УДК 519.85

М.Р. Давидсон, Д.Д. Соломахин

Один метод решения задачи стохастического программирования с ограничениями, выполняющимися почти наверное

(Кафедра исследования операций факультета ВМиК)

1 Постановка задачи

В статье предложен алгоритм решения задачи стохастического программирования с ограничениями, выполняющимися почти наверное (п.н.). Аналогичные постановки приводятся, например, в [1].

Рассматривается задача поиска значения f^* и реализации x^* минимума

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \mathbf{E} f(x,y), \tag{1}$$

где

$$\mathcal{X} = \{x{\in}X|\ g(x,y) \le 0 \text{ п.н. } \forall y{\in}Y\}, \tag{2}$$

$\mathbf{E}$ — математическое ожидание по $y{\in}Y$. Термин п.н. и математическое ожидание $\mathbf{E}$ понимаются в смысле меры P вероятностного пространства (Ω, A, P), где $\Omega = Y$, A — σ-алгебра на Ω. Считаем, что вероятностная мера P взаимно непрерывна относительно меры Лебега. Ограничение

(2) формально соответствует следующему:

$$\mathcal{X} = \bigcup_{Y'\subseteq Y:\ P(Y')=1} \{x\in X \mid g(x,y)\geq 0\ \forall y\in Y'\}.$$

Пусть функции $f(\cdot,y):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и $g(\cdot,y):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ являются выпуклыми по $x\ \ \forall y\in Y$, множество Y — компактом, а множество X — выпуклым компактом. Также предполагается, что функции $f(x,y)$ и $g_+^2(x,y)$ измеримы по $y\ \ \forall x\in X$. Кроме того, будем считать, что функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных с постоянными L_f и L_g соответственно. В этих условиях минимум в задаче (1), (2) достигается.

Возможная интерпретация задачи такова, что ЛПР (лицо, принимающее решения) минимизирует свои средние потери в некоторой операции. Функция потерь f зависит от реализации случайного фактора y, распределенного на Y в соответствии с мерой P. Ограничения операции задаются условиями неположительности функции g, которая также зависит от случайного фактора y, а не только от выбранной стратегии x. Однако выполнение ограничений является обязательным, поэтому ЛПР обеспечивает неположительность функции g не в среднем, а почти наверное.

Близкие задачи уже рассматривались ранее. Так, стохастическая задача поиска седловой точки с п.н. ограничениями исследовалась в [2], где, в отличие от данной работы, для снятия ограничений был применен метод штрафов. В [3] и [4] построен алгоритм для решения задачи полубесконечной минимизации функции, не являющейся интегральной функцией регрессии. На дальнейшем развитиии этого алгоритма базируется и настоящая статья. Можно также обратиться к [5], где предложен эффективный приближенный алгоритм решения задачи стохастического программирования с осредненными ограничениями, который, однако, не может быть адаптирован к данной постановке из-за бесконечного числа ограничений в (2).

2 Алгоритм решения задачи

Выберем числовую последовательность регулирующих множителей

$$\tau^k:\ \tau^k \geq 0,\ \tau^k \to 0,\ \Sigma\tau^k = \infty.$$

Пусть $\xi^1,\ \xi^2, \ldots$ — последовательность независимых реализаций случайной величины y, распределенной на множестве Y в соответствии с вероятностной мерой P. Задавая произвольным образом начальное приближение x^0, определяем затем x^{k+1} $\forall k = 0, 1, \ldots$ из последовательного решения задач

$$\min_{x \in \mathcal{X}_k} \{\tau^k f(x, \xi^k) + |x - x^k|^2/2\}, \tag{3}$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{X}_k$ — агрегированное множество ограничений,

$$\mathcal{X}_k = \{x \in X|\ g(x, \xi^k) \le 0\}.$$

Зададим вероятностное пространство, на котором будет изучаться сходимость алгоритма: введем пространства

$$(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k),\ k \ge 1, \quad \text{где} \ \ \Omega_k = \bigotimes\nolimits_{i=1}^{k} Y,$$

$\mathcal{A}_k$ — σ-алгебра борелевских множеств на Ω_k, $P_k(B^k) = P((\xi^1, \ldots, \xi^k) \in B^k)$. Тогда $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, P^*)$ — вероятностное пространство с $\Omega^* = \bigotimes\limits_{i=1}^{\infty} Y$, $\mathcal{A}^*$ — минимальной σ-алгеброй, образованной всеми $\mathcal{A}_k$, и P^* — вероятностной мерой, продолжающей каждую из P_k на Ω^* (подробнее см. в [6]). Обозначим через $\mathbf{E_k}(\cdot|\ \mathcal{A}_{k-1})$ условное математическое ожидание, а через $\mathbf{E}^*$ — математическое ожидание, в смысле вероятностного пространства $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, P^*)$.

Для корректности постановки (3) будем предполагать, что отображение $\mathcal{X}_k : \ Y \to 2^X$ является полунепрерывным снизу по Хаусдорфу. При этом случайные величины $x^1, x^2, \ldots$, полученные в соответствии с алгоритмом, оказываются непрерывно зависящими от $\xi^1, \xi^2, \ldots$ (см., например, в [7]), и следовательно, P^*-измеримыми и интегрируемыми со своими квадратами.

3 Вспомогательные утверждения

Перед тем как переходить к изучению вопроса о сходимости данного алгоритма, сформулируем и докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Для любого $x^k \in X$ и x^{k+1}, определяемого через x^k согласно (3), справедливо неравенство

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1}, \mathcal{X}^*)) \le \rho^2(x^k, \mathcal{X}^*) + 2\tau_k\{f^* - \mathbf{E_k} f(x^{k+1}, \xi^k)\} -$$
$$- \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2),$$

где $\mathcal{X}^*$ — множество решений исходной задачи, ρ — расстояние в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^* \in \mathcal{X}^*$, тогда $\rho(x^{k+1}, \mathcal{X}^*) \le |x^{k+1} - x^*|$. Имеем

$$|x^{k+1} - x^*|^2 = |x^k - x^*|^2 + 2\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^* \rangle + |x^{k+1} - x^k|^2. \tag{4}$$

Условия оптимальности Куна-Таккера на k-м шаге дают

$$\langle \tau_k \partial_x f(x^{k+1}, \xi^k) + x^{k+1} - x^k,\ x - x^{k+1} \rangle \ge 0 \ \forall x \in \mathcal{X}_k,$$

где ∂_x — элемент субдифференциала выпуклой по x функции $f(\cdot, \xi^k)$. Полагая $x = x^* \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_k$, получим

$$\langle \tau_k \partial_x f(x^{k+1}, \xi^k),\ x^* - x^{k+1} \rangle + \langle x^{k+1} - x^k, x^* - x^{k+1} \rangle \ge 0.$$

Перепишем второе слагаемое в правой части (4) как

$$\langle x^{k+1}-x^k, x^k-x^*\rangle = -|x^{k+1}-x^k|^2 + \langle x^{k+1}-x^k, x^*-x^{k+1}\rangle$$

и на основании предыдущей оценки будем иметь

$$\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*) \le |x^{k+1}-x^*|^2 = |x^k-x^*|^2 + 2\langle x^{k+1}-x^k, x^{k+1}-x^*\rangle -$$

$$-|x^{k+1}-x^k|^2 \le |x^k-x^*|^2 + 2\tau_k\{f(x^*,\xi^k)-f(x^{k+1},\xi^k)\} - |x^{k+1}-x^k|^2.$$

Беря условное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства, получаем по определению f^* и с учетом произвольности $x^*\in\mathcal{X}^*$ утверждение леммы.

Лемма 2. Для любого k справедливо неравенство

$$\mathbf{E_k}([g(x^{k+1},\xi^k)]_+^2) + \mathbf{E_k}([g(x^k,\xi^k)]_+^2) \le L_g^2\mathbf{E_k}(|x^{k+1}-x^k|^2).$$

Доказательство. Для произвольного $y\in Y$ разложим функцию $[\cdot]_+^2$ в ряд Тейлора в точке $g(x^k,y)$

$$[g(x,y)]_+^2 = [g(x^k,y)]_+^2 + ([g(x^k,y)]_+^2)'(g(x,y)-g(x^k,y)) +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{\Delta\psi\to 0}\frac{([g(\psi+\Delta\psi,y)]_+^2)' - ([g(\psi,y)]_+^2)'}{\Delta\psi}(g(x,y)-g(x^k,y))^2,$$

где ψ находится между x и x^k.

Выбирая $x=x^{k+1}$ и учитывая, что производная функции $[\cdot]_+^2$ является липшицевой с константой 2, получим неравенство

$$[g(x^{k+1},y)]_+^2 \le [g(x^k,y)]_+^2 + 2[g(x^k,y)]_+(g(x^{k+1},y)-g(x^k,y)) +$$

$$+(g(x^{k+1},y)-g(x^k,y))^2.$$

Полагая $y=\xi^k$ и беря условные математические ожидания от обеих частей неравенства, получаем утверждение леммы.

4 Анализ сходимости алгоритма

Теорема 1. Пусть выполнены все ранее сделанные предположения и последовательность $\{x^k\}$ получена в соответствии с алгоритмом, тогда

$$\mathbf{E}^*(\rho^2(x^k,\mathcal{X}^*))\to 0.$$

Доказательство. По лемме 1 справедливо неравенство

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*))\le\rho^2(x^k,X^*)+2\tau_k(f^*-\mathbf{E_k}f(x^{k+1},\xi^k))-$$

$$-\mathbf{E_k}(|x^{k+1}-x^k|^2).$$

Возьмем последовательность

$$\delta_k\ge 0:\ \delta_k\to 0,\ \Sigma\delta_k=\infty,\ \lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k}{\tau_k}=0,$$

и введем два множества индексов:

$$K_-=\{k=1,2,\ldots\,|\,2\tau_k(\mathbf{E_k}f(x^{k+1},\xi^k)-f^*)+\mathbf{E_k}(|x^{k+1}-x^k|^2)\ge\delta_k\},$$

$$K_+=\{k=1,2,\ldots\}\backslash K_-.$$

Покажем, что K_+ бесконечно. Предположим противное

$$\max\{k|k\in K_+\}\le N,$$

тогда $\forall k \geq N$ получим

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1}, \mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k, \mathcal{X}^*) - \delta_k$$

и (после взятия от обеих частей безусловного математического ожидания)

$$\mathbf{E}^*(\rho^2(x^{k+1}, \mathcal{X}^*)) \leq \mathbf{E}^*(\rho^2(x^k, \mathcal{X}^*)) - \delta_k.$$

Суммируя неравенства для каждого k и учитывая, что ряд из δ_k расходится, приходим к противоречию. Итак, K_+ содержит бесконечное число элементов.

Имеем $\forall k \in K_+$

$$2(\mathbf{E_k} f(x^{k+1}, \xi^k) - f^*) + \frac{\mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2)}{\tau_k} \leq \frac{\delta_k}{\tau_k}.$$

Учтем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k/\tau_k = 0$, тогда

$$\mathbf{E_k} f(x^{k+1}, \xi^k) - f^* + \frac{\mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2)}{2\tau_k} \to 0,\ k \to \infty,\ k \in K_+.$$

Поскольку $\mathbf{E_k} f(x^{k+1}, \xi^k)$ ограничено, то $\mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2) \to 0$ при $k \to \infty$, и, значит, можно записать, что

$$2(\mathbf{E_k} f(x^k, \xi^k) - f^*) + \frac{\mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2)}{\tau_k} \leq \frac{o(\tau_k)}{\tau_k},\ k \in K_+. \quad (5)$$

Перепишем это неравенство, используя лемму 2,

$$2(\mathbf{E_k} f(x^k, \xi^k) - f^*) + \frac{\mathbf{E_k}([g(x^k, \xi^k)]_+^2)}{L_g^2 \tau_k} \leq \frac{o(\tau_k)}{\tau_k},\ k \in K_+.$$

Обозначим $[g(x^k,\xi^k)]_+^2 = g_+^k$ и покажем, что для $k \in K_+$

$$\rho^2(x^k,\mathcal{X}^*)\to 0 \quad P^*\text{–п.н.}.$$

Предположим противное: существует подпоследовательность $\{x^r\}\subseteq\{x^k\}$, $k\in K_+$: $\lim\limits_{r\to\infty}\rho^2(x^r,\mathcal{X}^*) = b > 0$ с $P^* > 0$. Так как $\mathbf{E_r} f(x^r,\xi^r)$ ограничено, $\mathbf{E_r}(g_+^r)\to 0$. Тогда и $\mathbf{E}^*(g_+^r)\to 0$, и можно выбрать подпоследовательность индексов $\{r_j\}$: $g_+^{r_j}$ сходится к нулю с вероятностью 1. Поскольку функция g липшицева, то и $\max\limits_{y\in Y}[g(x^{r_j},y]_+$ сходится к нулю с вероятностью 1. Это означает, что множество предельных точек подпоследовательности $\{x^{r_j}\}$ принадлежит $\mathcal{X}$ с вероятностью 1. Отсюда $\lim\limits_{r^j\to\infty}\inf\{\mathbf{E}f(x^{r_j},y) - f^*\} \geq 0$ с вероятностью 1. Тогда для $k = r_j$ заменим в (5) $\mathbf{E_k} f(x^k,\xi^k) - f^*$ на $[\mathbf{E_k} f(x^k,\xi^k) - f^*]_+$ и получим, что $\mathbf{E_{r_j}} f(x^{r_j},\xi^{r_j}) \to f^*$ с вероятностью 1, т.е. $\mathbf{E}f(x^{r_j},y) \to f^*$ (последовательность $\{x^{r_j}\}$ для задачи (1),(2) — минимизирующая) с вероятностью 1. Теперь из непрерывности $\mathbf{E}f(\cdot,y)$ следует $\rho(x^{r_j},\mathcal{X}^*)\to 0$ с вероятностью 1, что противоречит сделанному ранее предположению.

Объединяя условия для K_+ и K_-, приходим к неравенству

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*))\leq\max[\varphi_k, \rho^2(x^k,\mathcal{X}^*) - \delta_k] \quad P^*\text{–п.н.}, \quad \text{или}$$

$$\mathbf{E}^*(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*))\leq\max[\varphi_k, \mathbf{E}^*(\rho^2(x^k,\mathcal{X}^*)) - \delta_k],$$

где $\varphi_k\to 0$. Применяя к этому выражению лемму Дермана-Сакса (подробнее см. [8]), получаем утверждение теоремы.

5 Сходимость алгоритма в регулярном случае

Сформулируем условие регулярности, при выполнении которого ниже будет показано, что последовательность $\{x^k\}$, полученная в соответствии с алгоритмом, сходится ко множеству оптимальных точек $\mathcal{X}^*$ с вероятностью 1.

Предположение P1. Существуют константы $\alpha > 1,\ l > 0$, такие что

$$\forall x \in X,\ \rho(x, \mathcal{X}) \leq 1 : \quad \int_Y [g(x,y)]_+^2 P(dy) \geq l \rho^\alpha(x, \mathcal{X}).$$

Условия выполнения P1 имеются в [2]. Из P1 следует, что для каждого k верно неравенство

$$\mathbf{E_k}([g(x^k, \xi^k]_+^2) = \int_Y [g(x^k, y)]_+^2 P(dy) \geq l \rho^\alpha(x^k, \mathcal{X}). \qquad (6)$$

Теорема 2. Пусть выполнены все ранее сделанные предположения и предположение P1 и последовательность τ_k удовлетворяет дополнительному условию $\Sigma \tau_k^{\alpha/(\alpha-1)} < \infty$, тогда последовательность $\{x^k\}$, полученная в соответствии с алгоритмом, сходится ко множеству оптимальных точек $\mathcal{X}^*$ с вероятностью 1.

Доказательство. По лемме 1 для любого $x^* \in \mathcal{X}^*$

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1}, \mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k, \mathcal{X}^*) + 2\tau_k \mathbf{E_k}(f(x^*, \xi^k) -$$

$$- f(x^{k+1}, \xi^k)) - \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2);$$

$$\mathbf{E_k}(f(x^*,\xi^k)-f(x^{k+1},\xi^k)) = \mathbf{E_k}(f(x^*,\xi^k)-f(x^k,\xi^k)+f(x^k,\xi^k)-$$
$$-f(x^{k+1},\xi^k)) = \mathbf{E_k}(f(x^*,\xi^k)-f(x^k,\xi^k))+\mathbf{E_k}(f(x^k,\xi^k)-f(x^{k+1},\xi^k)).$$

Поскольку функция f липшицева, имеем

$$\mathbf{E_k}(f(x^k,\xi^k) - f(x^{k+1},\xi^k)) \leq L_f \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|),$$

$$\mathbf{E_k}(f(x^*,\xi^k) - f(x^k,\xi^k)) \leq L_f |x^k - x^*| \leq L_f \rho(x^k, \mathcal{X}).$$

Исходное неравенство запишется в виде

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k,\mathcal{X}^*) + 2\tau_k L_f \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|)+$$
$$+2\tau_k L_f(\rho(x^k,\mathcal{X})) - \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2). \qquad (7)$$

Учитывая P1 и (6), перепишем (7) как

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k,\mathcal{X}^*) + (2\tau_k L_f/l^{1/\alpha}) \mathbf{E_k}{}^{1/\alpha}([g(x^k,\xi^k)]_+^2)+$$
$$+2\tau_k L_f \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|) - \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2). \qquad (8)$$

Преобразуем (8), используя лемму 2,

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k,\mathcal{X}^*) + 2\tau_k L_f (L_g^2/l)^{1/\alpha} \mathbf{E_k}{}^{1/\alpha}(|x^{k+1} - x^k|^2)+$$
$$+2\tau_k L_f \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|) - \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|^2). \qquad (9)$$

Теперь воспользуемся неравенством

$$\mathbf{E_k}{}^{1/2}(|x^{k+1} - x^k|^2) \geq \mathbf{E_k}(|x^{k+1} - x^k|).$$

Обозначим $\gamma_0 = \mathbf{E_k}{}^{1/2}(|x^{k+1} - x^k|^2)$ и продолжим (9) как

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1},\mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k,\mathcal{X}^*) + 2\tau_k L_f (L_g^2/l)^{2/\alpha} \gamma_0{}^{1/\alpha} + 2\tau_k L_f \gamma_0 - \gamma_0{}^2 \leq$$

$$\leq \rho^2(x^k, \mathcal{X}^*) + \max_{\gamma}\{q_1\tau_k\gamma^{2/\alpha} - \gamma^2/2\} + \max_{\gamma}\{q_2\tau_k\gamma - \gamma^2/2\},$$

где через q (с индексами) обозначаются соответствующие константы. Чтобы оценить последнее выражение, возьмем $\gamma = u^{\alpha/2}$, тогда

$$\mathbf{E_k}(\rho^2(x^{k+1}, \mathcal{X}^*)) \leq \rho^2(x^k, \mathcal{X}^*) + q_3\tau_k^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Применяя к этому выражению лемму Гладышева (см., например, [9]), получаем утверждение теоремы.

Работа поддержана грантом РФФИ по проекту N.96-01-00786.

Список литературы

1. Numerical Techniques for Stochastic Optimisation. Yu.M. Ermoliev, R.J-B. Wets, eds. Springer Series in Comp. Math., V.10. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

2. Новикова Н.М. Метод поиска стохастической седловой точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1989. Т.29, N.1. С. 39–49.

3. Davidson M.R. Stochastic Constraint Aggregation Method for Convex Semi-Infinite Problems // Symposium uber Operations Research (SOR 97), Jena: Friedrich-Shiller-Universitat, 1997.

4. Давидсон М.Р. Регуляризованный метод агрегирования ограничений для задачи полубесконечной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1998. Т.38. N.5. С. 770–776.

5. Nemirovski A., Rubinstein R. An Efficient Stochastic Approximation Algorithm for Stochastic Saddle Point Problems. Working paper. Technion, Haifa, Israel, 1996.

6. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей М.: Мир, 1969.

7. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

8. Вазан М. Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.

9. Поляк Б. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.