J., Morton D.P., Wood R.K. Stochastic network interdiction // Operations Reserch. 1998. V. 46. N 2. P. 184-197.

26. Westmark V.R. A Definition for Information System Survivability // Proc. 37th Int. Conf. on System Sciences. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2004. Track 9.

27. Kalyoncu H., Sankur B. Estimation of survivability of communication networks // Electronics Letters. 1992. Is. 19. V. 28. P. 473-480.

28. Cankaya H.C., Nair V.S.S. A survivability assessment tool for restorable networks // Proc. 3rd IEEE Symp. on Appl.-Spec. Syst. and Soft. Eng. Tech. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2000. P. 319-324.

29. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L. et al. Introduction to Algorithms, Second Edition. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. P. 651–664.

30. Khuller S., Naor J. Flow in Planar Graphs: A Survey of Recent Results // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Science. 1993. V. 9. P. 59-84.

31. Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G. et al. Complexity and Approximation. Springer Verlag, 1999.

32. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

33. Dalhaus E., Johnson D.S., Papadimitriou C.H. et al. The complexity of multiway cuts // SIAM J. Computers. 1994. V. 23. P. 864-894.

34. Garg N., Vazirani V.V., Yannakakis M. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications // SIAM J. Computers. 1996. V. 25. N 2. P. 235-251.

35. Letocart L. Problems de multicoupe et multiflot en nombres entieres. These de doctorat en informatique. Paris: CEDRIC-CNAM, 2002.

36. Costa M.-C., Letocart L., Roupin F. A greedy algorithm for

multicut and integral multiflow in rooted trees // Operations Research Letters. 2003. V 31. N 1. P. 21-27.

37. Aumann Y., Rabani Y. An $O(\log k)$ approximate min-cut max-flow theorem and approximation algorithm // SIAM J. Computers. 1998. V. 27. N 1. P. 291-301.

38. Günlük O. A new min-cut max-flow ratio for multicommodity flow // Lecture Notes in Computer Science. 2002. V. 2337. P. 54-66.

39. Попков В.К. Математические модели связности. Ч. I. Графы и сети. Новосибирск: ИВМ и МГ СОРАН, 2000.

40. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, Сибирское предприятие РАН, 1999.

41. Кауль С.Б., Попков В.К. О сложности вычисления характеристик связности// Эффективность и структурная надежность информационных систем. Системное моделирование. Новосибирск, 1982. С. 99-103.

42. Benczur A., Karger D. Randomized Approximation Schemes for Cuts and Flows in Capacitated Graphs. Technical report. Cambridge: M.I.T., 2002.

43. Karger D. Random Sampling in Cut, Flow, and Network Design Problems // Mathematics of Operations Research. 2000. V. 24. N 2. P. 383-413.

44. Balcioglu A., Wood K. Enumerating near-min s-t cuts //

Network Interdiction and Stochastic Integer programming. Boston: Kluwer Academic Publisher, 2003. P. 21-49.

45. Felner A. Finding Optimal Solution to the Graph Partitioning Problem with Heuristic Search. // http://www.ise.bgu.ac.il/faculuty/felner.

46. Hochbaum D. A new-old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs // Networks. 2001. V. 37. N 4. P. 171-193.

47. Stoer M., Wagner F. A simple min cut algorithm // Journal of ACM. 1997. V. 44. N 4. P. 585-591.

48. Saran H., Vazirani V.V. Finding k-cuts within Twice the Optimal // SIAM Journal of Computers. 1995. V. 24. N 1. P. 101-108.

49. Карзанов А.В., Тимофеев Е.А. Эффективный алгоритм нахождения всех минимальных реберных разрезов неориентированного графа // Кибернетика. 1986. N 2. С. 8-12.

50. Диниц Е.А., Карзанов А.В., Ломоносов М.В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 290-306.

51. Călinescu G., Karloff H., Rabani Y. An improved approximation algorithm for multiway cut // J. Comput. System. Sci. 2000. V. 60. N 3. P. 564-574.

52. Aura T., Bishop M., Sniegowski D. Analyzing single-server

network inhibition // Proc. of the 13th IEEE Computer Security Foundations Workshop. 2000. P. 108-117.

53. Phillips Cynthia A. The network inhibition problem // Proc. 25th Ann. ACM Symp. on the Theory of Comp. Toronto: ACM Press. 1993. P. 776-785.

54. Burch C., Carr R., Krumke S. et al. A decomposition-based pseudoapproximation algorithm for network flow inhibition // Network interdiction and stochastic integer programming. Ser. Oper. Res./Comput. Sci. Interfaces, 2003. N. 22. P. 51-68.

55. Martel C., Nuckolls G., Sniegpwski D. Computing the Disconnectivity of a Grahp. US Davis. Technical Report CSE-2002-38. 2001.

56. Хачатуров В.Р., Веселовский В.Е., Злотов А.В. и др. Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности. М.: Наука, 2000.

57. Swiler L.P., Phillips C., Gaylor T. A Graph-Based Network-Vulnerability Analysis Sustem. Sandia report SAND97-3010/1. US-705. Sandia National Laboratories, USA, 1998.

58. Swiler L.P., Phillips C., Ellis D. et al. Computer-attack graph generation tool // Proc. of the DARPA Inf. Surviv. Conf. and Expos. Los Alamos: IEEE Computer Society Press 2001. V. 2. P. 307-321.

59. Ritchey R., Ammann P. Using model checking to analyse network vulnerabilities // Proc. of IEEE Symp. on Sec. and Priv. 2000. P. 156-165.

60. Sheyner O., Wing J. Tools for Generating and Analyzing Attack Graphs // Proc. of Workshop on Formal Methods for Components and Objects. 2004. P. 344-371.

61. Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ. Обзор теории. алгоритмов, программ и приложений// Math. Operat. Forsch. Statist. Ser. Optimizat. 1977 B. 8. N 2. C. 253-280.

62. Нильсон Н. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1979.

63. Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта. М.: Радио и связь, 1985.

64. Назарова И.А. Метод упорядоченного перебора, использующий вектор оценочных функций. М.: ВЦ РАН, 1995.

65. Sheyner O., Haines J., Jha S. et al. Automated generation and analyses of attack graphs // Proc. of 2002 IEEE Symp. on Sec. and Priv. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2002. P. 273-284.

66. Ortalo R., Deswarte Y., Kaaniche M. Experimenting with quantitative evaluation tools for monitoring operational security // IEEE Transact. on Software Engineering. 1999. V. 25. N 5. P. 633-650.

67. Jha S., Wing J. Survivability Analyses of Networked Systems// Proc. of the 23-th International Conference on Software Engineering. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2001. P. 872-874.

СОДЕРЖАНИЕ

Список литературы

[1] Малашенко Ю.Е. Математические модели анализа потоковых сетевых систем. М.:ВЦ РАН, 1993.

[2] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Потоковые задачи анализа уязвимости многопродуктовых сетей. М.: ВЦ АН СССР, 1989.

[3] Малашенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[4] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[5] Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

[6] Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.

[7] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. М.; Мир, 1985.

[8] Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев: Наукова думка, 1988.

[9] Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование. М.: Физматлит, 2002.

[10] Подиновский В.В. Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

[11] Назарова И.А. Модели и методы анализа многопродуктовых сетей. М.: ВЦ РАН, 2004.

[12] Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

[13] Карзанов А.В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. Вып. 3. М.: ВНИИСИ, 1979.С.6-69.

[14] Matula D.W. Concurrent flow and concurrent connectivity in graphs // Graph Theory and Its Appl. to Algorithms and Comput. Sci. N.-Y.: Wiley-Intersci. Publ., 1985. P.543-559.

[15] Андельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.

[16] Йенсен П., Барнес Д. Потоковое программирование. М.: Радио и связь, 1984.

[17] Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Статические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. 1987. N 10. С.3-29.

[18] Ловецкий С.Е., Меламед И.И. Динамические потоки в сетях // Автоматика и телемеханика. 1987. N 11. С.7-29.

[19] Linial N., London E. Rabinovich Y. The geometry of graphs and some of its algorithmic application // Combinatorica. 1995. N 15. P. 215-246.

[20] Cher Y., Tan J., Hsu L., Kao S. Super-connectivity and super-edge-connectivity for some inter connection networks // Appl. Math. and Comput. 2003.N.2-3. P.245-254.

[21] Petingi L., Urquhart M. Algorithms for the Computation of Communication Network Vulnerability Indexes. Serie "Reports t'ecnicos". 1996.

[22] Holm P., Kim B.J., Yoon C.N., Han S.K. Attack vulverability of complex networks // Physical Review E. 2002. V. 65. N 5. 056109 (14 стр.).

[23] Lucet C., Manouvrier J.-F., Carlier J. Evaluatign Network Reliability and 2-Edge-Connected Reliability in Linear Time for Bounded Pathwidth Graphs // Algorithmica. 2000. V. 27. P. 316-336.

[24] Jane C.-C., Yuan J. A sum of disjoint products algorithm for reliability evaluation of flow networks // European J. Operational Research. 2001. V. 131. P. 664-675.

[25] Cormican K.J., Morton D.P., Wood R.K. Stochastic network interdiction // Operations Reserch. 1998. V. 46. N 2. P. 184-197.

[26] Westmark V.R. A Definition for Information System Survivability // Proc. 37th Int. Conf. on System Sciences. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2004. Track 9. P. 90303a.

[27] Kalyoncu H., Sankur B. Estimation of survivability of communication networks // Electronics Letters. 1992. Is. 19. V. 28. P. 473-480.

[28] Cankaya H.C., Nair V.S.S. A survivability assessment tool for restorable networks // Proc. 3rd IEEE Symp. on Appl.-Spec. Syst. and Soft. Eng. Tech. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2000. P. 319-324.

[29] Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms, Second Edition. MIT Press and McGraw-Hill, 2001. P.651–664.

[30] Khuller S., Naor J. Flow in Planar Graphs: A Survey of Recent Results // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Science. 1993. V.9. P. 59-84.

[31] Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., Kann V., Marchetti-Spaccamela A. Protasi M. Complexity and Approximation. Springer Verlag, 1999.

[32] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

[33] Dalhaus E., Johnson D.S., Papadimitriou C.H. et al. The complexity of multiway cuts // SIAM J. Computers. 1994. V. 23. P. 864-894.

[34] Garg N., Vazirani V.V., Yannakakis M. Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications // SIAM J. Computers. 1996. V. 25. N 2. P. 235-251.

[35] Létocart L. Probléms de multicoupe et multiflot en nombres entieres. Thése de doctorat en informatique. Paris: CEDRIC-CNAM, 2002.

[36] Costa M.-C., Létocart L., Roupin F. A greedy algorithm for multicut and integral multiflow in rooted trees // Operations Research Letters. 2003. V 31. N 1. P. 21-27.

[37] Aumann Y., Rabani Y. An $O(\log k)$ approximate min-cut max-flow theorem and approximation algorithm // SIAM J. Computers. 1998. V. 27. N 1. P. 291-301.

[38] Günlük O. A new min-cut max-flow ratio for multicommodity flow // Lecture Notes in Computer Science. 2002. V. 2337. P. 54-66.

[39] Попков В.К. Математические модели связности. Ч. I. Графы и сети. Новосибирск: ИВМ и МГ СОРАН, 2000.

[40] Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Толковый словарь по теории графов в информатике и программировании. Новосибирск: Наука, Сибирское предприятие РАН, 1999.

[41] Кауль С.Б., Попков В.К. О сложности вычисления характеристик связности// Эффективность и структурная надежность информационных систем. Системное моделирование. Новосибирск,1982. С.99-103.

[42] Benczúr A., Karger D. Randomized Approximation Schemes for Cuts and Flows in Capacitated Graphs. Technical report. M.I.T.: 2002.

[43] Karger D. Random Sampling in Cut, Flow, and Network Design Problems // Mathematics of Operation Research. 2000. V. 24. N 2. P. 383-413.

[44] Balcioglu A., Wood K. Enumerating near-min s-t cuts // Network Interdiction and Stochastic Integer programming. Kluwer Academic Publisher, 2003. P. 21-49.

[45] Felner A. Finding Optimal Solution to the Graph Partitioning Problem with Heuristic Search. // http:// www.ise.bgu.ac.il/faculuty/felner.

[46] Hochbaum D. A new-old algorithm for minimum-cut and maximum-flow in closure graphs // Networks. 2001. V. 37. N 4. P. 171-193.

[47] Stoer M., Wagner F. A simple min cut algorithm // Journal of ACM. 1997. V. 44. N 4. P. 585-591.

[48] Saran H., Vazirani V.V. Finding k-cuts within Twice the Optimal // SIAM Journal of Computers. 1995. V. 24. N 1. P. 101-108.

[49] Карзанов А.В., Тимофеев Е.А. Эффективный алгоритм нахождения всех минимальных реберных разрезов неориентированного графа // Кибернетика. 1986. N 2. С.8-12.

[50] Диниц Е.А., Карзанов А.В., Ломоносов М.В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа // Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976. С. 290-306.

[51] Călinescu G., Karloff H., Rabani Y. An improved approximation algorithm for multiway cut // J. Comput. System. Sci. 2000. V. 60. N 3. P. 564-574.

[52] Aura T., Bishop M., Sniegpwski D. Analyzing single-server network inhibition // Proc. of the IEEE 13th Computer Security Foundations Workshop. 2000. IEEE'00. P. 108-117.

[53] Phillips Cynthia A. The network inhibition problem // Proc. 25th Ann. ACM Symp. on the Theory of Comp. ACM Press. 1993. P. 776-785.

[54] Burch C., Carr R., Krumke S., Marathe M., Phillips C., Sundberg E. A decomposition-based pseudoapproximation algorithm for network flow inhibition // Network interdiction and stochastic integer programming. Ser. Oper. Res./Comput. Sci. Interfaces, 2003. N. 22. P. 51-68.

[55] Martel C., Nuckolls G., Sniegpwski D. Computing the Disconnectivity of a Grahp. US Davis. Technical Report CSE-2002-38. 2001.

[56] Комбинаторные методы и алгоритмы решения задач дискретной оптимизации большой размерности / В.Р.Хачатуров и др. -М.: Наука, 2000.

[57] Swiler L.P., Phillips C., Gaylor T. A Graph-Based Network-Vulnerability Analysis Sustem. Sandia report SAND97-3010/1. US-705. Sandia National Laboratories, USA, 1998.

[58] Swiler L.P., Phillips C., Ellis D., Chakerian S. Computer-attack graph generation tool // Proc. of the DARPA Inf. Surviv. Conf. and Expos. IEEE Computer Society Press 2001. V. 2. P.307-321.

[59] Ritchey R., Ammann P. Using model checking to analyse network vulnerabilities // Proc. of IEEE Symp. on Sec. and Priv. 2000. P.156-165.

[60] Sheyner O., Wing J. Tools and Generating and Analyzing Attack Graphs // Proc. of Workshop on Formal Methods for Components and Objects. 2004. P.344-371.

[61] Корбут А.А., Сигал И.Х., Финкельштейн Ю.Ю. Метод ветвей и границ. Обзор теории. алгоритмов, программ и приложений// Math. Opetat. Statist. Ser. Optimizat. 1977 B. 8. N 2. S. 253-280.

[62] Нильсон Н. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1979.

[63] Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта. М.: Радио и связь, 1985.

[64] Назарова И.А. Метод упорядоченного перебора, использующий вектор оценочных функций. М.: ВЦ РАН, 1995.

[65] Sheyner O., Haines J., Jha S. et al. Automated generation and analyses of attack graphs // Proc. of IEEE Symp. on Sec. and Priv. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2002. P. 273-284.

[66] Ortalo R., Deswarte Y., Kaaniche M. Experimenting with quantitative evaluation tools for monitoring operational security // IEEE Transact. on Software Engineering. 1999. V 25. N 5. P.633-650.

[67] Jha S., Wing J. Survivability Analyses of Networked Systems// Proc. of the 23-th International Conference on Software Engineering. Los Alamos: IEEE Computer Society Press, 2001. P. 872-874.