УДК 519.85

Н.М. Новикова, А.С. Семовская

Обратная логическая свертка в задаче поиска кратного векторного минимакса[1]

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

Рассмотрим задачу поиска значения последовательного (кратного) многокритериального минимакса

$$\Phi^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{w^1\in W^1} \operatorname*{Max}_{u^1\in U^1(w^1)} \operatorname*{Min}_{w^2\in W^2(u^1)} \operatorname*{Max}_{u^2\in U^2(w^2)} \ldots \operatorname*{Min}_{w^T\in W^T(u^{T-1})} \operatorname*{Max}_{u^T\in U^T(w^T)} \Phi(u,w), \tag{1}$$

где $\Phi(u,w) = \{\varphi_1(u,w), \varphi_2(u,w), \ldots, \varphi_Q(u,w)\} \geq 0$. (Здесь и далее "$\geq$" и "$\leq$" для векторов понимаем в смысле покомпонентного "$\geq$" и "$\leq$" соответственно.) Функции $\varphi_i(u,w) = \varphi_i(u^1,\ldots,u^T,w^1,\ldots,w^T)$, $i = 1,2,\ldots,Q$, будем предполагать непрерывными по совокупности аргументов, множества $U^t(w^t) \subset \mathbb{R}^{n_t}$ $\forall w^t \in W^t(u^{t-1})$ и $W^t(u^{t-1}) \subset \mathbb{R}^{m_t}$ $\forall u^{t-1} \in U^{t-1}(w^{t-1})$ — компактными, а отображения $U^t(\cdot)$, $W^t(\cdot)$ — непрерывными по Хаусдорфу $\forall t = 1,2,\ldots,T$ (формально полагая $W^1(u^0) \stackrel{\text{def}}{=} W^1$ и $U^0(w^0) = \emptyset$). Вектор $\Phi(u,w)$ называется вектором критериев или векторным критерием [1, 2]. Считаем, что оперирующая сторона заинтересована в его максимизации, т.е. переменные u^t являются управлениями,

[1]Работа поддержана грантами по проектам: N.99-01-01192 РФФИ, N.00-15-96141 "Научные школы" и INTAS 97 – 1050.

а w^t — неопределенными факторами.

Обобщая определения гарантированного значения векторного минимакса [2, 3] и максиминимакса [4], примем для значения (1) следующее определение

$$\Phi^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \dots \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi \geq 0 |\, \psi \leq \Phi(u, w)\}, \tag{2}$$

где Max можно понимать по Парето (как множество максимальных элементов в смысле отношения "$\geq$" среди векторов) или по Слейтеру (как множество максимальных элементов в смысле отношения "$>$" среди векторов) в зависимости от исходной трактовки значения (1). Далее в качестве базового будем рассматривать наиболее широкое — слейтеровское значение. Максимизируемое множество в (2) имеет смысл множества гарантированных оценок достижимых значений вектора критериев. Обозначим его через Ψ. Тогда задача поиска максимальных элементов Ψ соответствует принципу наибольшего гарантированного результата [1], что и приводит формально к $\Phi^* \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Max} \Psi$.

Методам векторной максимизации посвящено много работ (см. в частности [1, 2, 5, 6]). Однако множество Ψ задано неявно, поэтому трудно использовать непосредственное определение (2) для построения Φ^*. Традиционно в многокритериальной оптимизации для описания множеств Парето и Слейтера применяется *метод сверток* (см., к примеру, в [1]), позволяющий предложить их параметризацию. В задачах на векторный минимакс [3] наиболее удобной оказалась *обратная логическая* свертка (ОЛС), предложенная в [7, 8, 9] для задачи на Max. Эта свертка предполагает замену вектора $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_Q)$ параметрическим семейством скалярных критериев

$$\min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i, \quad \mu \in M, \tag{3}$$

где $M \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \geq 0 | \sum_{i=1}^{Q} \mu_i = 1\}$ – стандартный симплекс в $\mathbb{R}^Q$,

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{i = 1, 2, \ldots, Q | \ \mu_i \neq 0\}.$$

С помощью свертки (3) сведем многокритериальную задачу (1),(2) к параметрическому семейству задач поиска

$$\theta[\mu] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w^1 \in W^1} \max_{u^1 \in U^1(w^1)} \ldots \min_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \max_{u^T \in U^T(w^T)} \min_{i \in I(\mu)} \mu_i^{-1} \varphi_i(u, w) \tag{4}$$

$\forall \mu \in M$. Отметим, что в сделанных предположениях все минимумы и максимумы в (4) достигаются и являются непрерывными функциями тех компонент векторов u и w, от которых зависят (см. задачи 4.9, 4.10 из [10]).

При определенных предположениях регулярности (см. условие (9) ниже), обобщающих условия, принятые в [7, 3, 4], слейтеровское значение (1),(2) равно

$$\bigcup_{\mu\in M}\theta[\mu]\mu. \tag{5}$$

Покажем, что в общем случае в условиях задачи (1) (если не требовать дополнительной регулярности) для ОЛС выполнено включение

$$\Phi^*_{\text{П}} \subseteq \bigcup_{\mu\in M}\theta[\mu]\mu \subseteq \Phi^*_{\text{С}}. \tag{6}$$

Здесь и далее $\Phi^*_{\text{С}}$ обозначает слейтеровское, а $\Phi^*_{\text{П}}$ — паретовское значение (1),(2).

Утверждение 1: $\Phi^*_{\text{П}} \subseteq \bigcup\limits_{\mu\in M}\theta[\mu]\mu$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор ψ из левой части, тогда $\psi\in\Psi$, т.е.

$$\forall w^1\in W^1\ \exists u^1\in U^1(w^1)\ \ldots\ \forall w^T\in W^T(u^{T-1})\ \exists u^T\in U^T(w^T):$$

$$\psi\le\varphi(u,w) \tag{7}$$

и $\psi=\varphi(u,w)$ с учетом его паретовости. Пусть $\psi\neq 0$. (В противном случае $\varphi(u,w)=0$ на множестве (u,w), определяемом в (7), а значит, $\theta[\mu]=0\ \forall\mu\in M$ и доказываемое включение является равенством.) Зададим $\mu^*\in M$ как $\mu^*_i \stackrel{\text{def}}{=} \psi_i/\sum\limits_{i=1}^{Q}\psi_i$ $\forall i=1,2,\ldots,Q$. Получим из неравенства (7) и определения (4), что $\psi_i/\mu^*_i \le \theta[\mu^*]$ $\forall i\in I(\psi)$. При этом наличие хотя бы одного строгого неравенства означает строгость всех неравенств, что противоречит паретовости. Следовательно $\psi = \theta[\mu^*]\mu^*$.

Утверждение 2. Для любых векторов μ^1 и $\mu^2 \in M$, для которых $I(\mu^1) \supseteq I(\mu^2)$, не возможно, чтобы $\forall i \in I(\mu^1)$ $\theta[\mu^1]\mu_i^1 > \theta[\mu^2]\mu_i^2$.

Доказательство проведем от противного. Пусть $\exists \mu^1, \mu^2 \in M\colon\ \mu_i^1\theta[\mu^1] > \mu_i^2\theta[\mu^2]\ \ \forall i \in I(\mu^1),\, I(\mu^2) \subseteq I(\mu^1)$. Тогда, вспоминая определение (4), можем записать, что

$$\forall w^1 \in W^1\ \exists u^1 \in U^1(w^1)\ \ldots\ \forall w^T \in W^T(u^{T-1})\ \exists u^T \in U^T(w^T):$$

$$\theta[\mu^1]\mu_i^1 \le \varphi_i(u,w)\ \ \forall i \in I(\mu^1) \text{ и } \theta[\mu^2]\mu_i^2 < \varphi_i(u,w)\ \forall i \in I(\mu^1),$$

и

$$\theta[\mu^2] < \varphi_i(u,w)/\mu_i^2\ \ \forall i \in I(\mu^2),\ \text{ и }\ \theta[\mu^2] < \min_{i\in I(\mu^2)} \varphi_i(u,w)/\mu_i^2.$$

Отсюда получаем противоречие $\theta[\mu^2] < \theta[\mu^2]$, доказывающее утверждение.

Следствие 1: $\forall \mu^1, \mu^2 \in M,\ \mu^1 > 0\ \ \exists i\colon\ \theta[\mu^1]\mu_i^1 \le \theta[\mu^2]\mu_i^2$.

Следствие 2: $\bigcup\limits_{\mu\in M} \theta[\mu]\mu \subseteq \Phi^*_{\mathrm{C}}$.

Доказательство. Из следствия 1 заключаем, что в (5) нет доминируемых по Слейтеру векторов.

Таким образом (6) доказано. Это означает, что параметризация (5) — с помощью ОЛС — дает описание всех паретовских решений с частью слейтеровских. Из утверждения 2 также вытекает, что в случае $\theta[\mu] = 0$, $\mu > 0$ (когда все множество Ψ оказывается слейтеровским) в множество (5) входят, кроме нуля, лишь точки, являющиеся слейтеровскими в пространстве ненулевых компонент вектора критериев. Тем самым представление (5) решения задачи (1),(2) безусловно более информативно по сравнению с Φ^*_{C}. Аппроксимационные свойства ОЛС обосновывает следующее

Утверждение 3. Пусть выполнено условие регулярности

$$\overline{\bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \ldots \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi > 0 |\ \psi \le \Phi(u,w)\}} = \Psi. \tag{9}$$

Тогда функция $\theta[\cdot]$ (4) непрерывна $\forall \mu \in M$.

Доказательство. Возьмем $\overline{\mu} \in M$. Докажем, что $\theta[\mu]$ непрерывна в точке $\overline{\mu}$. Для этого зафиксируем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется такое число $\delta > 0$, для которого при всех $\mu \in M$, $\|\mu - \overline{\mu}\| < \delta$ справедливо неравенство $|\theta[\mu] - \theta[\overline{\mu}]| < \varepsilon$. В качестве нормы вектора будем рассматривать максимум из модулей коэффициентов.

Из утверждения 2 следует, что

$$\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu} \in \bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \ldots \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi \ge 0 |\ \psi \le \Phi(u;w)\}.$$

Поэтому $\theta[\overline{\mu}] > 0$ при выполнении (9) и можно считать, что $0 < \varepsilon < \theta[\overline{\mu}]$. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4} \min_{i \in I(\overline{\mu})} \overline{\mu}_i, \quad \varepsilon_2 = \min_{i \in I(\overline{\mu})} \theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. В силу условия регулярности найдется вектор $\psi > 0$,

$$\psi \in \bigcap_{w^1 \in W^1} \bigcup_{u^1 \in U^1(w^1)} \dots \bigcap_{w^T \in W^T(u^{T-1})} \bigcup_{u^T \in U^T(w^T)} \{\psi > 0 | \, \psi \leq \Phi(u; w)\},$$

такой что $\|\psi - \theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}\| < \varepsilon'$. Зададим $\varepsilon'' = \min\limits_i \psi_i$. Определим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \min_{i \in I(\overline{\mu})} \overline{\mu}_i, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon''}{\theta[\overline{\mu}] - \varepsilon}, \quad \delta_3 = \frac{\varepsilon \delta_1^2}{\max\limits_i \max\limits_{(u,w)} \varphi_i(u, w)},$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Поскольку в условиях задачи (1) функция $\Phi(u, w)$ ограничена, $\max\limits_i \max\limits_{(u,w)} \varphi_i(u, w)$ достигается.

Рассмотрим произвольный вектор $\mu \in M$, $\|\mu - \overline{\mu}\| < \delta$. Тогда для любого $i \in I(\overline{\mu})$ выполнено $\mu_i \geq \overline{\mu}_i/2$ (так как $\delta \leq \delta_1$) и, следовательно, $I(\overline{\mu}) \subseteq I(\mu)$. Докажем сначала, что $\theta[\overline{\mu}] - \theta[\mu] < \varepsilon$.

Если $i \notin I(\overline{\mu})$, то $\mu_i < \delta \leq \delta_2$ и $\psi_i/\mu_i \geq \varepsilon''/\mu_i > \varepsilon''/\delta_2 = \theta[\overline{\mu}] - \varepsilon$. Если же $i \in I(\overline{\mu})$, то

$$\frac{\psi_i}{\mu_i} = \frac{\psi_i}{\mu_i} - \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i} + \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i} = \theta[\overline{\mu}] + \frac{\psi_i}{\mu_i} - \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i} \geq$$

$$\geq \theta[\overline{\mu}] + \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i - \varepsilon'}{\mu_i} - \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i} = \theta[\overline{\mu}] + \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i(\overline{\mu}_i - \mu_i) - \varepsilon'\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i \mu_i} >$$

$$> \theta[\overline{\mu}] - \frac{\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i \delta}{\overline{\mu}_i \mu_i} - \frac{\varepsilon'\overline{\mu}_i}{\overline{\mu}_i \mu_i} > \theta[\overline{\mu}] - \frac{2\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i \delta_3}{\overline{\mu}_i^2} - \frac{2\varepsilon'}{\overline{\mu}_i} >$$

$$> \theta[\overline{\mu}] - \frac{2\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i \varepsilon \delta_1^2}{\overline{\mu}_i^2 \max\limits_i \max\limits_{(u,w)} \varphi_i(u, w)} - \frac{\varepsilon}{2} \geq \theta[\overline{\mu}] - \frac{2\varepsilon\delta_1^2}{\overline{\mu}_i^2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq$$

$\theta[\overline{\mu}] - \varepsilon$. В результате, для любого $i \in I(\mu)$ справедливо неравенство $\psi_i/\mu_i > \theta[\overline{\mu}] - \varepsilon$.

Заметим, что $\theta[\mu] \geq \min\limits_{i \in I(\mu)} \dfrac{\psi_i}{\mu_i}$. Действительно, если предположить противное, то получим неравенство $\theta[\mu]\mu_i < \psi_i$ $\forall i \in I(\mu)$ и $0 < \psi_i$ $\forall i \notin I(\mu)$. Отсюда $\theta[\mu]\mu < \psi$, что противоречит утверждению 2. Таким образом,

$$\theta[\mu] \geq \min_{i \in I(\mu)} \frac{\psi_i}{\mu_i} > \theta[\overline{\mu}] - \varepsilon,$$

т.е. $\theta[\mu] > \theta[\overline{\mu}] - \varepsilon$.

Теперь осталось доказать, что $\theta[\mu] - \theta[\overline{\mu}] < \varepsilon$. Имеем для любого $i \in I(\overline{\mu})$ (аналогично предыдущему)

$$\frac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i} = \frac{\theta[\mu]\mu_i}{\mu_i} + \frac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i} - \frac{\theta[\mu]\mu_i}{\mu_i} =$$

$$= \theta[\mu] + \theta[\mu]\mu_i\Big(\frac{1}{\overline{\mu}_i} - \frac{1}{\mu_i}\Big) > \theta[\mu] - \theta[\mu]\mu_i\frac{\delta}{\mu_i\overline{\mu}_i} \geq$$

$$\geq \theta[\mu] - \theta[\mu]\mu_i\frac{2\delta_3}{\overline{\mu}_i^2} = \theta[\mu] - \theta[\mu]\mu_i\frac{2\varepsilon\delta_1^2}{\overline{\mu}_i^2 \max\limits_i \max\limits_{(u,w)} \varphi_i(u,w)} \geq$$

$$\geq \theta[\mu] - \frac{\varepsilon}{2} > \theta[\mu] - \varepsilon.$$

Итак, для любого $i \in I(\overline{\mu}) \subseteq I(\mu)$ выполнено

$$\frac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i} > \theta[\mu] - \varepsilon.$$

Из утверждения 2 следует, что $\theta[\overline{\mu}] \geq \min\limits_{i \in I(\overline{\mu})} \dfrac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i}$. Действительно, предположим противное. Пусть $\theta[\overline{\mu}] < \min\limits_{i \in I(\overline{\mu})} \dfrac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i}$.

Тогда $\theta[\overline{\mu}]\overline{\mu}_i < \theta[\mu]\mu_i \ \ \forall i \in I(\overline{\mu}) \subseteq I(\mu)$, что противоречит утверждению 2. Таким образом, $\theta[\overline{\mu}] \geq \min\limits_{i \in I(\overline{\mu})} \dfrac{\theta[\mu]\mu_i}{\overline{\mu}_i} > \theta[\mu] - \varepsilon$ и утверждение 3 доказано.

Список литературы

1. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

2. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

3. *Воробейчикова О.А., Новикова Н.М.* Векторный минимакс со связанными ограничениями // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 4. С. 45–48.

4. *Новикова Н.М., Поспелова И.И.* Векторный максиминимакс // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1999. N. 4. С. 33–36.

5. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992.

6. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

7. *Смирнов М.М.* О логической свертке вектора критериев в задаче аппроксимации множества Парето // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1996. Т.36. N.3. С.334–351.

8. *Смирнов М.М.* Методы аппроксимации граней множества Парето в линейной многокритериальной задаче // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15, Вычисл. матем. и киберн. 1996. N. 3. С. 37–43.

9. *Смирнов М.М.* Метод обратной логической свертки в задачах векторной оптимизации. М: ВЦ РАН, 1996.

10. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.