УДК 519.85

М.Р. Давидсон, Н.М. Новикова

Метод агрегирования ограничений в игровой задаче стохастического программирования [1].

1. Рассматривается задача поиска значения F^0 и реализации x^0 минимума

$$\min_{x\in X} F(x), \quad F(x) = \int_Y \max_{z\in Z} f(x,y,z)\sigma(dy), \tag{1}$$

где X, Y и Z – компакты в Евклидовом пространстве, σ – вероятностная мера на Y, функция f предполагается выпуклой по x $\forall y \in Y$, $z \in Z$, непрерывной и липшицевой по совокупности переменных, интегрируемой по y по мере σ $\forall x \in X$, $z \in Z$. В таком случае функция F также выпукла, непрерывна и минимум в (1) достигается.

Задача (1) называется стохастической игровой задачей с рекурсией – двухэтапной – и соответствует в исследовании операций задаче выбора оптимальной стратегии (x^0) при наличии случайных (y) и неопределенных (z) факторов [1]. Причем, считается, что выбор значений неопределенных факторов может осуществлять сознательный противник, имеющий информацию как о применяемой стратегии, так и о конкретной реализации случайного фактора,

[1] Работа поддержана проектом РФФИ N.96-01-000786

т.е. рекурсивно. Значение (1) дает наилучший гарантированный результат оперирующей стороны в операции, целью которой является минимизация f по $x \in X$.

Судя по записи (1), при получении результата F^0 оперирующая сторона рассчитывает иметь информацию о явном виде меры σ. Но это представляется слишком ограничительным предположением. Поэтому далее будем исследовать стохастическую постановку задачи (1), которая на него не ориентируется. А именно, будем предполагать, что мера σ не известна, но доступна наблюдению произвольная последовательность $\{y^n\}$ независимых реализаций случайной величины (с.в.) y, распределенной на Y в соответствии с мерой σ. Конечно, по данному ряду наблюдений можно выписать эмпирическую функцию распределения с.в. y, аппроксимирующую σ, и потом построить алгоритм непосредственного решения (1) с известной (приближенно) мерой. Однако, есть смысл совместить численные методы поиска x^0 с процедурой случайной генерации y^n, чтобы постепенно вовлекать очередные реализации с.в. y в процесс счета, т.е. все время уточнять аппроксимацию σ. Подобная возможность, основанная на методологии *стохастического программирования* [2], и будет разрабатываться в данной статье. Отметим, что в случае известной меры σ, если интегралы по ней трудно (громоздко) вычислять, также применимы предлагаемые стохастические алгоритмы.

Задача (1) является частным случаем задач негладкой выпуклой стохастической оптимизации и для ее решения можно использовать метод стохастических квазиградиентов, предложенный в [2]. Прямой способ применения этого метода к (1) не учитывает специфики рекурсии, т.е. наличия внутреннего максимума под интегралом, и приводит к следующему алгоритму.

Выберем произвольное начальное приближение $x^1 \in X$ и последовательность шаговых множителей

$$\alpha_n \downarrow 0, \quad \sum \alpha_n = \infty, \quad \sum \alpha_n^2 < \infty, \tag{2}$$

и определим $\forall n = 1, 2, \ldots$

$$x^{n+1} = \mathbf{pr}_X \{ x^n - \alpha_n \mathbf{grad}_x f(x^n, y^n, z^n) \}, \tag{3}$$

где: **pr** – оператор проектирования (в данном случае на X),

grad – обобщенный градиент (в данном случае по x),

y^n – n-я независимая реализация с.в. y, распределенной на Y в соответствии с мерой σ, – эти обозначения будут использоваться и в дальнейшем без специальных оговорок,

$$z^n \in Arg \max_Z f(x^n, y^n, z). \tag{4}$$

Если z^n единственна, то согласно [2] последовательность $\{x^n\}$ сходится к множеству X^0 решений x^0 задачи (1) σ-п.н.

$\forall \{y^n\}$ (т.е. для почти всех последовательностей независимых случайных реализаций рассматриваемой с.в. y).

Существенный недостаток процедуры (3)–(4) заключается в шаге (4), который предполагает для всех n решение подзадачи глобальной максимизации (в отсутствие условия вогнутости по z). Заметим, что, когда точка максимума оказывается неединственной, для вычисления z^n, требуемого на шаге (3) в методе стохастических квазиградиентов, нужно считать лексикографический максимум – решать еще более сложную задачу, чем (4).

За счет отказа от п.н. сходимости метода шаг (4) удается несколько упростить, вычисляя максимум не по всему Z, а по конечному множеству из S_n случайно выбранных точек $z^{ni} \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, S_n$, $S_n \uparrow \infty$ (по методу Монте-Карло). Тогда можно доказать сходимость $\{x^n\}$ к множеству X^0 с вероятностью $1 - \eta$, где значение η зависит от скорости роста S_n (доказательство проводится аналогично доказательству сходимости метода штрафов в задаче поиска стохастического минимакса [3, 4] и соответствующие оценки совпадают).

В случае вогнутости f по z, т.е. выпукло-вогнутости f по (x, z) $\forall y \in Y$, на шаге (4) применимы градиентные методы максимизации по z, но с ростом n придется увеличивать число итераций процедуры максимизации. В этом проявляется отличие рассматриваемой задачи (1) от задачи поиска стохастической седловой точки, или

$$\min_{x\in X}\max_{z\in Z}\int_Y f(x,y,z)\sigma(dy). \tag{5}$$

Для решения (5) в предположении строгой выпукло-вогнутости интегральной целевой функции достаточно заменить шаг (4) однократным пересчетом z^n, симметричным x^n [5, 6]:

$$z^{n+1}=\mathbf{pr}_Z\{z^n+\alpha_n\mathbf{grad}_z f(x^n,y^n,z^n)\} \tag{6}$$

(выбор y^n – прежний). Процедура (3),(6) по сложности эквивалентна решению обычной – не игровой и не рекурсивной – задачи стохастической оптимизации (получающейся из (1) при независимости f от z) методом стохастических квазиградиентов (3). Однако подчеркнем, что в отличие от (1) значение (5) не дает гарантированной оценки результата оперирующей стороны и для нее стратегия, минимизирующая в (5), не будет оптимальной, так как не учитывает возможной информированности противника о реализации случайного фактора.

Принципиальная трудность задачи (1) для численного решения обусловлена не ее игровым характером, а наличием рекурсии, т.е. ее двухэтапностью. Действительно, стандартная двухэтапная задача стохастической оптимизации [2, 7], или задача поиска значения и реализации

$$\min_{x\in X}\int_Y \min_{z\in Z} f(x,y,z)\sigma(dy), \tag{7}$$

по сути эквивалентна задаче стохастической оптимизации в функциональном пространстве:

$$\min_{x\in X}\min_{z(\cdot)\in \mathbf{L_2(Y)}}\int_Y f(x,y,z(y))\sigma(dy). \tag{8}$$

Сведение (7) к (8) предлагается рядом авторов [**?**, 8, 9] как альтернатива прямой процедуре стохастического квазиградиентного спуска (соответствующей (3)–(4) при замене в (4) max на min). Для задачи (1) можно использовать такое же сведение, но получим в функциональном пространстве уже более сложную – минимаксную – задачу. Поэтому далее будем применять другой способ, предложенный в [10], приводящий к задаче условной минимизации в пространстве непрерывных функций.

Воспользуемся схемой [1] сведения обычной минимаксной задачи к задаче на минимум, тогда для (1) будем иметь эквивалентную запись

$$\min_{x\in X}\min_{u(\cdot)\in \mathbf{C(Y)}}\int_Y u(y)\sigma(dy) \tag{9}$$

$$u(y)\geq f(x,y,z)\ \ \forall z\in Z,\ \ \sigma\text{−п.н.}\ \ \forall\ y\in Y. \tag{10}$$

Задача (9)–(10) является задачей минимизации в бесконечномерном пространстве при наличии бесконечного числа ограничений. Минимум достигается по теореме Вейерштрасса

[11] за счет линейности целевого функционала в (9), выпуклости и замкнутости множества ограничений (10) и ограниченности снизу на этом множестве минимизируемого функционала (в сделанных предположениях). Функция $u^0(\cdot)$, реализующая минимум в (9)–(10), дает при σ-п.н. каждом $y \in Y$ наилучшую гарантированную оценку результата оперирующей стороны в случае реализации этого значения y.

Будем искать функцию $u^0(\cdot)$ в виде приближения конечным отрезком ее ряда Фурье. Для этого зададимся произвольным базисом $\xi = \{\xi_i(\cdot)\}$ в пространстве $\mathbf{C}(\mathbf{Y})$, например, тригонометрической системой на Y. Формально запишем произвольную функцию $u(\cdot) \in \mathbf{C}(\mathbf{Y})$ как

$$u(y) = \sum_i a_i \xi_i(y) \quad \forall y \in Y \tag{11}$$

и представим ее бесконечным вектором коэффициентов Фурье $a = (a_1, a_2, \ldots)$. Отметим, что по меньшей мере $a \in \mathbf{l_2}$, т.е. $\sum_i a_i^2 < \infty$, и $a_i \to 0,\ i \to \infty$. Далее предположим, что фиксировано некоторое число коэффициентов $l < \infty$, задающее точность определения $u^0(\cdot)$. Тогда вместо (9)–(10) можно рассмотреть конечномерную задачу поиска

$$\min_{x \in X} \min_{a \in \mathbf{R^l}} \int_Y \sum_{i=1}^{l} a_i \xi_i(y) \sigma(dy) \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \xi_i(y) \geq f(x, y, z) \quad \forall z \in Z, \quad \sigma\text{−п.н.} \ \ \forall\, y \in Y. \tag{13}$$

Задача (12)–(13) оказывается задачей *полубесконечной оптимизации* [12, 13] из-за наличия бесконечного числа ограничений в (13), и для ее решения применимы различные численные методы (см. например, обзоры [14, 15]). Учитывая бесконечномерность исходной постановки (9)–(10), рассмотрим метод из [16] как наиболее подходящий для решения задач большой размерности (возникающих при больших l).

Предложенный в [16] метод решения задач полубесконечной оптимизации является стохастическим вариантом регуляризованного метода агрегирования ограничений [17, 18], совмещающего схему итеративного агрегирования многих ограничений [19] с prox-регуляризацией [20, 21]. В применении к задаче (12)–(13) указанный метод приводит к следующему алгоритму.

Выберем произвольное начальное приближение $x^1 \in X$, $a^1 \in \mathbf{R^l}$ и последовательность шаговых множителей α_n, удовлетворяющих (2), и определим $\forall n = 1, 2, \ldots$ вектор (x^{n+1}, a^{n+1}) как реализацию

$$\min_{x \in X} \min_{a \in \mathbf{R^l}} \{ (|x - x^n|^2 + |a - a^n|^2) + \alpha_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{l} a_i \xi_i(y^j) \} \qquad (14)$$

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \xi_i(y^n) \geq f(x, y^n, z^n) \text{ при } \sum_{i=1}^{l} a_i^n \xi_i(y^n) < f(x^n, y^n, z^n),$$

где y^n выбирается как и в алгоритме (3)–(4),

z^n является n-й независимой реализацией равномерного распределения на Z,

а знак $|\cdot|$ здесь и далее обозначает норму в Евклидовом пространстве.

Ограничение $\sum\limits_{i=1}^{l} a_i \xi_i(y^n) \geq f(x, y^n, z^n)$ является ослаблением (релаксацией) (13), поскольку предполагает неравенство лишь для случайных реализаций y^n, z^n вместо п.н. для всех. В случае выполнения этого релаксированного ограничения на n-м шаге алгоритма получим $x^{n+1} = x^n$ и сместимся по a в сторону минимума статистической оценки целевой функции (12). В противном случае алгоритм корректирует x^n и a^n, обеспечивая выполнение релаксированного ограничения для реализовавшихся y^n, z^n. На следующем шаге переходим к новым случайным реализациям.

Если вместо суммы по j в (14) минимизируется интеграл по мере σ, то обоснование соответствующего алгоритма следует из результатов [16]. Однако для рассматриваемой стохастической постановки такая подзадача не решается эффективно. Поэтому в данном алгоритме используется предлагаемая аппроксимация интеграла. Естественно, вычислять сумму по j в (14) на каждом шаге по n не придется: достаточно ввести вектор следящих параметров s^n, пересчитываемый по правилу

$$s_i^0 = 0, \quad s_i^{n+1} = \frac{n s_i^n + \xi_i(y^{n+1})}{n+1} \quad \forall n = 1, 2, \ldots, \quad \forall i = 1, \ldots, l,$$

и вместо двойной суммы в целевой функции (14) использовать $\sum\limits_{i=1}^{l} a_i s^i$.

Заметим, что максимизацию по a в (12)–(13) и (14) не обязательно проводить на всем пространстве, но можно ограничиться компактным множеством коэффициентов, поскольку исходная функция $u(\cdot)$ конечна (ее значения лежат между минимумом и максимумом $f(x, y, z)$ на компакте $X \otimes Y \otimes Z$).

Теперь, путем соответствующей модификации доказательства теоремы 1 из [16] может быть доказано

Утверждение 1. Последовательность $\{(x^n, a^n)\}$, построенная по алгоритму (14), сходится к множеству решений задачи (12)–(13) в среднем квадратичном.

При более жестких, чем (2), условиях на выбор параметров α, а именно,

$$\alpha_n \downarrow 0, \quad \sum \alpha_n = \infty, \quad \sum \alpha_n^{1 \frac{1}{2m+1}} < \infty, \tag{15}$$

где m – размерность $Y \otimes Z$, получим

Утверждение 2. Последовательность $\{(x^n, a^n)\}$, построенная по алгоритму (14),(15), сходится к некоторому решению задачи (12)–(13) с вероятностью 1.

Действительно, ограничения (13) являются слейтеровскими, т.е. существуют такие x и a, что справедливо строгое неравенство в (13). Таким образом, выполнено условие регулярности из [16, 5] с показателем $m+1$ (см. в [5, 10]). Поэтому можем доказать утверждение 2 по аналогии с доказательством теоремы 2 из [16].

Кроме того, выбор $\alpha_n = O(1/n)$ обеспечивает оценку скорости сходимости алгоритма в среднем квадратичном порядка $O(n^{\frac{-1}{2m+1}})$. Константа зависит от порядка аппроксимации l, диаметра множества X и компакта, ограничивающего значения коэффициентов a_i, а также константы Липшица функции f (подробнее см. в [16]).

Работа поддержана проектом РФФИ N.96-01-00786.

Список литературы

[1] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[2] Ермольев Ю.М. Стохастическое программирование. М.: Наука, 1976.

[3] Новикова Н.М. Некоторые методы стохастического программирования в гильбертовом пространстве // Ж. вы-

числ.матем. и матем. физики, 1985. Т.25. N12. С.1795-1813.

[4] Завриев С.К. Субградиентные методы в двухшаговой лексикографической оптимизации для задачи с бесконечным числом ограничений / Вычислительная математика и моделирование. М.: Издательство МГУ, 1990. 1. С. 383-394.

[5] Новикова Н.М. Метод поиска стохастической седловой точки // Ж. вычисл. матем. и матем.физики, 1989. Т.29. N1. С. 39-49.

[6] Nemirovski A., Rubinstein R.Y. An efficient stochastic approximation algorithm for stochasic saddle point problem. Working paper. Technion, Haifa, Israel, 1997.

[7] Numerical Techniques for Stochastic Optimization. Ermoliev Y., Wets R.J-B., eds. Springer Series in Comp. Math. V.10. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[8] Rockafellar R.T., Wets R.J-B. Stochastic convex programming: Basic duality // Pacific J. Math., 1976. V.62. P. 173-195.

[9] Kall P. Computational methods in two stage linear programming problems // Z. Angew. Math. und Phys., 1979. V. 30. N. 2. P. 261-271.

[10] Lepp R. Discrete approximation of linear two-stage stochastic programming problem // Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1987. V. 9. N. 1-2. P. 19-33.

[11] Novikova N. Iterative Stochastic Methods for Solving Variational Problems of Mathematical Physics and Operations Research // Journal of Math. Sciences (Contemprorary Mathematics and Its Applications, Vol.3), New York - London, Plenum Publ. Corp., 1994. N1. P.1-125.

[12] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

[13] Fiacco A. and Kortanek K. Semi-Infinite Programming and Applications / Lecture-Notes in Econom. and Math. Systems. V. 215. New-York: 1983.

[14] Semi-Infinite Programming. Hettich R., ed. / Lecture Notes in Control and Inform. Sci. V.15. New-York: 1979.

[15] Hettich R. A review of numerical methods for semi-infinite optimization / Semi-Infinite Programming and

Applications. Lecture-Notes in Econom. and Math. Systems. V. 215. New-York: Springer-Verlag, 1983.

[16] Hettich R. and Kortanek K. Semi-infinite programming: theory, methods, and applications // SIAM Rev, 1993. V.35. P. 380-429.

[17] Davidson M. Stochastic constraint aggregation method for convex semi-infinite problems. Working paper 97-17. University Trier, 1997.

[18] Davidson M. Proximal point mappings and constraint aggregation principle. Working paper WP-96-102. IIASA, Laxenburg, 1996.

[19] Давидсон М.Р. Регуляризованный метод агрегирования ограничений для задачи полубесконечной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем.физики, 1998. Т.38, N .

[20] Ermoliev Y., Kryazhimskii A., Ruszczynski A. Constraint Aggregation Principle in Convex Optimization. Working paper WP-95-015. IIASA, Laxenburg, 1995.

[21] Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control Optim, 1976. V.15. P.877-898.

[22] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.