УДК 519.85

Н.М. Новикова, С.Л. Соловьева

# Игровая модель принятия инвестиционных решений[1]

(кафедра исследования операций факультета ВМиК)

**1. Постановка задачи.** Пусть Совет директоров некоторого банка принимает решение об участии в финансировании, возможно, долевом, ряда проектов. Считаем, что задано множество проектов $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1, \ldots, a_m\}$ и каждый проект $a_i$ характеризуется двумя агрегированными показателями:

$p_i$ — затраты банка,

$\Delta_i$ — выручка банка (приведенная чистая прибыль).

Предположим, что любой проект допускает полное или частичное (в произвольной доле $\alpha_i \in [0, 1]$) финансирование, причем при долевом участии показатели проекта сохраняются, соответственно, как $\alpha_i p_i$ и $\alpha_i \Delta_i$. Таким образом решение банка формализуется в виде вектора $\alpha \in U \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]^m$. (Модель для случая возможности лишь полного финансирования, причем, какого-либо одного проекта была исследована в [1].)

Вектор $\alpha \in U$ характеризуется затратами $p(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i$ и выручкой $\Delta(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta_i$. Банк стремится увеличить вы-

[1]Исследование проведено в рамках проекта N.96-15-96143 “Научные школы”.

ручку и уменьшить затраты, т.е. решение $\alpha$ для него лучше чем $\alpha'$, если $\Big(-p(\alpha), \Delta(\alpha)\Big) \geq \Big(-p(\alpha'), \Delta(\alpha')\Big)$. Здесь и далее $\geq$ для векторов означает покомпонентное $\geq$, но не совпадение.

В результате возникает двухкритериальная задача для банка:

$$\Big(-p(\alpha), \Delta(\alpha)\Big) \;\rightarrow\; \max_{\alpha \in U}. \tag{1}$$

Отметим, что многокритериальность в оптимизации, как правило, приводит [2] к неединственности оптимума и предполагает построение следующего множества неулучшаемых вариантов.

Определение 1. Множеством Парето в задаче максимизации по $y \in Y$ вектора $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_Q)$ критериев $\varphi_q(y)$ называется множество $\Psi^* = \{\psi \in \mathbb{R}^Q|$

$$\exists y^* \in Y\colon\ \psi = \varphi(y^*) \text{ и } \forall y' \in Y \text{ не выполнено } \varphi(y') \geq \varphi(y^*)\}, \tag{2}$$

обозначаемое $\operatorname*{Max}_{y \in Y} \varphi(y)$ и имеющее смысл значения этого максимума. Множеством оптимальных по Парето (паретовских) решений указанной задачи называется любое такое $Y^* \subseteq Y$, что $\varphi(Y^*) = \Psi^*$. Далее будем в качестве реализаций векторного максимума рассматривать минимальные по включению $Y^*$.

Согласно общей методологии исследования операций выбор конкретной точки множества Парето осуществляется лицом, принимающим решение. Однако в рассматриваемой ситуации таких лиц несколько — Совет директоров. Поэтому нужен механизм принятия решения на основе мнений всех членов Совета. Ниже будет предложен и обоснован (при определенных условиях) подобный механизм.

В разделе 2 будет показано, что для выбора конкретной точки множества Парето банку достаточно принять решение об общей сумме $p$ затрат на инвестирование. Тем самым, Совет директоров должен определить лишь один скалярный показатель, что позволяет применить механизм, предложенный в [3]. Его исследование для данной модели проводится в разделе 3, содержащем основные теоретические результаты работы. Будет построена игра $N$ лиц, соответствующая рассматриваемому механизму, и найдено для нее равновесие в доминирующих стратегиях и сильное равновесие по Нэшу. Таким образом будут получены оптимальные стратегии членов Совета директоров, такие что принятое на их основе решение окажется оптимальным для банка в целом. Существенно, что для определения указанных стратегий членам Совета не потребуется информации о функциях предпочтений партнеров.

**2. Параметризация множества паретовских решений в задаче для банка.** Перепишем задачу (1) с учетом (2) как задачу поиска значения и реализации

$$\operatorname*{Max}_{\alpha\in U}\Big(-p(\alpha),\Delta(\alpha)\Big). \tag{3}$$

Множество паретовских решений $\alpha^*$ задачи (3) обозначим

$$A^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg\operatorname*{Max}_{\alpha\in U}\Big(-p(\alpha),\Delta(\alpha)\Big).$$

Здесь arg с маленькой буквы подчеркивает, что для минимальности по включению реализации (3) следует в множество паретовских решений включать только по одному (любому) представителю для каждого элемента $(-p^*,\Delta^*)$ множества Парето (3): $p^*=p(\alpha^*)$, $\Delta^*=\Delta(\alpha^*)$. По определению 1

1) $\forall\alpha,\alpha'\in A^*$, если $p(\alpha)=p(\alpha')$, то $\alpha=\alpha'$, а если $p(\alpha)>p(\alpha')$, то и $\Delta(\alpha)>\Delta(\alpha')$,

2) $\forall\alpha'\in A\setminus A^*\ \ \exists\alpha\in A^*$ такое, что $p(\alpha)\le p(\alpha')$ и $\Delta(\alpha)\ge\Delta(\alpha')$.

Покажем, что множество $A^*$ допускает параметризацию по величине $p$ затрат банка.

Из условия 1) видно, что в множестве $A^*$ нет двух разных векторов с одним и тем же значением $p$. Остается доказать, что для любого значения $p\in[0,\sum\limits_{i=1}^{m}p_i]$ возможных затрат на инвестирование найдется вектор $\alpha^*[p]\in A^*$, для которого

$p(\alpha^*[p]) = p$, т.е. найдется оптимальный по Парето набор проектов, реализующий это значение. Нетрудно проверить, что требуемый набор проектов является решением скалярной задачи максимизиции $\Delta(\alpha)$ при ограничениях $p(\alpha) = p$, $\alpha \in U$. Указанное решение существует и для его поиска можно модифицировать лемму Гиббса (см., к примеру, [4]) применительно к данному случаю $U \neq \mathbb{R}^m$. В результате (после проведения всех вычислений) удается построить параметризацию множества оптимальных наборов проектов в следующем виде.

Утверждение 1: $A^* = \bigcup\limits_{p \in [0, \sum_{i=1}^m p_i]} \alpha^*[p]$, где

$$\alpha_i^*[p] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & i = i_1, \ldots, i_{r(p)}, \\ \frac{p - p_{i_1} - \ldots - p_{i_{r(p)}}}{p_{i_{r(p)+1}}}, & i = i_{r(p)+1}, \\ 0, & i = i_{r(p)+2}, \ldots, i_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$i_1 \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{i=1,\ldots,m} \frac{\Delta_i}{p_i}, \quad i_2 \stackrel{\text{def}}{=} \arg \max_{i \neq i_1} \frac{\Delta_i}{p_i}, \ldots, \tag{5}$$

$r(p)$ — максимальное целое $r$, удовлетворяющее неравенству $p_{i_1} + \ldots + p_{i_r} \leq p$.

Таким образом, на основании утверждения 1 стоящую перед банком проблему оказывается возможным решать в два этапа: на 1-м этапе Советом директоров принимается решение об общей сумме затрат на инвестирование, а на 2-м автоматически решается задача об оптимальном распределении выделенных средств $p$ по имеющимся проектам для участия в их финансировании. Решение последней задачи утверждение 1 дает в явном виде. А именно, все проекты $a_i \in A$ упорядочиваются по невозрастанию отношения $\Delta_i/p_i$ (нормы прибыли) и включаются по порядку в набор $\alpha$, пока не будет исчерпан выделенный ресурс $p$. (Сходный результат получен в [5, утв. 1].) Вопрос об очередности проектов, имеющих одинаковые характеристики, может быть решен Советом директоров просто по большинству голосов, причем существенно, что его надо решать на 2-м этапе, уже после выбора конкретного $p$, т.е. споры могут возникнуть лишь за проект, являющийся кандидатом на $r(p)$-е место в (5).

Задача 1-го этапа будет рассмотрена далее в разделе 3. Здесь же заметим, что исходно возникшую перед Советом директоров проблему выбора многомерного вектора долей финансирования некоторых проектов удалось свести к вопросу о соглашении относительно скалярной величины совокупных затрат. При этом остается очевидно меньше места для лоббирования конкретных проектов в ущерб интересам банка и есть шанс на достижение разумного компромисса. Подчеркнем, что речь идет о выборе из бесконечного множества альтернатив, когда стандартная процедура принятия коллективного решения большинством голосов не подходит и требуется выработка новых более адекватных процедур.

**3. Игровая модель выбора затрат на инвестирование.** Итак, в предыдущем разделе было показано, что для выбора оптимального набора поддерживаемых проектов банку достаточно принять решение об общей сумме $p$ затрат на инвестирование. Однако члены Совета директоров могут иметь разные мнения относительно этой суммы.

Допустим, что каждый $j$-й директор определил для себя пару чисел $p^j_{min}$ и $p^j_{max}$, задающих диапазон оптимальных (с точки зрения $j$-го директора) затрат банка на инвестирование. Чем бо́льшую сумму по сравнению с $p^j_{max}$ решает потратить Совет директоров, тем менее приемлемой она представляется $j$-му директору. И аналогично, чем меньше окажется $p < p^j_{min}$, тем менее выгодным для банка он считает такое инвестирование. При $p \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$ предположим, что $j$-й директор не может предпочесть одно решение другому. (В случае, если $j$-й член Совета твердо уверен относительно размеров суммы, которую надо инвестировать, то $p^j_{min} = p^j_{max}$.)

Пусть Совет состоит из $N$ директоров. Каждый $j$-й директор вносит в Совет свое предложение, т.е. называет ту сумму, которую он полагает целесообразным для банка потратить на инвестирование. Обозначим через $x_j \in [0, p^+]$ предложение $j$-го директора, $j = 1, 2, \ldots, N$, $p^+$ — бюджетное ограничение банка, $p^+ \leq \sum_{i=1}^{m} p_i$. Результирующая сумма $p$ затрат на инвестирование должна быть определена на основании предложений, внесенных всеми членами Совета, т.е. на основании вектора $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Соответствующую процедуру согласования интересов и мнений называют в теории игр правилом голосования. Далее рассмотрим следующее правило голосования, введенное Муленом [3].

Будем считать, что после того, как члены Совета сформулировали свои пожелания, банком будет реализовано минимальное из высказанных предложений, а именно, будет установлена сумма затрат

$$p = p[x] \stackrel{\text{def}}{=} \min_{j=1,2,\ldots,N} x_j. \tag{6}$$

и принято решение $\alpha^*[p[x]]$ согласно (4),(5). Такое правило голосования относится в [3] к группе стратегически обоснованных.

Целью настоящего раздела является исследование механизма принятия решений, порожденного описанной процедурой, для данной модели. Нас интересует, будет ли полученное решение оптимальным с точки зрения всех членов Совета, будет ли оно устойчивым по отношению к созданию в Совете коалиций и их опережающему выбору стратегий, но в первую очередь, выгодно ли директорам при внесении предложений $x_j$ сообщать свое истинное мнение или окажется, что "блефуя" они сумеют добиться установления $p$, более близкого к своему идеалу.

На основании сделанных предположений можно считать, что у каждого $j$-го директора имеется на отрезке $[0, p^+]$ функция полезности $u_j(p)$, характеризующая для него предпочтительность принятия решения $p$. Причем все функции $u_j(\cdot)$ являются унимодальными, т.е. $u_j(p)$ возрастает на отрезке $[0, p^j_{min}]$, затем на $[p^j_{min}, p^j_{max}]$ постоянна, а для $p > p^j_{max}$ убывает, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Рассмотрим игру $N$ лиц

$$\Gamma = \langle\ \{1, 2, \ldots, N\},\quad \{f_j(x)\}_{j=1}^N,\quad \{X_j = [0, p^+]\}_{j=1}^N\ \rangle,$$

в которой игроки – члены Совета, их стратегии $x_j \in X_j$ – вносимые ими предложения, а функции выигрыша $f_j(x_1, \ldots, x_N) \stackrel{\text{def}}{=} u_j(p[x]) = u_j\Big(\min\limits_{j=1,2,\ldots,N} x_j\Big)$ соответствуют правилу (6). Найдем оптимальные стратегии игроков в такой игре, но сначала уточним понятие оптимальности.

Определение 2 [3]. Стратегия $x_j$ $j$-го игрока *доминирует* его стратегию $y_j$ (обозначение: $x_j \succ_j y_j$), если

$$\forall x_{-j} \in X_{-j} \stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{k \in \{1,\ldots,N\} \setminus \{j\}} X_k : \quad f_j(y_j, x_{-j}) \le f_j(x_j, x_{-j})$$

$$\text{и} \;\; \exists x_{-j} \in X_{-j}: \quad f_j(y_j, x_{-j}) < f_j(x_j, x_{-j}).$$

Стратегии $x_j$ и $y_j$ $j$-го игрока *эквивалентны*, если

$$\forall x_{-j} \in X_{-j} \quad f_j(y_j, x_{-j}) = f_j(x_j, x_{-j}).$$

Очевидно, что при $x_j \succ_j y_j$ для $j$-го директора более выгодно предложить $x_j$, чем $y_j$. Введем множество $D_j$ *доминирующих стратегий* $j$-го игрока [3]:

$$D_j = \{x_j \in X_j | \forall x_{-j} \in X_{-j}, \forall y_j \in X_j \;\; f_j(y_j, x_{-j}) \leq f_j(x_j, x_{-j})\}.$$

Для рассматриваемой модели справедливо

Утверждение 2: $D_j = [p^j_{min}, p^j_{max}] \;\; \forall j = 1, 2, \ldots, N$.

Доказательство основано на следующем результате: $\forall j = 1, 2, \ldots, N \;\; \forall p \notin [p^j_{min}, p^j_{max}], \forall p^0 \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$: $p^0 \succ_j p$, а все стратегии $p^0 \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$ для $j$-го игрока эквивалентны.

Таким образом, множество $D_j$ является множеством оптимальных стратегий $j$-го игрока (директора) в игре Г. Поскольку $D_j$ совпадает с $\operatorname{Arg}\max\limits_{p \in X_j} u_j(p)$, это означает, что директору нет смысла блефовать и скрывать истинный вид своих предпочтений. Исследуем вопрос об оптимальности с точки зрения всего Совета директоров.

Так как Совет объединяет директоров, то задача выбора оптимального $p$ для Совета оказывается многокритериальной с вектором критериев $\Big(u_1(p), \ldots, u_N(p)\Big)$. Решением задачи многокритериальной оптимизации (см. определение 1) является множество $P^*$ паретовских решений $p$, т.е. таких, которым соответствуют максимальные в смысле отношения $\geq$ векторы $\Big(u_1(p), \ldots, u_N(p)\Big)$, $p \in [0, p^+]$. Покажем как можно получить паретовские решения в игре Г.

Обозначим

$$p^- = \max_{j=1,\ldots,N} p^j_{min}, \quad p^* = \min_{j=1,\ldots,N} p^j_{max}, \quad p^0 = \min_{j=1,\ldots,N} p^j_{min}.$$

Утверждение 3. Если функции полезности у директоров таковы, что $p^- < p^*$, то $P^* = [p^-, p^*]$, а если $p^- \geq p^*$, тогда $P^* = \{p^*\}$.

Из утверждения 3, в частности, вытекает, что при $p^0 < p^- < p^*$ ситуация $(p^1_{min}, \ldots, p^N_{min})$ не дает паретовского решения ($p^0 \notin P^*$), но в любом случае $p^* \in P^*$. Так что ситуация $(p^1_{max}, \ldots, p^N_{max})$ заведомо окажется оптимальной для Совета директоров, т.е. каждый директор должен предлагать $x_j = p^j_{max}$ — наибольшее число из максимизирующих его функцию полезности. При этом будет обеспечена и устойчивость по отношению к образованию в Совете коалиций в следующем смысле.

Определение 3 [3]. Ситуация $x^*$ называется сильным равновесием по Нэшу, если не существует коалиции игроков, для которых было бы выгодно отклониться от этой ситуации в случае, если дополнительная коалиция не реагирует на отклонение.

Для рассматриваемой игры $\Gamma$ данное определение предполагает, что $\forall K \subseteq \{1,2,\ldots,N\} \quad \forall x_K \in X_K \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigotimes_{j\in K} X_j$ не выполнено

$$\begin{cases} \forall j \in K \quad u_j(p[(x_K, x^*_{K^c})]) \geq u_j(p[x^*]), & (7) \\ \exists j \in K \quad u_j(p[(x_K, x^*_{K^c})]) > u_j(p[x^*]), & (8) \end{cases}$$

где $K^c = \{1,2,\ldots,N\} \setminus K$.

Утверждение 4. При любых унимодальных функциях полезности ситуация $x^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} (p^1_{max}, \ldots, p^N_{max})$ является сильным равновесием по Нэшу в игре $\Gamma$.

Доказательство. Для случая, когда $K$ состоит из одного игрока, доказательство следует из утверждения 2, а для случая $K = \{1,2,\ldots,N\}$ доказательство с учетом $p[x^*] = p^*$ вытекает из утверждения 3. Рассмотрим общий случай. Пусть существует коалиция $K$ и существует стратегия этой коалиции $x_K \in X_K$ такая, что выполнено (7) и (8).

Обозначим $p = p[(x_K, x^*_{K^c})]$, $p' = \min_{k\in K} x_k$, $p'^* = \min_{k\notin K} p^k_{max}$. Тогда $p = \min(p', p'^*)$ по определению. Из (8) $p \neq p^*$, т.е. либо $p = p' < p'^*$ и $p' \neq p^*$, либо $p = p'^* \leq p'$ и $p^* < p'^*$. Последнее означает, что $\min_{k\in K} p^k_{max} < \min_{k\notin K} p^k_{max}$. При этом $p > p^*$, и для игрока с номером $l \in \operatorname{Arg}\min_{k\in K} p^k_{max}$ получаем $p > p^l_{max} = p^*$, т.е. $u_l(p) < u_l(p^*)$, что противоречит (7).

Таким образом, $p = p' < p'^*$ и $p^* \neq p'$. Если $p^* < p'$, то, как и выше, $u_l(p^*) > u_l(p')$ – противоречие. Значит, $p^* > p'$. Но $p^* \leq p^j_{max}$ по определению $p^*$, и поэтому $p^* < p^j_{min}$ из

(8). Действительно, если бы $p^* \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$, то $j$-й игрок не мог бы увеличить своего выигрыша. Следовательно $u_j(p^*) > u_j(p')$, что противоречит (7). Утверждение доказано.

Отметим, что никакая коалиция $K$ не может обеспечить для своих членов выполнение условий (7), (8) даже путем опережающего выбора стратегий $x_K$, поскольку такой выбор не заставит остальных игроков отказаться от использования своих доминирующих стратегий. Тем самым, ситуация $(p^1_{max}, \ldots, p^N_{max})$ будет сильным равновесием по Нэшу и в любой игре $\Gamma_1$ [6], предполагающей фиксированный порядок ходов игроков. Однако, если рассмотреть для данной игры $\Gamma$ информационное расширение типа $\Gamma_2$ [6], предоставляющее одному игроку право опережающего сообщения своей стратегии как функции предложений других игроков (например, $x_1(x_2, \ldots, x_N)$), то здесь лидирующий игрок конечно сможет провести любое решение $p > 0$, угрожая в случае $x_j \neq p$, предложить 0. В результате делаем вывод, что исследуемое правило голосования (6) является подходящим для Совета из равноправных директоров.

Замечание. Аналогичные свойства удается доказать и для других стратегически обоснованных правил голосования, указанных в [3], в частности, для правила, предполагающего реализацию максимального из предложений, т.е. выбор

$$p = \bar{p}[x] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j=1,2,\ldots,N} x_j. \tag{9}$$

Правило (9) соответствует реализации проекта с максимальной выручкой из всех предложенных директорами решений. При этом для обеспечения оптимальности коллективного выбора директорам следует предлагать $x_j = p^j_{min}$, т.е. минимальные по затратам варианты из тех, которые максимизируют их функции полезности.

## Список литературы


1. *Solovyova S.* A Game Model for Estimating Investment Projects / Тезисы докладов 2-й Московской международной конференции по исследованию операций. Москва: ВЦ РАН, 1998. С. 34.

2. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

3. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

4. *Давыдов Э.Г.* Исследование операций. М.: Высш. школа, 1990.

5. *Васин А.А., Дежин В.Н., Евтихиев Н.Н. и др.* Математические методы оптимального распределения инвестиционного капитала. М.: НИИ ЭИР, 1996.

6. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

**Приложение: доказательство приведенных результатов.**

Утверждение 1: $\arg\operatorname*{Max}_{\alpha\in U}\Bigl(-p(\alpha),\Delta(\alpha)\Bigr) = \bigcup_{p\in[0,\sum_{i=1}^m p_i]} \alpha^*[p]$,

где

$$\alpha_i^*[p] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & i = i_1,\dots,i_{r(p)}, \\ \frac{p-p_{i_1}-\ldots-p_{i_{r(p)}}}{p_{i_{r(p)+1}}}, & i = i_{r(p)+1}, \\ 0, & i = i_{r(p)+2},\dots,i_m, \end{cases}$$

$$i_1 \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{i=1,\dots,m}\frac{\Delta_i}{p_i},\ \ i_2 \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{i\neq i_1}\frac{\Delta_i}{p_i},\dots,\quad r(p) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{p_{i_1}+\ldots+p_{i_r}\le p} r.$$

Введем определение, которое понадобится для доказательства.

Определение 4: $\alpha^1 \succeq \alpha^2$ ($\alpha^1$ доминирует $\alpha^2$), если $\Bigl(-p(\alpha^1),\Delta(\alpha^1)\Bigr) \geq \Bigl(-p(\alpha^2),\Delta(\alpha^2)\Bigr)$ или $\Bigl(-p(\alpha^1),\Delta(\alpha^1)\Bigr) = \Bigl(-p(\alpha^2),\Delta(\alpha^2)\Bigr)$.

Для упрощения обозначений будем считать, что $i_k = k$ $\forall k = 1,2,\dots,m$.

Доказательство утверждения 1.

Необходимо показать выполнение следующих двух свойств:

1) $\forall \alpha',\alpha'' \in A^*$ невозможно $\alpha' \succeq \alpha''$,

2) $\forall \alpha \in U\ \exists \alpha^0 \in A^*\ \ \alpha^0 \succeq \alpha$.

Докажем 1). Сначала убедимся в том, что $\forall \alpha',\alpha'' \in A^*$ $p(\alpha') \neq p(\alpha'')$ при $\alpha' \neq \alpha''$. Пусть

$$\alpha' = (1,\dots,1,\alpha^1_{r_1+1},0,\dots,0),$$

$$\alpha'' = (1,\dots,1,\alpha^2_{r_2+1},0,\dots,0).$$

Возможны три случая: а) $r_1 = r_2$, б) $r_1 > r_2$, в) $r_1 < r_2$.

Для случая а): $p(\alpha') - p(\alpha'') =$

$$= \sum_{i=1}^{r_1} p_i + \alpha^1_{r_1+1} p_{r_1+1} - \sum_{i=1}^{r_1} p_i - \alpha^2_{r_1+1} p_{r_1+1} = (\alpha^1_{r_1+1} - \alpha^2_{r_1+1}) p_{r_1+1} \neq 0,$$

так как $\alpha^1_{r_1+1} \neq \alpha^2_{r_1+1}$ в силу того, что $\alpha' \neq \alpha''$.

Теперь докажем для б). Рассмотрим $p(\alpha') - p(\alpha'') =$

$$= \sum_{i=1}^{r_2} p_i + \sum_{i=r_2+1}^{r_1} p_i + \alpha^1_{r_1+1} p_{r_1+1} - \sum_{i=1}^{r_2} p_i - \alpha^2_{r_2+1} p_{r_2+1} =$$

$$= (1 - \alpha^2_{r_2+1}) p_{r_2+1} + \sum_{i=r_2+2}^{r_1} p_i + \alpha^1_{r_1+1} p_{r_1+1} \neq 0.$$

Таким образом, $p(\alpha') \neq p(\alpha'')$.

Для случая в) доказательство аналогично. Следовательно, $p(\alpha') \neq p(\alpha'')\ \forall \alpha', \alpha'' \in A^*,\ \ \alpha' \neq \alpha''$.

Теперь докажем, что $\forall p' > p''$ верно неравенство $\Delta(\alpha^*[p']) > \Delta(\alpha^*[p''])$, откуда и будет следовать невозможность $\alpha^*[p''] \succeq \alpha^*[p']$. Пусть сначала $r(p') = r(p'')$. Рассмотрим

$$\alpha^1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^*[p'] = (1, 1, \ldots, 1, \alpha^1_{r(p')+1}, 0, \ldots, 0),$$

$$\alpha^2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^*[p''] = (1, 1, \ldots, 1, \alpha^2_{r(p'')+1}, 0, \ldots, 0).$$

В силу неравенства $p' > p''$ справедливо следующее соотношение:

$$\alpha^1_{r(p')+1} = \frac{p' - \sum_{i=1}^{r(p')} p_i}{p_{r(p')+1}} > a^2_{r(p')+1} = \frac{p'' - \sum_{i=1}^{r(p')} p_i}{p_{r(p')+1}},$$

а тогда $\Delta(\alpha^*[p']) > \Delta(\alpha^*[p''])$, ибо все остальные компоненты у векторов $\alpha^1$ и $\alpha^2$ совпадают.

Если $r(p') \neq r(p'')$, то по построению $r(p') > r(p'')$. Очевидна следующая цепочка:

$$\Delta(\alpha^*[p']) = \sum_{i=1}^{m} \Delta_i \alpha_i^*[p'] = \sum_{i=1}^{r(p'')} \Delta_i + \Delta_{r(p'')+1} + \sum_{i=r(p'')+2}^{r(p')} \Delta_i +$$

$$+\Delta_{r(p')+1}\alpha^1_{r(p')+1} + > \sum_{i=1}^{r(p'')} \Delta_i + \Delta_{r(p'')+1}\alpha^2_{r(p'')+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Delta_i \alpha_i^*[p''] = \Delta(\alpha^*[p'']),$$

тем самым, 1) доказано.

Докажем 2). Рассмотрим произвольный вектор $\alpha \in U$ и $\alpha^0 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^*[p(\alpha)]$, тогда $p(\alpha^0) = p(\alpha)$. Надо доказать, что $\Delta(\alpha^0) \geq \Delta(\alpha)$. Возможны три ситуации.

a) Пусть $r(p(\alpha)) = m$, т.е. денег $p(\alpha)$ хватает ровно на все проекты. В этом случае

$$\alpha^0 = (1, \ldots, 1) \text{ и } \Delta(\alpha^0) \geq \Delta(\alpha^1)\ \forall \alpha \in U.$$

b) Пусть $r(p(\alpha)) = 1$, т.е. денег $p$ не хватило целиком ни на один проект, $\alpha^0 = (\alpha^0_1, 0, \ldots, 0)$. Произвольный вектор $\alpha \in U$ имеет вид $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_i \in [0,1]$, при этом $p(\alpha) = p(\alpha^0)$, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i p_i = \alpha^0_1 p_1$, что эквивалентно равенству

$\alpha_1^0 - \alpha_1 = \sum\limits_{i=2}^{m} \alpha_i \dfrac{p_i}{p_1}$. Таким образом,

$$\Delta(\alpha^0) - \Delta(\alpha) = \Delta_1 p_1^0 - \sum_{i=1}^{m} \Delta_i \alpha_i = \Delta_1(\alpha_1^0 - \alpha_1) - \sum_{i=2}^{m} \Delta_i \alpha_i =$$

$$= \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{p_i}{p_1} \Delta_1 - \sum_{i=2}^{m} \Delta_i \alpha_i = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \Big( \frac{p_i}{p_1} \Delta_1 - \Delta_i \Big) \geq 0,$$

так как

$\dfrac{\Delta_1}{p_1} \geq \dfrac{\Delta_i}{p_i}$ $\forall i = 2, \ldots, m,$ а значит $\dfrac{p_i}{p_1} \Delta_1 - \Delta_i \geq 0$ $\forall i = 2, \ldots, m.$

В результате получаем неравенство $\Delta(\alpha^0) \geq \Delta(\alpha)$, то есть, $\alpha^0 \succeq \alpha$ в силу того, что $p(\alpha) = p(\alpha^0)$.

c) Пусть $r(p) \neq 1, m$, переобозначим $r \stackrel{\text{def}}{=} r(p)$, тогда

$$\alpha^0 = (1, \ldots, 1, \alpha_{r+1}^0, 0, \ldots, 0),$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m).$$

Так как $p(\alpha^0) = p(\alpha)$, то

$$\sum_{i=1}^{r} p_i + \alpha_{r+1}^0 p_{r+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i,$$

что равносильно равенству

$$\sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha_i) p_i + p_{r+1}(\alpha_{r+1}^0 - \alpha_{r+1}) - \sum_{i=r+2}^{m} \alpha_i p_i = 0.$$

Перепишем в эквивалентной форме

$$\alpha_{r+1}^0 - \alpha_{r+1} = -\sum_{i=1}^{r} (1 - \alpha_i) \frac{p_i}{p_{r+1}} + \sum_{i=r+2}^{m} \alpha_i \frac{p_i}{p_{r+1}}.$$

Тогда

$$\Delta(\alpha^0)-\Delta(\alpha)=\sum_{i=1}^{r}(1-\alpha_i)\Delta_i+(\alpha^0_{r+1}-\alpha_{r+1})\Delta_{r+1}-\sum_{i=r+2}^{m}\alpha_i\Delta_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(1-\alpha_i)\Delta_i-\sum_{i=r+2}^{m}\alpha_i\Delta_i-\sum_{i=1}^{r}(1-\alpha_i)\frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}+\sum_{i=r+2}^{m}\alpha_i\frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{r}(1-\alpha_i)\Big(\Delta_i-\frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}\Big)+\sum_{i=r+2}^{m}\alpha_i\Big(\frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}-\Delta_i\Big)\geq 0.$$

Последнее неравенство выполнено в силу следующих двух условий:

$$\forall i=1,\ldots,r:\quad 1-\alpha_i\geq 0,\ \text{а}\ \ \Delta_i-\frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}\geq 0,$$

так как $\frac{\Delta_i}{p_i}\geq\frac{\Delta_{r+1}}{p_{r+1}}\ \ \forall i=1,\ldots,r$, и

$$\forall i=r+2,\ldots,m:\ \alpha_i\geq 0,\ \text{а}\ \ \frac{p_i}{p_{r+1}}\Delta_{r+1}-\Delta_i\geq 0,$$

так как $\frac{\Delta_{r+1}}{p_{r+1}}\geq\frac{\Delta_i}{p_i}\ \forall i=r+2,\ldots,m$.

В результате получаем соотношение $\Delta(\alpha^0)\geq\Delta(\alpha)$, из которого следует, что $\alpha^0\succeq\alpha$. Утверждение доказано.

Определение 5. Веткой неубывания (строгого убывания) унимодальной функции будем называть максимальный отрезок из области определения, на котором функция не убывает (убывает).

Утверждение 2: $\forall j=1,2,\ldots,N\ \ \forall p<p^j_{min}$ и $\forall p>p^j_{max}$: $p^0\succ_j p\ \forall p^0\in[p^j_{min},p^j_{max}]$, а все стратегии $p^0\in[p^j_{min},p^j_{max}]$ для $j$-го игрока эквивалентны.

Доказательство утверждения 2.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_N)$ – сложившаяся в результате голосования ситуация, $p[x] = \min\limits_{1 \le j \le N} x_j$ – результат (исход голосования, выбранный проект). Введем $x_0 = \min\limits_{k \ne j} x_k$. Тогда $p[x] = \min(x_0, x_j)$. Рассмотрим сначала стратегии $p > p^j_{max}$ и докажем, что $p^j_{max} \succ_j p$.

По определению $p^j_{max}$ точки $p$ и $p^j_{max}$ лежат на ветке монотонного убывания функции $u_j(\cdot)$. Пусть

$$p[(x||x_j = p^j_{max})] = \min(x_0, p^j_{max}) = v_1,$$

$$p[(x||x_j = p)] = \min(x_0, p) = v_2.$$

Так как выполнено соотношение $p > p^j_{max}$, то $v_1 \le v_2$, и с учетом убывания функции $u_j(\cdot)$ следует $u_j(v_1) \ge u_j(v_2)$.

Для применения определения 1 покажем, что существует $x_{-j}$, при котором $v_1 < v_2$, т.е. $u_j(v_1) > u_j(v_2)$. Если $x_0 \le p^j_{max}$, то $x_0 < p$ и $v_1 = x_0 = v_2$ – не подходит. Значит, надо, чтобы $p^j_{max} < x_0$ ($x_0$ лежал на той же ветке). Тогда $v_1 = p^j_{max}$ и выполняются следующие неравенства:

$$u_j(v_1) = u_j(p^j_{max}) > u_j(x_0) \text{ и } \ u_j(p^j_{max}) > \max(u_j(x_0), u_j(p)),$$

т.е. $u_j(p^j_{max}) > u_j(v_2)$. Таким образом, случай $x_0 > p^j_{max}$ дает нам требуемый $x_{-j}$ (например $x_k = p^j_{max} + \varepsilon = x_0 \ \ \forall k \ne j$), а такой случай возможен в силу $p > p^j_{max}$ (ибо это значит, что $p^j_{max} \neq \sum_{i=1}^m p_i$, т.е. у функции $u_j(\cdot)$ есть ветка строгого убывания, и можно взять $p \in \left(p^j_{max}, \sum_{i=1}^m p_i\right])$.

Пусть теперь $p^j_{min} > p$. Следовательно $p^j_{min}$ и $p$ лежат на ветке монотонного возрастания. Обозначим

$$p[(x||x_j = p^j_{min})] = \min(p^j_{min}, x_0) = w_1,$$

$$p[(x||x_j = p)] = \min(p, x_0) = w_2.$$

Имеем $w_1 \geq w_2$. Покажем, что существует $x_{-j}$, при котором $w_1 > w_2$. Если $x_0 \leq p$, то $u_j(x_0) < u_j(p^j_{min})$, то есть, $x_0 = w_1 = w_2$ – не подходит. Значит, остается обеспечить $x_0 > p$, а тогда $x_0$ лежит на той же ветке, и $u_j(w_2) < u_j(w_1)$. Последнее и дает $p^j_{min} \succ_j p$. Для обеспечения $x_0 > p$ достаточно положить $x_k = x_0 = p^j_{min} - \varepsilon \ \forall k \neq j$ (такой $x_0$ существует при подходящем $\varepsilon > 0$ в силу того, что $p < p^j_{min}$).

Докажем, что все стратегии $p^0 \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$ для $j$-го участника голосования эквивалентны. Пусть $p', p'' \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$, $p' \neq p''$. Обозначим

$$p[(x||x_j = p')] = \min(x_0, p') = s_1,$$

$$p[(x||x_j = p'')] = \min(x_0, p'') = s_2.$$

Без ограничения общности будем считать, что $p' < p''$. Тогда верно соотношение $s_1 \leq s_2$. Если $s_1 = s_2 = x_0$, то $u_j(p') = u_j(p'')$, т.е. находимся в условиях определения 1. А значит, $p'$ и $p''$ эквивалентны для $j$-го директора.

Рассмотрим случай, когда $s_1 < s_2$. Если при этом верно соотношение $x_0 \leq p'$, то выполнена цепочка равенств $s_1 = s_2 = x_0$ – противоречие. Таким образом, выполняется противоположное неравенство $x_0 > p'$, откуда следует соотношение $s_1 = p'$. В результате получаем требуемое равенство $u_j(s_1) = u_j(s_2)$, которое выполнено в силу того, что $s_2 = p''$ либо $s_2 = x_0$. Если $s_2 = p''$, то равенство $u_j(s_1) = u_j(s_2)$ верно, поскольку $p', p'' \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$, а если $s_2 = x_0$, то имеем $p_1 < x_0 < p_2$, а значит $u_j(p') = u_j(x_0)$.

Так как было доказано, что $\forall p < p^j_{min} \;\; p^j_{min} \succ_j p$, $\forall p > p^j_{max} \;\; p^j_{max} \succ_j p$, а все стратегии $p^0 \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$ для $j$-го участника голосования эквивалентны, то можно сделать следующий вывод: $p^0 \succ_j p \;\; \forall p^0 \in [p^j_{min}, p^j_{max}]$, т.е. утверждение 2 полностью доказано.

Утверждение 3. Если функции полезности у директоров таковы, что $p^- < p^*$, то $[p^-, p^*] = P^*$, а если $p^- \geq p^*$, то $\{p^*\} = P^*$.

Доказательство. Пусть $p^- = \max\limits_{j=1,\ldots,N} p^j_{min} < \min\limits_{j=1,\ldots,N} p^j_{max} = p^*$, надо доказать:

1) любое решение $p \notin [p^-, p^*]$ доминируется по Парето некоторым решением из $[p^-, p^*]$,

2)$\forall p \in [p^-, p^*]$ не существует такого $p' \in [p^-, p^*]$, что $p'$ доминирует по Парето $p$.

Докажем 1). Возможны два случая: $p < p^-$, $p > p^*$. Докажем для первого случая, т.е. пусть $p < p^-$. Обозначим $\operatorname{Arg}\max p^j = J_1 = \{j_1 | p^- = \max\limits_{j=1,\dots,N} p^j_{min} = p^{j_1}_{min}\}$. Так как $p < p^-$, то $\forall j_1 \in J_1$ точка $p$ лежит на ветке строгого возрастания унимодальной функции $u_j(\cdot)$, и, следовательно, выполняется $u_{j_1}(p) < u_{j_1}(p^-)$. Далее рассмотрим $\forall j \notin J_1$. Для некоторых номеров $j$ выполняется равенство $u_j(p^-) = u_j(p)$, а для остальных – строгое неравенство $u_j(p^-) < u_j(p)$, поскольку $p < p^- < p^*$, т.е. $p < p^j_{max}$ $\forall j$. Таким образом $(u_1(p), \dots, u_N(p)) \leq (u_1(p^-), \dots, u_N(p^-))$ (в смысле отношения $\leq$ но $\neq$, среди векторов), и значит, исход $p^-$ доминирует по Парето исход $p$. Пусть теперь $p > p^*$. Рассмотрим $J_2 = \{j_2 | p^* = \min\limits_{j=1,\dots,N} p^j_{max} = p^{j_2}_{max}\}$. Так как $p > p^*$, то $\forall j \in J_2$ выполняется соотношение $u_{j_2}(p^*) > u_{j_2}(p)$, а для остальных номеров $j \notin J_2$ либо также выполнено строгое неравенство $u_j(p^*) > u_j(p)$, так как $p > p^* > p^-$, т.е. $p > p^j_{min}$ $\forall j$, либо выполнено равенство $u_j(p^*) = u_j(p)$. Тем самым, как и в предыдущем случае, $(u_1(p), \dots, u_N(p)) \leq (u_1(p^*), \dots, u_N(p^*))$, т.е. исход $p^*$ доминирует по Парето исход $p$.

Теперь докажем 2). Рассмотрим $p \in [p^-, p^*]$. Пусть существует исход $p'$ такой, что $p'$ доминирует по Парето $p$. Это эквивалентно векторному соотношению $(u_1(p'), \dots, u_N(p')) \geq (u_1(p), \dots, u_N(p))$, где $\geq$ понимается в смысле покомпонентного $\geq$, но не совпадения. Тогда существует хоть один номер $j \in \{1,\dots,N\}$, такой, что $u_j(p') > u_j(p)$, но это противоречит тому, что $p \in [p^-, p^*]$, так как $[p^-, p^*] \subseteq \operatorname{Arg}\max\limits_{p \in X_j} u_j(p)$. Таким образом, $\forall p \in [p^-, p^*]$ не существует такого $p' \in [p^-, p^*]$, что исход $p'$ доминирует по Парето исход $p$.

Пусть не выполнено $p^- \max\limits_{j=1,\dots,N} p^j_{min} < \min\limits_{j=1,\dots,N} p^j_{max} = p^*$. Надо доказать, что $\not\exists p \in [0, \sum_{i=1}^m p_i] : \ u(p) \geq u(p^*)$, т.е. для любого такого $p$ либо $u(p) = u(p^*)$, либо $\exists j : \ u_j(p) < u_j(p^*)$. Пусть $p \leq p^*$, тогда $u_j(p) \leq u_j(p^*)$, поскольку $p$ и $p^*$ лежат на ветке неубывания каждой унимодальной функции $u_j(\cdot)$. Пусть $p > p^*$. Тогда для $j = j_2 \in J_2$ точка $p$ лежит на ветке строгого убывания унимодальной функции $u_{j_2}(p)$, поэтому $u_{j_2}(p^*) > u_{j_2}(p)$. Таким образом $\not\exists p : \ u(p) \geq u(p^*)$. Утверждение 3 доказано.