РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М. А. ГОРЕЛОВ

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2011

УДК 519.8, 517.2

Ответственный редактор
кандидат физ.-матем. наук Л.Г. Гурин

В классической теории оптимизации на решаемую задачу накладываются ограничения геометрического характера, типа дифференцируемости или выпуклости. На практике задачи чаще всего задаются аналитически (явной формулой, дифференциальным уравнением и т.п.). В данной работе рассматриваются симметрические задачи. Предлагается метод их решения, использующий способ их аналитического задания. Если этот способ не слишком сложен, решение задачи может быть доведено до конца. Если разложить данный многочлен по элементарным симметрическим функциям, то степень получающегося при этом многочлена можно использовать в качестве меры сложности решаемой задачи. Предлагаемый метод имеет характер алгоритма. Этот алгоритм легко реализуется на любом из пакетов символьных вычислений. Возможности метода демонстрируются на большом числе примеров.

Ключевые слова: оптимизация, неравенства, малочлены, симметрические многочлены.

Рецензенты: И.А. Копылов,
А.Ф. Кононенко

Научное издание

1. Введение

Данная брошюра продолжает цикл работ [1,2] с тем же общим названием. Смысл этого названия заключается в следующем. На практике большинство задач оптимизации задается неким конструктивным способом: явной формулой, дифференциальным уравнением и т. п. Предлагается при решении соответствующей задачи использовать этот способ задания. Если задача задается «просто», то ее удается решить.

Сложность задачи – это некий комплексный показатель, который не удается охарактеризовать одним числом. В зависимости от способа «измерения» сложности простыми могут считаться разные задачи. В работах [1,2] в качестве меры сложности рассматривалось число перемен знаков некоторого вспомогательного многочлена или квазимногочлена. В качестве теоретической базы при решении соответствующих задач использовалось правило знаков Декарта. Ниже используется иной способ определения сложности.

А именно рассматриваются задачи, которые *могут быть* записаны с помощью многочленов, не меняющихся при любых перестановках переменных. В качестве меры сложности такой задачи используется степень такого многочлена. Соответственно для решения задач используется другая идея.

Разумеется, одна и та же задача может быть записана многими эквивалентными способами. Нас будет интересовать самый простой способ, к которому можно привести задачу, например, с помощью алгебраических преобразований. Подчеркнем, что речь идет о задачах, которые *могут быть* записаны в нужной форме. Из дальнейшего будет видно, что без явного выполнения соответствующих преобразований во многих случаях можно обойтись.

Отметим, что требование симметричности рассматриваемых задач тоже может быть интерпретировано в терминах сложности.

Это становится особенно ясно, если характеризовать сложность числом параметров, необходимых для того, чтобы выделить одну задачу в данном классе, как это часто принято. Например, для того чтобы задать однородный многочлен третьей степени от трех переменных, не меняющийся при *всех* перестановках переменных, нужно задать три числа: такой многочлен всегда может быть записан в виде

$$F(x,y,z)=\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(xy^2+x^2y+xz^2+x^2z+yz^2+y^2z)+\gamma xyz,$$

поэтому для его задания достаточно трех параметров α, β и γ. Если же мы будем рассматривать многочлены, не меняющиеся только при циклической замене переменных x на y, y на z и z на x, то понадобится четыре параметра, так как такой многочлен в общем случае задается формулой

$$G(x,y,z)=\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(xy^2+yz^2+zx^2)+\delta(x^2y+y^2z+z^2x)+\gamma xyz.$$

В основе предлагаемого ниже метода решения задач оптимизации лежит идея приближения к оптимуму с помощью подходящего преобразования переменных. Это преобразование задается с помощью некой геометрической конструкции: параллельного переноса графика вспомогательного многочлена вдоль оси ординат. В данной работе в качестве примеров рассматриваются только задачи с тремя переменными. В этом случае соответствующее преобразование в принципе может быть задано алгебраически в параметрической форме. Однако способ такого задания довольно сложен и совершенно не очевиден. Поэтому его использование представляется неудобным. В более сложных случаях геометрический язык является, вероятно, единственным возможным.

Под «методом» в данной статье понимается несколько большее, чем это принято обычно. Например, весьма популярными методами решения аналогичных задач являются «метод замены переменных» и «метод применения замечательных неравенств» (см., например, [3,4]). При этом для поиска, например, подходящей замены переменных зачастую требуется недюжинная изобретательность. Ниже под методом понимается некая стандартная последовательность действий, которая *заведомо* приводит к успеху для достаточно широкого класса задач.

Конечно, роль изобретательности в математическом творчестве трудно переоценить. Но она дает тем больший эффект, чем шире технический арсенал, на который она опирается. Поэтому в дальнейшем под методом понимается, скорее, алгоритм решения задач.

Любой метод, в том числе и предлагаемый ниже, имеет ограниченную область применимости. В данном случае эта область оказывается неожиданно широкой, причем неожиданно не только для автора. Анализ литературы (см., например, [5–8]) показывает, что отдельного обсуждения заслуживают методы и с гораздо более узкой областью применения.

В данном случае особенно важно, что эту область можно достаточно четко оценить: предлагаемые конструкции заведомо приведут к успеху, если в задаче фигурируют симметрические многочлены, степень которых меньше шести. «Внешнюю» оценку области применимости описать двумя словами сложнее, хотя из дальнейшего она тоже понятна.

Заметим, что области применимости двух методов – предложенного в [1,2] и предлагаемого ниже – перекрываются, но ни одна из них не покрывает другую.

В связи с пониманием метода как алгоритма, естественно встает вопрос об использовании компьютеров. Методы, предлагавшиеся в [2], а особенно в [1], предполагают минимум вычислений, которые чаще всего могут быть выполнены «в уме». Реализация идей, предлагаемых ниже, требует неких вычислений. И здесь компьютер вполне уместен, и он действительно активно использовался при написании работы.

Применение компьютеров при решении задач оптимизации – далеко не новость. Сама теория оптимизации выделилась в самостоятельную область анализа только после появления вычислительной техники. Но обычно компьютер используется как большой арифмометр, например, для выполнения большого числа итераций. Наши алгоритмы принципиально конечные, а не итерационные. А компьютер используется для выполнения алгебраических преобразований, преимущественно в «буквенной» форме.

На основе идей, предлагаемых в данной работе, совсем не сложно получить необходимые условия оптимальности. Но в простых задачах их использование не очень удобно, поскольку тогда пришлось бы заботиться о существовании решения. Гораздо удобнее напрямую сравнивать значения оптимизируемой функции. В более сложных задачах использование необходимых условий становится более предпочтительным, однако ограниченный объем работы не позволил добраться до таких задач.

При оценке возможностей любого метода естественно встает вопрос о тестовых задачах. Большое число подходящих задач содержится в книгах по теории неравенств (см., например, [3–8]). Понятно, что для доказательства, например, неравенства $F(x,y,z)\geq 0$ достаточно найти минимум функции $F(x,y,z)$. Если это неравенство точное, то поиск минимума является и необходимым. Поэтому большинство тестовых примеров ниже формулируется именно в форме задач на доказательство неравенств.

Большинство этих примеров заимствованные, но установить первоисточники не представляется возможным. Ссылки указаны для тех задач, которые предлагались на различных олимпиадах, поскольку соответствующие источники наиболее доступны, а «олимпиадные» решения естественно считать наиболее элементарными и красивыми. Читатель получает возможность сравнить их с приводимыми ниже. Ссылки даются после номера задачи в фигурных скобках, где указывается название олимпиады и год ее проведения. При этом используются сокращения, приведенные в приложении.

2. Основная идея

Начнем с самой простой задачи, а именно докажем неравенство Коши[1] для двух неотрицательных чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.$$

Для этого рассмотрим квадратный трехчлен $f(t)=(t-a)(t-b)$. Его график – хорошо знакомая парабола «рогами вверх». Среднее арифметическое, стоящее в левой части нашего неравенства – это абсцисса вершины этой параболы, а квадрат среднего геометрического, стоящего в правой части неравенства, равен ординате точки пересечения параболы с осью ординат.

[1] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – крупнейший французский математик.

Рассмотрим еще многочлен $g(t)=f(t)+\delta$, где δ – некоторое положительное число (см. рис. 1). График многочлена $g(t)$ получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом на расстояние δ вверх. Если число δ не очень велико, то многочлен $g(t)$ тоже имеет два корня c и d, и для этих чисел мы можем написать аналогичное неравенство

$$\frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}\ .$$

Какое из этих двух неравенств сильнее? Очевидно, второе, так как левые части у этих неравенств равны[2], а правая часть у второго неравенства больше, поскольку новый график пересекает ось ординат выше старого. Легко сообразить, что чем больше δ, тем более сильное неравенство мы будем получать.

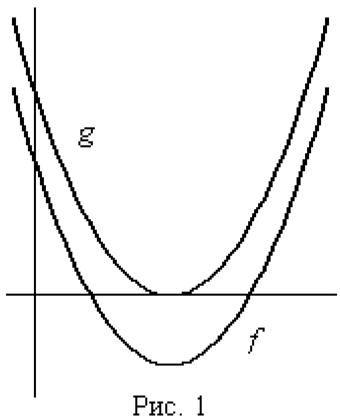

Рис. 1

Зададимся теперь вопросом, а при каких δ наши рассуждения справедливы. Очевидно, они проходят, пока получающийся многочлен имеет два корня. Значит, самое сильное неравенство мы получим при $\delta = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. Его нам *достаточно* доказать. Но при таком δ неравенство очевидно. В самом деле, в этом случае парабола касается оси абсцисс, корни нашего квадратного трехчлена совпадают, а среднее арифметическое и среднее геометрическое двух равных чисел равны между собой. Задача решена.

Конечно, у этой задачи есть другие, наверное, более естественные решения. И все сказанное выше не имело бы смысла, если бы аналогичные соображения не проходили и в других, более сложных случаях.

---

[2] График-то мы сдвигали вверх, значит, абсцисса вершины не изменилась

Упражнения

1. (Бельгийская олимпиада, 1979) Расставить числа $x=(a+b)(c+d)$, $y=(a+c)(b+d)$, $z=(a+d)(b+c)$ в порядке возрастания, если известно, что $a<b<c<d$.

2. (Олимпиада Нью-Йорка.1975) Докажите, что для среднего арифметического $A=(a+b)/2$ и среднего геометрического $B=\sqrt{ab}$ двух положительных чисел $a\neq b$ справедливы оценки

$$B<\frac{(a-b)^2}{8(A-B)}<A.$$

3. {P.1993} Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$.

4. {S.1999} Для действительных чисел $x,y\in[1,2]$ докажите неравенство $3(x+y)\geq 2xy+4$.

5. (Олимпиада Мехмата МГУ, 1999) Для двух положительных чисел a и b рассмотрим следующие средние: $H=\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}=\dfrac{2ab}{a+b}$ (среднее гармоническое), $G=\sqrt{ab}$ (среднее геометрическое), $A=\dfrac{a+b}{2}$ (среднее арифметическое), $Q=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратическое). Известны «неравенства о средних» $H\leq G\leq A\leq Q$. А что больше HQ или AG?

6. {C.2001} Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенству $\dfrac{a+b}{c+d}<2$. Докажите неравенство $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}<8$.

7. {У.1996} Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство $\dfrac{a}{b+2a}+\dfrac{b}{a+2b}\leq\dfrac{2}{3}$.

8. {Л.2004} Докажите, что если $2\leq x\leq 3$, $2\leq y\leq 3$, то

$$(3-x)^2+(3-y)^2+(x-y)^2\leq 2.$$

9. {P.1996} Докажите, что если 0<a,b<1, то $\dfrac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2}<\dfrac{1}{4}$.

10. {h.374} Пусть a, b и c – положительные числа, $a>c$ и $b>c$. Докажите неравенство $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$.

11. {S.1999} Докажите, что для любых положительных действительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{9}{4ab}.$$

12. {У.1993} Какое наименьшее значение может принимать выражение $x^3+y^3+\dfrac{1}{x^2+y^2}$, если x и y – действительные числа, удовлетворяющие условию $x+y=1$.

13. {h.483} а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/20.

б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

3. Ключевой пример

Рассмотрим задачу, предлагавшуюся в 1995 г. на олимпиаде 239-й школы Санкт-Петербурга.

Задача 1. Сумма чисел x, y и z равна 0. Докажите, что

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+3\ge 6xyz.$$

Решение. Проделаем несколько трюков.

Трюк первый. Преобразуем неравенство. Имеем

$$(xy+yz+zx)^2= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2=$$
$$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z).$$

Поэтому с учетом равенства нулю суммы $x+y+z$ наше неравенство перепишется в виде

$$(xy+yz+zx)^2+3\ge 6xyz.$$

Рассмотрим многочлен

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz.$$

Его график приведен на рисунке 2. Очевидно, в некоторой точке a, лежащей между меньшим и средним своим корнем, этот многочлен достигает локального максимума.

А сейчас второй трюк. Рассмотрим еще многочлен

$g(t)=(t-a)(t-a)(t+2a)=t^3-(a+a-2a)t^2+(aa-2aa-2aa)t-aa(-2a)$.

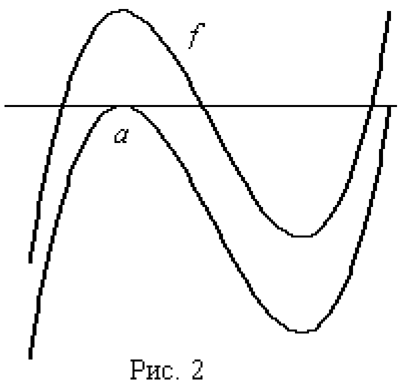

Рис. 2

Сравним коэффициенты многочленов $f(t)$ и $g(t)$. Коэффициенты при t^2 у них равны нулю. А коэффициенты при t у них равны, поскольку производные этих многочленов при $t=a$ обращаются в нуль[3]. Значит график многочлена $g(t)$ получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом в вертикальном направлении. Но в точке a значение одного из них равно нулю, а другого – положительно. Значит, этот перенос осуществляется вниз. Стало быть, $g(0)\le f(0)$, или $aa(-2a)\ge xyz$.

Запишем интересующее нас неравенство для чисел a,a и $-2a$:

$$(aa-2aa-2aa)^2+3\ge-12a^3.$$

Сказанное выше позволяет заключить, что новое неравенство сильнее исходного[4], поэтому нам достаточно доказать, что

$$9a^4+12a^3+3\ge0.$$

Теперь третий трюк. $9a^4+12a^3+3=(9a^2-6a+3)(a^2+2a+1)$ и проверка неравенства уже не составляет труда. Задача решена.

Упражнения

14. {C} Если $(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$, то $(x+y)(y+z)(x+z)=0$. Докажите это.

---

[3] У многочлена $f(t)$ в этой точке максимум, а у многочлена $g(t)$ – кратный корень.

[4] Левые части у них равны, а правая больше у второго.

15. {Л.1988} Числа x,y,z удовлетворяют условиям $xyz=1$, $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Докажите, что одно из них равно 1.

4. Теорема о симметрических многочленах

Непосвященному может показаться, что это решение задачи 1 основано на цепи случайных совпадений. Чтобы показать, что это не так, раскроем секрет фокуса.

Первый раз нам повезло в том, что сумму $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ удалось выразить через коэффициенты многочлена $f(t)$. Этот трюк основан на весьма важной теореме, значение которой выходит далеко за границы рассматриваемого нами круга вопросов. Поэтому сформулируем и докажем ее в общем виде.

Будем рассматривать многочлены от n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Они по-разному ведут себя при перестановках переменных. Например, многочлен $x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$ превратится в многочлен $x_2^2x_1+x_1^2x_3+x_3^2x_2$, если мы поменяем местами переменные x_1 и x_2, а многочлен $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2$ при той же перестановке переменных переходит в многочлен $x_2^2x_1^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$, то есть сам в себя. Многочлены, которые не меняются при *любых* перестановках переменных, называются симметрическими.

Важный пример симметрических многочленов представляют многочлены

$$p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n,$$
$$p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,$$
$$p_3(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2\,x_3+x_1x_2\,x_4\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$\ldots$$
$$p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2\ldots x_n.$$

(во второй строчке стоит сумма всевозможных попарных произведений, в третьей – сумма всех произведений по три и так далее). Эти многочлены называются элементарными симметрическими. Нетрудно видеть, что они, с точностью до знаков, равны коэффициентам при степенях t в стандартной записи многочлена

$$f(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n).$$

Справедлива

Теорема 1. Для всякого симметрического многочлена $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ существует такой многочлен от n переменных Ф, что при всех значениях $x_1,x_2,\dots,x_n$ выполняется равенство

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\Phi(p_1(x_1,x_2,\dots,x_n),p_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,p_n(x_1,x_2,\dots,x_n)).$$

Доказательство. Фиксируем некоторое число q и докажем теорему для всех многочленов, степень которых меньше q. Поскольку число q может быть выбрано произвольно, тем самым теорема будет доказана для всех многочленов.

Весом одночлена $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ будем называть сумму $m_1q^{n-1}+m_2q^{n-2}+\dots+m_{n-1}q+m_n$. Весом многочлена будем называть максимальный из весов входящих в него одночленов.

Упражнения

16. Докажите, что многочлен степени, меньшей q, не содержит членов равного веса.

17. Докажите, что вес произведения двух многочленов равен сумме весов сомножителей, а «самый тяжелый» член произведения равен произведению «самых тяжелых» членов сомножителей.

Воспользуемся индукцией по весу многочлена. Многочлен веса 0 – это просто константа, и для него утверждение теоремы очевидно.

Предположим, теорема уже доказана для всех многочленов, вес которых меньше w. Пусть симметрический многочлен $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ имеет вес w, и $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ – входящий в него одночлен максимального веса.

Упражнение

18. Докажите, что $m_1\geq m_2\geq\dots\geq m_n$.

Рассмотрим многочлен

$$\Psi(x_1,x_2,\dots,x_n)=A(p_1(x_1,x_2,\dots,x_n))^{m_1-m_2}(p_2(x_1,x_2,\dots,x_n))^{m_2-m_3}\dots$$
$$\dots(p_{n-1}(x_1,x_2,\dots,x_n))^{m_{n-1}-m_n}(p_n(x_1,x_2,\dots,x_n))^{m_n}.$$

Упражнение

19. Докажите, что одночлен $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ входит в многочлен Ψ, а веса всех остальных одночленов, входящих в него, меньше w.

Тогда разность $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет вес меньший w, и к ней можно применить предположение индукции. Для завершения доказательства остается воспользоваться равенством

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(F(x_1,x_2,\ldots,x_n)-\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)).$$

Теорема доказана.

Многочлен Φ из теоремы 1 определяется многочленом F однозначно. В данном случае можно сказать, что к сожалению, поскольку если бы существовало несколько таких многочленов, мы могли бы выбрать тот из них, который нас больше устраивает. В дальнейшем единственность разложения симметрического многочлена через элементарные симметрические нигде не используется, но для полноты все же докажем этот факт.

Допустим, что существуют два различных многочлена Φ_1 и Φ_2 такие, что

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi_1(p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

и

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi_2(p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)).$$

Тогда их разность Φ обладает следующим свойством: многочлен $\Phi(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ не нулевой, а многочлен

$$\Phi_1(p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

тождественно обращается в ноль. Покажем, что этого быть не может. Допустим противное.

Пусть такой многочлен Φ нашелся, и его степень равна k. Фиксируем число $q>nk$. Выберем в многочлене $\Phi(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ одночлен $Ap_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}$, для которого сумма

$$s=(m_1+m_2+\ldots+m_n)q^{n-1}+(m_2+m_3+\ldots+m_n)q^{n-1}+\ldots+m_n$$

максимальна.

Упражнения

20. Докажите, что такой одночлен единственный.

21. Докажите, что если в одночлен $Ap_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}$ подставить выражения для $p_1,p_2,\ldots p_n$ через $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и раскрыть скобки, то одночленом максимального веса в получившемся многочлене будет $Ax_1^{m_1+m_2+\ldots+m_n}x_2^{m_2+m_3+\ldots+m_n}\ldots x_n^{m_n}$ и только он.

22. Докажите, что одночлен $Ax_1^{m_1+m_2+\ldots+m_n}x_2^{m_2+m_3+\ldots+m_n}\ldots x_n^{m_n}$ будет единственным одночленом максимального веса в многочлене, получающемся при подстановке в многочлен Ф выражений для $p_1,p_2,\ldots p_n$ через $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Из результата последнего упражнения следует, что если мы выразим в многочлене $\Phi(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ переменные $p_1,p_2,\ldots p_n$ через $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то в получившемся многочлене будет всего один одночлен максимального веса и ему не с чем будет сократиться. Получено противоречие, которое и доказывает единственность выражения $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ через $p_1,p_2,\ldots p_n$.

Автору не удалось выяснить, когда впервые появилась теорема 1. Приведенные выше рассуждения с небольшими изменениями воспроизводят доказательство Гаусса[5]. Ввиду важности этой теоремы в следующем ниже приведено еще одно ее доказательство.

Приведенное доказательство теоремы 1 конструктивно: применяя описанную в нем процедуру можно действительно за конечное число шагов получить разложение произвольного симметрического многочлена через элементарные симметрические.

Для примера рассмотрим симметрический многочлен $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$. Поскольку степень многочлена равна трем, можно взять $q=10$. Тогда веса одночленов, входящих в рассматриваемый многочлен, будут равны 300, 30 и 3. При упорядочении $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ наибольший вес будет иметь одночлен x^3.

Рассмотрим разность

$$x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3=-3x^2y-3xy^2-3x^2z-3xz^2-3y^2z-3yz^2-6xyz.$$

Веса входящих в нее одночленов равны 210, 120, 201, 102, 21, 12 и 111 соответственно. Наибольший вес имеет одночлен $-3x^2y$. Поэтому следует рассмотреть разность

$$x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3-(-3(x+y+z)(xy+xz+yz))=3xyz.$$

Окончательно получим

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz.$$

Однако на практике такой способ далеко не всегда является самым экономичным. Чаще эта теорема используется как чистая

[5] Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший немецкий математик.

теорема существования. Обычно это позволяет найти необходимое разложение, а иногда можно обойтись и без этого.

В том же примере можно рассуждать следующим образом. Многочлен $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ имеет степень три, а число 3 разлагается на целые слагаемые всего тремя разными способами: 3=3, 3=2+1 и 3=1+1+1. Следовательно, в силу доказанной теоремы этот многочлен может быть записан в виде

$$F(x,y,z)=\alpha(x+y+z)^3+\beta(x+y+z)(xy+xz+yz)+\gamma xyz.$$

Нужно только найти значения коэффициентов α, β и γ. Для этого можно придать переменным x, y и z какие-то конкретные значения. Для того чтобы найти α, удобно взять $x=1$, $y=z=0$. Тогда в левой части последней формулы получим 1, а в правой α. Значит, $\alpha=1$. Чтобы найти γ удобно взять $x=y=1$, $z=-2$, что позволяет найти $\gamma=3$. Теперь, чтобы найти β можно взять, например, $x=y=z=1$, что даст $\beta=-3$.

Теперь первый трюк при рассмотрении ключевого примера может быть проделан так. По теореме 1 сумма $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ может быть записана в виде

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=$$
$$=\alpha(x+y+z)^4+\beta(xy+xz+yz)(x+y+z)^2+\gamma xyz(x+y+z)+\delta(xy+xz+yz)^2,$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – некоторые числа. Коэффициент δ можно легко найти, положив $x=1$, $y=-1$, $z=0$. Значения же остальных коэффициентов для нас не важны, поскольку по условию $x+y+z=0$. Отсюда и получаем равенство $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+xz+yz)^2$.

Приведем еще один пример того, как теорема 1 позволяет решать достаточно сложные задачи. Например, следующая предлагалась на заключительном туре Всероссийской олимпиады в 2003 г.

Задача 2. Пусть a,b,c – положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Решение. Это неравенство, очевидно, симметрично. Тождественные преобразования никогда не нарушают симметрии, поэтому если мы умножим обе части неравенства на $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$ и соберем все слагаемые в левой части, то получим неравенство вида

$F(a,b,c) \geq 0$, где F – некоторый симметрический многочлен. Нам будет удобно доказать, что это неравенство выполняется для всех *неотрицательных* значений a,b,c.

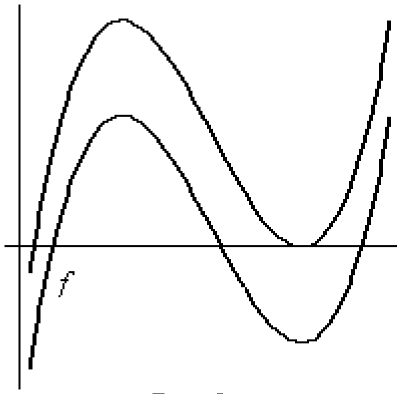

Рис. 3

Нетрудно сообразить, что степень этого многочлена не превосходит пяти. По теореме о симметрических многочленах его можно выразить через элементарные симметрические многочлены. А поскольку его степень достаточно мала, элементарный симметрический многочлен abc будет входить в это разложение в степени, не превышающей первую.

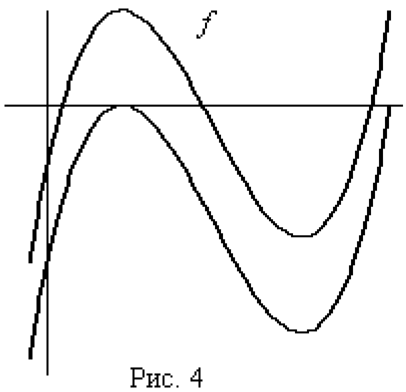

Рис. 4

Мы умеем менять числа a,b,c так, что значения симметрических многочленов $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ будут оставаться неизменными, а произведение abc будет меняться в известных пределах. Но линейная функция обязательно достигает своего наименьшего значения на отрезке в одном из концов этого отрезка.

Пределы изменению величины произведения abc могут определяться тремя обстоятельствами: либо график многочлена

$$f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$$

«зацепится» за ось абсцисс точкой локального минимума (рис. 3) или точкой локального максимума (рис. 4), или, наконец, одно из чисел a,b,c обратится в ноль (рис. 5).

Если мы сдвигаем график вниз, то может реализоваться только первый случай, и мы получим многочлен, у которого совпадают два меньших корня. Если же сдвигать график вверх, то может реализоваться второй случай и получится многочлен у которого совпадают два больших корня, а может реализоваться третий случай и получится многочлен с различными корнями, один из которых равен нулю.

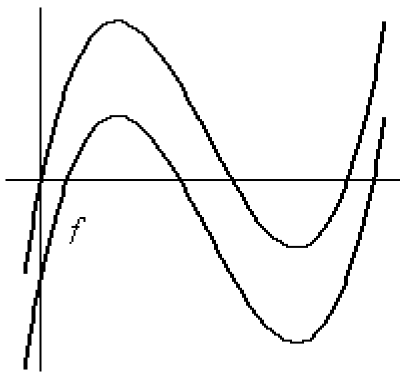

Рис. 5

Чтобы понять, куда именно нужно сдвигать график, вверх или вниз, нужно явно выписать разложение симметрического многочлена через элементарные симметрические функции. В данной задаче удобнее обойтись без этого. Но тогда придется рассмотреть два варианта: когда два из трех корней совпадают (но не известно, большие или меньшие) и когда один из корней равен нулю.

В первом варианте можем, не ограничивая общности, считать, что $a=b$, $c=1-2a$. Тогда исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{2}{1-a}+\frac{1}{2a}\geq\frac{4}{1+a}+\frac{2}{2-2a}$$

или после преобразований[6] как $9a^2-6a+1=(3a-1)^2\geq 0$. Последнее неравенство очевидно.

Во втором варианте можем считать, что $c=0$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}$, причем $a+b=1$.

Для доказательства этого неравенства можно вновь применить ту же идею! После приведения к общему знаменателю получим

[6] Нам опять «повезло»: получился многочлен второй степени, а не пятой. Подумайте, почему.

симметрическое неравенство степени три, поэтому элементарный симметрический многочлен ab будет входить в него линейно. А значит, неравенство достаточно доказать в двух случаях: когда числа a и b равны (и равны одной второй), или когда одно из чисел равно нулю (а второе – единице). В обоих случаях неравенство очевидно.

Задача решена, причем почти без вычислений!

Упражнения.

23. {Л.1988} Действительные числа a и b таковы, что $0 \le a,b \le 1$. Докажите, что $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} \le 1$.

24. {h.1913} Докажите, что если $0 \le a \le b \le 1$, то

$$2\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \le 2(1-a)(1-b)+1.$$

25. {P.1994}Докажите, что если $a \ge 0$ и $b \ge 0$, то

$$a^3(b+1)+b^3(a+1) \ge a^2(b+b^2)+b^2(a+a^2).$$

26. (Студенческий матбой) Докажите, что для любых неотрицательных чисел a,b,c выполняется неравенство

$$4(a^3+b^3+c^3+6abc) \ge (a+b+c)^3.$$

27. Попробуйте усилить результат предыдущей задачи.

28. {B.1975} Докажите, что для неотрицательных a,b,c имеет место неравенство $a^3+b^3+c^3+3abc \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$.

29. {K.1972} Докажите, что для произвольных чисел x, y, z справедливо неравенство $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 \ge xyz(x+y+z)$.

30. Докажите, что для произвольных чисел x, y, z справедливо неравенство $(xy+yz+xz)^2 \ge 3xyz(x+y+z)$.

31. {W.1984} Пусть a,b,c - неотрицательные действительные числа такие, что $a+b+c=1$. Докажите, что $0 \le ab+ac+bc-2abc \le 7/27$.

32. {P.1991} Пусть a,b,c – неотрицательные числа, такие, что $a+b+c=1$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c) \ge 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

5. Теорема Безу[7]

Вернемся к ключевому примеру. Раскроем секрет второго трюка. Напомню, что я «вытащил из рукава» многочлен

[7] Этьен Безу (1730–1783) – французский математик, член Парижской академии наук.

$$g(t)=(t-a)(t-a)(t+2a),$$

а потом чудесным образом оказалось, что его график получается из графика многочлена $f(t)$ параллельным переносом. Должен признаться, что на самом деле я действовал в обратном порядке: сначала сделал параллельный перенос графика, а потом разложил соответствующий многочлен на множители. А помогла в этом

Теорема 2. Пусть c – корень многочлена $F(t)$. Тогда найдется такой многочлен $G(t)$, что $F(t)=G(t)(t-c)$.

Доказательство. Пусть $F(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n$ и $F(c)=0$. Тогда

$$F(t)=F(t)-F(c)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n-(a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n)=$$
$$=a_0(t^n-c^n)+a_1(t^{n-1}-c^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(t-c)$$

Правая часть этого равенства делится на $t-c$. Это следует из хорошо известного тождества

$$t^k-c^k=(t-c)(t^{k-1}+t^{k-2}c+\ldots+tc^{k-2}+c^k),$$

которое в старых книгах называется тождеством Безу.

С его помощью нетрудно найти и коэффициенты многочлена $G(t)$. Коэффициент при t^m равен $a_0c^{n-m-1}+a_1c^{n-m-2}+\ldots+a_{n-m-2}c+a_{n-m-1}$. Этой формулой иногда[8] удобно пользоваться, выполняя деление. Доказательство завершено.

Следствие 1. Если $F(t)$ – многочлен, а c – число, то найдутся многочлен $G(t)$ и число r такие, что $F(t)=G(t)(t-c)+r$.

Доказательство. Если в качестве r взять число $F(c)$, то число c будет корнем многочлена $F(t)-r$.

Следствие 2. Если заданы многочлен $F(t)$, и m чисел $c_1,c_2,\ldots,c_m$, то многочлен $F(t)$ можно записать в виде

$$F(t)=G(t)(t-c_1)(t-c_2)\ldots(t-c_m)+R(t),$$

где $G(t)$ – многочлен, а $R(t)$ – многочлен, степень которого строго меньше m.

Доказательство можно провести индукцией по m. При $m=1$ утверждение уже доказано. Докажем его для m чисел, предполагая, что для меньшего количества чисел утверждение уже доказано. В силу следствия 1 можно записать $F(t)=G(t)(t-c_m)+r$. В силу предположения индукции многочлен $G(t)$ может быть записан в виде

[8] Например, если $c=\pm1$.

$$G(t)=H(t)(t-c_1)(t-c_2)\ldots(t-c_{m-1})+R(t),$$

причем степень многочлена $R(t)$ меньше $m-1$. Тогда

$$F(t)=G(t)(t-c_1)(t-c_2)\ldots(t-c_m)+R(t)(t-c_m)+r.$$

Очевидно, степень многочлена $R(t)(t-c_m)+r$ меньше m.

Следствие 3. Если многочлен $F(t)$, степень которого не превосходит n, обращается в ноль в $n+1$ различных точках $c_1,c_2,\ldots,c_{n+1}$, то он тождественно равен нулю.

Доказательство. Многократно применяя теорему 2, запишем многочлен в виде

$$F(t)=G(t)(t-c_1)(t-c_2)\ldots(t-c_{n+1}).$$

Если многочлен $G(t)$ отличен от нуля, то в правой части этого равенства стоит многочлен, степень которого больше n, а в левой – многочлен степени n или меньше. Получается противоречие. Значит, при любом t имеем $G(t)=0$, а потому и $F(t)=0$.

Итак, как же был сделан второй трюк. Берем точку a, в которой многочлен $f(t)$ достигает максимума, и рассматриваем многочлен $g(t)=f(t)-f(a)$. Очевидно, $g(a)=0$, следовательно, по теореме Безу $g(t)=h(t)(t-a)$, где $h(t)$ – некоторый многочлен. Но a – точка максимума многочлена $g(t)$, поэтому в этой точке он не меняет знака, оставаясь вблизи нее неположительным. А выражение $(t-a)$ в этой точке меняет знак, значит, должен менять знак и многочлен $h(t)$, а тогда a – его корень. Поэтому $h(t)=p(t)(t-a)$ и, следовательно, $g(t)=p(t)(t-a)^2$. Слева здесь стоит кубический многочлен, поэтому многочлен $p(t)$ линейный, и тогда $g(t)=(\alpha t-\beta)(t-a)^2$. Сравнивая коэффициенты при старшем члене в левой и правой частях равенства, находим $\alpha=1$, а сравнение коэффициентов при t^2 дает $\beta=-2a$. Вот и весь секрет.

Та же теорема позволяет объяснить и третий трюк. Казалось бы, нам повезло, что многочлен четверной степени $9a^4+12a^3+3$ разложился в произведение двух квадратных трехчленов[9]. На самом

[9] Замечание для знатоков. Неотрицательность значений этого многочлена (и аналогичных многочленов в других задачах) можно установить «в уме», если воспользоваться средствами дифференциального исчисления или правилом Декарта, или неравенством Коши. Это еще один аргумент в пользу расширения технического арсенала.

деле никакого везения здесь нет. Авторы задачи придумали хорошее неравенство. А хорошее неравенство – это такое неравенство, которое при некоторых значениях переменных обращается в равенство, и потому не может быть усилено. Наше неравенство обращается в равенство при $x=y=-1$, $z=2$. Поэтому не удивительно, что $a=1$ – корень многочлена $9a^4-12a^3+3$. Рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что $9a^4+12a^3+3=(\alpha t^2+\beta t+\gamma)(a-1)^2$. Числа α,β и γ несложно найти, сравнивая свободные члены и коэффициенты при t^4 и t^3 в левой и правой частях равенства.

Только что мы столкнулись еще с двумя совпадениями, над которыми советую подумать самостоятельно. Во-первых, оказывается, что хорошее неравенство доказать проще, чем плохое[10]. А во-вторых, хорошее симметрическое неравенство обращается в равенство, когда значения, по крайней мере, двух переменных совпадают[11]. Очень часто это позволяет «угадывать»[12] корни многочленов.

Итак, все секреты раскрыты. Это позволяет нам говорить не о «трюках», а о шагах алгоритма, позволяющего доказывать неравенства. Между прочим, этот алгоритм нетрудно реализовать на компьютере. Особенно удобны для этого пакеты символьных вычислений типа Maple, Mathematica, MATLAB. Выходит, что компьютер в состоянии решать олимпиадные задачи, причем «на доказательство». Вот еще один пример работы этого алгоритма.

Докажем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех неотрицательных чисел:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}\ .$$

Очевидно, это неравенство преобразуется к виду

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc.$$

---

[10] Кстати, с этим обстоятельством мы уже пару раз сталкивались выше.

[11] Строго говоря, это утверждение верно, если степень неравенства не слишком высока по сравнению с числом переменных.

[12] Замечание для знатоков. Кратные корни не обязательно угадывать. Для их поиска существует регулярная процедура, основанная на поиске наибольшего общего делителя многочлена и его производной с помощью алгоритма Евклида.

Сдвигая график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вниз, убеждаемся, что неравенство достаточно доказать для случая, когда значения, по крайней мере, двух из трех переменных равны. Не ограничивая общности, можем считать, что $b=c$. Тогда наше неравенство приводится к виду $(a+2b)^3\geq 27ab^2$,или $a^3+6a^2b-15ab^2+8b^2\geq 0$.

Разделив на b^3 и обозначив $t=a/b$, получим равносильное неравенство $t^3+6t^2-15t+8\geq 0$.

Ввиду сказанного выше, у нас есть основание подозревать, что единица является двукратным корнем многочлена $t^3+6t^2-15t+8$, то есть $t^3+6t^2-15t+8=(\alpha t+\beta)(t^2-2t+1)$. Сравнивая старший и младший коэффициенты, находим $\alpha=1$, $\beta=8$. После чего непосредственно убеждаемся, что $t^3+6t^2-15t+8=(t+8)(t-1)^2$. Следовательно, при неотрицательных значениях t этот многочлен принимает неотрицательные значения, что и требовалось доказать.

Приведем еще один пример.

Задача 3. {М.1982} Пусть a,b,c - неотрицательные числа. Докажите, что $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+abc(a+b+c)\geq 0$.

Решение. Неравенство имеет четвертую степень, поэтому произведение abc может входить в разложение левой части по элементарным симметрическим многочленам только в первой степени. Если[13] коэффициент при этом многочлене отрицателен, сдвинем график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вниз так, чтобы он зацепился точкой максимума за ось абсцисс. А если этот коэффициент положителен, то будем сдвигать этот график вверх до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: график зацепится за ось абсцисс точкой минимума или один из корней обратится в ноль. В результате мы получим более сильное неравенство. Значит, исходное неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел равны и когда одно из чисел обращается в ноль.

В случае $b=c\neq 0$ получим $a^4-4a^2b^2+ab^2(a+2b)\geq 0$. Разделив на b^4 и обозначив $t=a/b$, получим равносильное неравенство $t(t^3-3t+2)\geq 0$. Оно обращается в ноль при $t=1$, значит, естественно

---

[13] Мне лень разбираться, какой из двух случаев на самом деле имеет место. Проще разобрать оба.

предположить, что $t^3-3t+2=(\alpha t+\beta)(t-1)^2$. Сравнивая старшие коэффициенты и свободные члены слева и справа, находим $\alpha=1$ и $\beta=2$. Теперь нетрудно проверить, что $t^3-3t+2=(t+2)(t-1)^2$. При положительных t это выражение неотрицательно.

В случае $c=0$ доказываемое неравенство очевидно.

Упражнения

33. Докажите, что для неотрицательных a, b, c имеет место неравенство $2\sqrt{ab+bc+ac} \le \sqrt{3}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}$.

34. Пусть a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a+b+c=1$. Докажите неравенство $\sqrt{12abc}+a^2+b^2+c^2 \le 1$.

35. {П.1962} Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство

$$a+b+c \le \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

36. {М.1963} Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$.

37. {Р.1989} Пусть числа a, b, c неотрицательны и $a+b+c\le 3$. Докажите неравенство $\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2} \le \frac{3}{2} \le \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$.

38. Точка M принадлежит треугольнику ABC. Пусть h_a,h_b,h_c – высоты треугольника, а d_a,d_b,d_c – расстояния от точки M до соответствующих сторон. Докажите неравенство

$$(h_a-d_a)(h_b-d_b)(h_c-d_c)\ge 8d_ad_bd_c.$$

39. Точка M принадлежит треугольнику ABC. Пусть h_a,h_b,h_c – высоты треугольника, а d_a,d_b,d_c – расстояния от точки M до соответствующих сторон. Докажите неравенство $\frac{h_a}{d_a}+\frac{h_b}{d_b}+\frac{h_c}{d_c} \ge 9$.

40. {Л.1980} Докажите, что для любых a,b,c из отрезка $[0,1]$ выполнено неравенство $3(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-2abc(a+b+c)\le 3$.

41. Докажите, что для любых положительных a,b,c выполняется неравенство $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

42. Пусть a,b,c – положительные числа. Докажите неравенство
$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+a)(b+c)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}.$$

43. Пусть a,b,c – неотрицательные числа. Докажите, что
$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(abc)^{4/3}\geq 0.$$

44. {h.762} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняются неравенства
$$a+b+c\leq\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leq\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

45. {С.2004} Существуют ли положительные числа a,b,c, одновременно удовлетворяющие равенствам
$$a+b+c=1 \text{ и } (1-a)(1-b)(1-c)=abc?$$

46. (Австрийская олимпиада, 1971 г.[14]) Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c справедливо неравенство
$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc.$$

47. Пусть a, b и c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leq 3abc$.

48. (Олимпиада ГДР.1965) Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq 3/2$.

49. Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq 1/8.$$

50. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника, составленного из медиан остроугольного треугольника, больше 5/6 радиуса окружности, описанной около исходного треугольника.

51. Пусть a, b и c - длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что[15] $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\leq 2$.

---

[14] В 1964 г. на международной олимпиаде то же неравенство предлагалось доказать для случая, когда a,b,c обозначают стороны некоторого треугольника.

[15] Сравните с результатом упражнения 36.

52. {A.1971} Докажите, что если a,b,c – неотрицательные числа и $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$, то $abc(xy+yz+xz)\ge xyz(ab+bc+ac)$.

53. {h.2002} Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{25}{1+48abc}$.

54. Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $(ab+bc+ac)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right)\ge\frac{9}{4}$.

55. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c выполняется неравенство $((a+b)(b+c)(c+a))^2\ge abc(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)$.

56. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c выполняется неравенство

$$\sqrt{3(ab+bc+ac)}(9(a+b+c)^2+ab+bc+ac)\le 9((a+b+c)^3+abc).$$

57. {У.1993} Известно, что $x^2+y^2+z^2=1$. Докажите, что

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\le 3.$$

58. {H.1910} Докажите, что $-\frac{1}{2}\le xy+xz+yz\le 1$, если $x^2+y^2+z^2=1$ и x, y, z – действительные числа.

59. Пусть a,b,c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a+b+c=1$. Докажите неравенство $7(ab+bc+ac)\le 2+9abc$.

60. {S.1998} Про действительные числа x,y,z известно, что $x+y+z=5$ и $x^2+y^2+z^2=9$. Докажите, что $4\le xyz\le\frac{112}{27}$.

61. {У.1995} Какое наибольшее и наименьшее значение может принимать произведение xyz, если действительные числа x,y,z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$$

62. Найдите наименьшее значение выражения $a^{-1}bc+ab^{-1}c+abc^{-1}$, если $a^2+b^2+c^2=1$ $(a,b,c>0)$.

63. {C.2004} Три положительных числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2=3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{ac+1}+\frac{1}{bc+1}\ge\frac{3}{2}.$$

64. {S.1997} Про действительные числа x,y,z известно, что $x^2+y^2+z^2\le 2$. Докажите, что $x+y+z\le 2+xyz$.

65. {У.1996} Действительные числа x,y,z удовлетворяют равенствам $x+y+z=6$ и $xy+yz+zx=9$. Докажите, что числа x,y,z принадлежат отрезку $[0,4]$.

66. {Л.2006} Сумма положительных чисел a, b и c не меньше 1. Докажите неравенство $\frac{1}{2a+q}+\frac{1}{2b+q}+\frac{1}{2c+q}\ge\frac{1}{q}$, где $q=ab+bc+ca$.

67. {М.1997} Даны действительные числа $a_1\le a_2\le a_3$ и $b_1\le b_2\le b_3$ такие, что

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3,\ a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=b_1b_2+b_2b_3+b_1b_3.$$

Докажите, что если $a_1\le b_1$, то $a_3\le b_3$.

68. {В.1980} Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны $a,$ b и c сантиметров ($a<b<c$), а $p=4(a+b+c)$, $s=2(ab+bc+ac)$ и $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ – соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что $a<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$, $c>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$.

69. {h.994} При каком наибольшем значении d неравенство $x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z)\ge d(xy+yz+xz)^2$ выполняется при всех x,y,z?

70. {h.1364} Пусть $a+b+c=1$, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$. Докажите, что

а) $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\ge 1$;

б) $a^3+b^3+c^3+abcd\ge\min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}$.

6. Другое доказательство теоремы о симметрических многочленах

Развитая техника позволяет привести еще одно доказательство теоремы 1. Его конструкции удобно сначала продемонстрировать на уже рассматривавшемся примере многочлена

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3.$$

По сути, требуется исключить переменные x, y, z из выражения $x^3+y^3+z^3$, используя соотношения

$$a=x+y+z,\ b=xy+xz+yz,\ c=xyz.$$

Рассмотрим вспомогательный многочлен

$$f_3(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-at^2+bt-c.$$

Разделив этот многочлен на $(t-x)$, получим квадратный трехчлен

$$f_2(t)=t^2+(x-a)t+(x^2-ax+b).$$

А разделив его на $(t-y)$, получим многочлен первой степени

$$f_1(t)=t+(x+y-a).$$

Рассмотрим теперь многочлен $g(t)=F(x,y,t)=x^3+y^3+t^3$. В силу следствия 1 его можно записать в виде

$$g(t)=[t^2-(x+y-a)t+(x+y-a)^2]f_1(t)+$$
$$+a^3-3a^2x+3ax^2-3a^2y+3ay^2-3xy^2-3x^2y+6axy.$$

Обозначим $R_2(x,y)=a^3-3a^2x+3ax^2-3a^2y+3ay^2-3xy^2-3x^2y+6axy$. Многочлен $f_1(t)$ обращается в ноль при $t=z$, поэтому $g(z)=F(x,y,z)=R_2(x,y)$. Таким образом, мы исключили переменную z, заменив ее симметрическим многочленом a.

Продолжим те же рассуждения, рассмотрев многочлен

$$h(t)=R_2(x,t)=a^3-3a^2x+3ax^2-3a^2t+3at^2-3xt^2-3x^2t+6axt =$$
$$=3(a-x)t^2-3(a-x)^2t-3ax(a-x)+a^3.$$

Представим его в виде

$$h(t)=3(a-x)f_2(t)+3x^3-3ax^2+3bx+a^3-3ab.$$

Нам в очередной раз повезло[16]: остаток

$$R_1(x)=3x^3-3ax^2+3bx+a^3-3ab$$

не зависит от t. Поскольку $f_2(y)=0$, имеем $h(y)=R_2(x,y)=F(x,y,z)=R_1(x)$. Итак, мы избавились от двух переменных y и z. Осталось избавиться от x.

Разделим $R_1(t)$ на $f_3(t)$: $R_1(t)=3f_3(t)+a^3-3ab+3c$. Поскольку $f_3(x)=0$, получим $F(x,y,z)=R_1(x)=-a^3+3ab-3c$ и задача решена.

Следующее доказательство теоремы 1, принадлежащее Коши[17], концептуально, возможно, несколько сложнее первого, но его идея ближе к содержанию данной работы.

---

[16] Из приводимого ниже доказательства будет понятно, что это везение не случайно.

Второе доказательство теоремы 1. Рассмотрим многочлен

$$f_n(t)=t^n-p_1t^{n-1}+p_2t^{n-2}-\ldots+(-1)^np_n=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n).$$

Здесь $p_1,p_2,\ldots,p_n$ – элементарные симметрические многочлены, аргументы которых для краткости опущены.

Разделив многочлен $f_n(t)=t^n-p_1t^{n-1}+p_2t^{n-2}-\ldots+(-1)^np_n$ на $(t-x_1)$, получим многочлен $f_{n-1}(t)$. В свою очередь, разделив его на $(t-x_2)$, получим многочлен $f_{n-2}(t)$ и т. д., до многочлена $f_1(t)$. Степень многочлена $f_k(t)$ равна k, а его коэффициенты помимо симметрических многочленов $p_1,p_2,\ldots,p_n$ зависят от переменных $x_1,x_2,\ldots,x_{n-k}$. Многочлен $f_k(t)$ имеет корни $x_{n-k+1},x_{n-k+2},\ldots,x_n$.

Пусть теперь задан произвольный симметрический многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Рассмотрим многочлен от одной переменной $g_1(t)=F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},t)$. Разделим его с остатком на $f_1(t)$:

$$g_1(t)=q_1(t)f_1(t)+r_1(t).$$

Остаток $r_1(t)$ – это многочлен степени 0, то есть константа. Она, конечно, зависит от $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$, то есть $r_1(t)=R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ и

$$g_1(t)=q_1(t)f_1(t)+R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Полагая в этом равенстве $t=x_n$, и учитывая, что $f_1(x_n)=0$, получим

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=g_1(x_n)=R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Заменив в этом тождестве x_{n-1} на x_n а x_n на x_{n-1}, получим

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_n,x_{n-1})=R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_n).$$

Поскольку многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ симметрический, левые части двух последних равенств равны, значит, равны и правые:

$$R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_n)=R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}).$$

Рассмотрим теперь многочлен $g_2(t)=R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},t)$. Разделим его с остатком на $f_2(t)$:

$$g_2(t)=q_2(t)f_2(t)+r_2(t).$$

Остаток $r_2(t)$ – это многочлен, степень которого не выше первой. Подставим в последнее равенство последовательно $t=x_{n-1}$ и $t=x_n$. Учитывая, что $f_2(x_{n-1})=f_2(x_n)=0$, получим

$$R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})=g_2(x_{n-1})=r_2(x_{n-1})$$

и

$$R_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-2},x_n)=g_2(x_n)=r_2(x_n).$$

---

[17] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – крупнейший французский математик.

Левые части этих равенств, как установлено выше, равны, поэтому равны и правые. Но тогда получается, что в двух точках многочлен $r_2(t)$, степень которого не превосходит 1, принимает одинаковые значения. Значит, многочлен $r_2(t)$ попросту константа[18], зависящая, разумеется, от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$. Обозначив эту константу через $R_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, получим

$$R_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) = R_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Теперь можно продолжить подобные рассуждения, разделив многочлен $R_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}, t)$ на $f_3(t)$ и так далее. В конце концов, получим выражение для $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ совсем не содержащее переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что и докажет нужную теорему.

7. Некоторые уточнения теоремы о средних

Доказанное выше неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел может быть усилено следующим образом. Для неотрицательных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} + \frac{1}{6}\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + \left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\right].$$

Для доказательства этого развитый метод вполне подходит.

Для того чтобы избавиться от квадратных корней, сделаем замену переменных $a=x^2$, $b=y^2$, $c=z^2$. Для неотрицательных чисел x,y, z будет достаточно доказать неравенство

$$2(x^2+y^2+z^2) - \left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 6\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ .$$

Левая часть этого неравенства представляет собой симметрический многочлен второй степени. Его разложение по элементарным симметрическим многочленам не содержит произведения xyz.Поэтому, если мы будем сдвигать график многочлена

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$$

вниз вдоль оси ординат, то левая часть будет оставаться неизменной. А правая часть будет, очевидно, возрастать. Сдвигать этот график можно до тех пор, пока он не зацепится за ось абсцисс точкой ло-

---

[18] Вот и объяснение совпадения из рассмотренного выше примера.

кального максимума (при сдвиге вниз наименьший корень многочлена увеличивается, поэтому в ноль обратиться не может).

Поэтому достаточно доказать, что неравенство справедливо в случае, когда значения двух из трех переменных совпадают. В силу симметрии можно считать, что $z=y$. Тогда получим

$$2(x^2+2y^2)-2(x-y)^2 \geq 6\sqrt[3]{x^2y^4}$$

или $2y^2+4xy \geq 6\sqrt[3]{x^2y^4}$. Последнее немедленно следует из неравенства Коши для трех чисел $2y^2$, $2xy$, $2xy$ (впрочем, можно возвести это неравенство в квадрат и разложить на множители).

Неравенство доказано. Можно получить аналогичную оценку и с другой стороны. А именно, для неотрицательных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{abc}+\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\right].$$

Доказательство вполне аналогично. Сделав ту же замену переменных, перепишем неравенство в виде

$$(x^2+y^2+z^2)-\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right] \leq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}.$$

Чтобы уменьшить правую часть этого неравенства нужно сдвигать график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ вверх. Левая часть при соответствующем изменении переменных меняться не будет, поэтому, усиливая неравенство, нужно сдвигать этот график «до упора». Здесь возможны два случая: либо один из корней станет равным нулю, либо два корня станут равными.

Если, например, $z=0$, то получается очевидное неравенство $-(x-y)^2 \leq 0$. А если $z=y$, то придем к неравенству

$$(x^2+2y^2)-2(x-y)^2 \leq 3\sqrt[3]{x^2y^4}$$

или после упрощения

$$4xy-x^2 \leq 3\sqrt[3]{x^2y^4}.$$

После возведения в куб получим эквивалентное неравенство

$$x^3(64y^3-48xy^2+12x^2y-x^3) \leq 27x^2y^4$$

или

$$x^2(27y^4-64xy^3+48x^2y^2-12x^3y+x^4) \geq 0.$$

Выражение в скобках в этом неравенстве должно делиться на $(x–y)^2$. Выполнив деление, убедимся, что неравенство на самом деле приводится к виду $x^2(27y^2–10xy+x^2)(x–y)^2\geq 0$. Последнее уже очевидно, поскольку $27y^2–10xy+x^2=2y^2+(x–5y)^2$.

8. Доказательство неравенств

Мы имели возможность убедиться, что при нашем подходе доказательство простых неравенств превращается в рутинную процедуру. Приведем несколько задач посложнее, при решении которых подумать нелишне, но которые все-таки удается решить предложенным методом.

Задача 4. {h.1834} Для действительных чисел x,y,z докажите неравенства

а) $x^6y^6+x^6z^6+y^6z^6+3x^4y^4z^4\geq 2(x^3+y^3+z^3)x^3y^3x^3$;

б) $x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\geq 2(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3)$.

Решение. Оба неравенства имеют достаточно высокую степень, поэтому основную трудность представляет разложение соответствующих многочленов по элементарным симметрическим функциям. Для этого пригодится одно тождество, представляющее интерес и само по себе.

Рассмотрим многочлен $f(t)=(t–a)(t–b)(t–c)=t^3–pt^2+qt–r$. Запишем очевидные равенства $f(a)=0, f(b)=0, f(c)=0$:

$$a^3–pa^2+qa–r=0,\ b^3–pb^2+qb–r=0,\ c^3–pc^2+qc–r=0.$$

Сложив их, получим

$$(a^3+b^3+c^3)–p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)–3abc=0$$

или

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3–3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc.$$

Теперь рассмотрим более простое неравенство пункта б).

С помощью доказанного тождества оно приводится к виду

$$(x^2+y^2+z^2)^3–3(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)+3x^2y^2z^2+3x^2y^2z^2\geq$$
$$\geq 2(xy+xz+yz)^3–6(xy+xz+yz)(x^2yz+xy^2z+xyz^2)+6x^2y^2z^2,$$

после чего становится ясно, что произведение xyz входит в разложение разности левой и правой частей неравенства в первой степени, или вовсе не входит. А поэтому неравенство достаточно доказать для случая, когда значения двух из трех переменных совпадают.

При $z=y$ неравенство приводится к виду $x^2(y^4-4x^3y+3x^4)\geq 0$ или $x^2(x^2+2xy+3y^2)(x-y)^2\geq 0$, что уже очевидно.

Неравенство а) сводится к доказанному подстановкой yz вместо x, xz вместо y и xy вместо z.

Использованный при доказательстве вспомогательного тождества прием принадлежит И. Ньютону[19]. Он удивительно красив и бывает полезен во многих других случаях. В частности, он может быть положен в основу еще одного доказательства теоремы о симметрических многочленах.

Задача 5. {h.1067} Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c, удовлетворяющих условию $a^2+b^2+c^2=1$, выполняется неравенство $\dfrac{a}{1-a^2}+\dfrac{b}{1-b^2}+\dfrac{c}{1-c^2}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Избавившись от знаменателей, получим неравенство

$$2a(1-b^2)(1-c^2)+2b(1-a^2)(1-c^2)+2c(1-a^2)(1-b)^2\geq$$
$$\geq 3\sqrt{3}(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$$

или

$$2(a+b+c)-2(ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2)+2abc(bc+ac+ab)\geq$$
$$\geq 3\sqrt{3}-3\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)+3\sqrt{3}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-3\sqrt{3}(abc)^2.$$

Нужно разложить разность левой и правой частей неравенства по элементарным симметрическим многочленам. Причем нас будут интересовать лишь члены, содержащие произведение abc. Кроме очевидных, они могут появиться только из слагаемых $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$ и $ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2$, поскольку остальные слагаемые имеют слишком низкие степени.

Но

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=(ab+bc+ac)^2-2(a+b+c)abc$$

и

$$ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2=(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc.$$

Поэтому наше неравенство перепишется в виде

$$3\sqrt{3}(abc)^2+[2(ab+bc+ac)+6\sqrt{3}(a+b+c)+3]abc+\ldots\geq 0,$$

[19] Исаак Ньютон (1643–1727) – великий английский ученый.

где многоточием обозначены члены, не содержащие abc.

Из последнего выражения видно, что зависимость левой части неравенства от abc монотонна. Поэтому, если мы рассмотрим многочлен $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и будем менять числа a, b, c, сдвигая его график вверх, то ограничение $a^2+b^2+c^2=1$ будет всегда выполняться тождественно, а значение левой части неравенства будет уменьшаться. Поэтому, усиливая неравенство, можно сдвинуть этот график «до предела». Этот предел может наступить, если график зацепится за ось абсцисс точкой минимума, и тогда два из трех чисел a, b, c станут равными, либо если одно из чисел станет равным нулю.

При $b=c$ неравенство приведется к виду

$$\frac{a}{1-a^2}+\frac{2b}{1-b^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

а ограничение примет вид $a^2+2b^2=1$. Используя это равенство, перепишем неравенство в однородной форме

$$\sqrt{a^2+2b^2}\left(\frac{a}{2b^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Избавимся от знаменателей:

$$\sqrt{a^2+2b^2}\left(a^3+ab^2+4b^3\right)\geq 3\sqrt{3}b^2(a^2+b^2).$$

Возведем это неравенство в квадрат и разложим разность левой и правой частей на множители. Получим

$$(a^6+2a^5b+7a^4b^2+20a^3b^3+11a^2b^4+26ab^5+5b^6)(a-b)^2\geq 0.$$

Это неравенство уже очевидно.

А при $c=0$ придем к неравенству $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}$, которое можно переписать в виде $2(a^3+b^3)\sqrt{a^2+b^2}\geq 3\sqrt{3}a^2b^2$. Это неравенство легко следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел.

Задача 6. {Л.2008} Для любых положительных чисел a, b и c, удовлетворяющих условию $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ докажите неравенство

$$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение. Данное в условии ограничение слишком сложно, чтобы применять наш метод. Упростить его можно естественной заменой переменных $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$. Поскольку

$$\frac{a}{a+bc}=\frac{axyz}{(a+bc)xyz}=\frac{yz}{yz+x},$$

неравенство можно записать в виде

$$\frac{yz}{yz+x}+\frac{zx}{zx+y}+\frac{xy}{xy+z}\geq\frac{3}{4},$$

а ограничение примет вид $x+y+z=1$.

Используя это ограничение, перепишем неравенство в виде

$$\frac{yz}{yz-y-z+1}+\frac{zx}{zx-z-x+1}+\frac{xy}{xy-x-y+1}\geq\frac{3}{4}$$

или

$$\frac{yz}{(y-1)(z-1)}+\frac{zx}{(z-1)(x-1)}+\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Теперь видно, что после умножения на наименьший общий знаменатель получится симметрическое неравенство степени три.

Его можно доказать для *неотрицательных* значений переменных. А для этого будем сдвигать до упора график многочлена

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z),$$

стараясь уменьшить разность левой и правой частей неравенства. При изменениях переменных, соответствующих сдвигам графика вдоль оси ординат ограничение $x+y+z=1$ нарушаться заведомо не будет. Остановиться придется либо когда одна из переменных обратится в ноль, либо когда две из трех переменных станут равными. В обоих случаях уравнение, полученное после умножения на знаменатель, равносильно исходному.

Поэтому в первом случае нужно доказать неравенство

$$\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\geq\frac{3}{4}$$

при ограничении $x+y=1$, так как, не ограничивая общности, можно считать, что $z=0$. Если с помощью этого условия избавиться от единиц в знаменателе, неравенство станет очевидным.

При $z=y$ получим неравенство

$$\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{2xy}{(x-1)(y-1)}\geq\frac{3}{4}$$

при ограничении $x+2y=1$. Отсюда

$$\frac{y^2}{(1-y)^2}+\frac{x}{1-y}\geq\frac{3}{4}.$$

Избавляясь от знаменателя, получим $4y^2+4x-4xy\geq3-6y+3y^2$. Учитывая, что $x+2y=1$, перепишем это неравенство в однородной форме

$$y^2+4x(x+2y)-4xy\geq3(x+2y)^2-6y(x+2y)$$

или $x^2-2xy+y^2\geq0$. Задача решена.

Задача 7. {h.1094} Пусть a, b, c – неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства $a^4+b^4+c^4\leq2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ следует неравенство $a^2+b^2+c^2\leq2(ab+bc+ca)$.

б) верно ли обратное: из второго неравенства следует первое неравенство?

Решение. Начнем с пункта а). Прежде всего, заметим, что оба неравенства превратятся в эквивалентные, если значения всех трех переменных умножить на одно и то же положительное число. Случай $a=b=c=0$ тривиален, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $a+b+c=1$.

Нужное утверждение эквивалентно тому, что из неравенства

$$a^2+b^2+c^2>2(ab+bc+ca)$$

следует неравенство

$$a^4+b^4+c^4>2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

Найдем наименьшее значение функции

$$F(a,b,c)=a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

при условии, что выполняются равенство $a+b+c=1$ и неравенство $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)\geq0$, а числа a, b, c неотрицательны.

Функция $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)$ представляет собой симметрический многочлен второй степени. В силу теоремы 1 его можно выразить через элементарные симметрические многочлены, причем произведение abc в это разложение входить не будет. Функция

$F(a,b,c)$ – это симметрический многочлен четвертой степени. Его тоже можно разложить по элементарным симметрическим многочленам, причем произведение abc будет входить в разложение в степени, не превосходящей первую.

Мы знаем, как менять произведение abc, не меняя два других элементарных симметрических многочлена. При таких изменениях ограничения в рассматриваемой оптимизационной задаче будут сохраняться, а минимизируемая функция – меняться. Поэтому в точке минимума выполняется одно из двух условий: либо одна из переменных равна нулю, либо две переменных равны между собой.

При $a=0$ ограничения примут вид $b+c=1$, $(b-c)^2\geq 0$, а $F(0,b,c)=(a^2-b^2)^2$. Отсюда видно, что значение $F(0,b,c)$ неотрицательно и обращается в ноль, только если $b=c=\dfrac{1}{2}$.

При $b=c$ ограничения примут вид $a+2b=1$, $a(a-4b)\geq 0$. Отсюда $a=1-2b$, а поскольку случай $a=0$ уже рассмотрен, можно считать, что $a-4b\geq 0$, то есть $b\leq\dfrac{1}{6}$. Значение функции

$$F(1-2b,b,b)=(1-2b)^4-4(1-2b)^2b^2=(1-2b)^2(1-4b)$$

в силу условия $b\leq\dfrac{1}{6}$ строго положительны.

Итак, искомый минимум равен нулю, причем он достигается только в случае, когда одно из чисел a,b,c равно нулю, а два другие равны меду собой, т. е. когда неравенство $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)\geq 0$ обращается в равенство. Значит, при $a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)>0$ функция $F(a,b,c)$ строго больше нуля, что и требуется доказать.

Пункт б) гораздо проще. Накопленный опыт подсказывает, что нужно рассмотреть случай $b=c$. Тогда первое из данных неравенств примет вид $a^2(a^2-4b^2)\leq 0$, а второе – вид $a(a-4b)\leq 0$. При $a=3b>0$ второе неравенство выполняется, а первое – нет.

Хочется обратить внимание на логический прием, позволивший при решении пункта а) поменять местами ограничение и минимизируемую функцию. Этот прием бывает полезен весьма часто. И во многом он объясняет, почему в классической теории оптимизации критерий и ограничения «почти равноправны».

Задача 8. {h.423}Докажите, что для любых действительных x, y и z выполнено неравенство

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)\le(x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2.$$

Решение. Докажем сначала это неравенство для неотрицательных x, y и z. Введем обозначения $p=x+y+z$, $q=xy+xz+yz$, $r=xyz$.

Начнем с еще одного трюка. Докажем сначала неравенство $3p^3-10pq+18r\ge0$ (откуда оно взялось будет ясно из дальнейшего).

Поскольку r входит в доказываемое неравенство линейно, то, сдвигая график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-pt^2+qt-r$ вверх, мы только усилим неравенство. Поэтому его достаточно доказать для двух случаев: когда два из трех чисел x, y и z равны между собой и когда одно из этих чисел равно нулю.

При $y=z$ получим неравенство

$$3x^3-2x^2y+4xy^2+4y^3=2x^3+x(x-y)^2+3xy^2+4y^3\ge0.$$

А при $z=0$ получим $3(x+y)^3\ge10(x+y)xy$, что легко следует из неравенства $(x+y)^2\ge4xy$.

Вернемся к исходному неравенству. Перепишем его в терминах элементарных симметрических многочленов p, q и r. Очевидно

$$(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)=(p-2z)(p-2y)(p-2x)=$$
$$=p^3-2pp^2+4qp-8r=4qp-8r-p^3.$$

Применяя это равенство, преобразуем левую часть доказываемого неравенства

$$(x^2+y^2-z^2)(x^2+z^2-y^2)(y^2+z^2-x^2)=$$
$$=4(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-8x^2y^2z^2-(x^2+y^2+z^2)^3=$$
$$=4(q^2-2pr)(p^2-2q)-8r^2-(p^2-2q)^3.$$

Поэтому разность правой и левой частей неравенства равна

$$D=(4qp-8r-p^3)^2-4(q^2-2pr)(p^2-2\mathrm{q})+8r^2+(p^2-2q)^3=$$
$$=8\{9r^2+[3p^3-10pq]r\}+\ldots$$

(члены, не содержащие r, в дальнейшем не понадобятся, поэтому они обозначены многоточием).

Выделим полный квадрат

$$D=8\left(3r+\frac{3p^3-10pq}{6}\right)^2+\ldots$$

Доказанное выше неравенство $3p^3-10pq+18r\geq 0$ свидетельствует о том, что выражение в скобках не меняет знака, а потому его квадрат будет уменьшаться при сдвиге графика многочлена

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-pt^2+qt-r$$

вверх. А сумма, обозначенная многоточием, при этом изменяться не будет. Поэтому исходное неравенство достаточно доказать для двух случаев: когда два из трех чисел x, y и z равны между собой и когда одно из них равно нулю.

При $y=z$ доказываемое неравенство (в исходной форме), перепишется в виде $x^2x^2(2y^2-x^2)\leq x^2x^2(2y-x)^2$. Раскрыв скобки, получим $2y^2-x^2\leq 4y^2-4xy+x^2$, или $0\leq 2y^2-4xy+2x^2=2(x-y)^2$.

А при $z=0$ левая часть доказываемого неравенства не положительна, а правая – не отрицательна.

Остается избавиться из условия неотрицательности чисел x, y и z. Прежде всего заметим, что неравенство не меняется, если знаки всех чисел поменять на противоположные. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что два числа, например x и y, не отрицательны. Если и $z\geq 0$, то все уже доказано. А если $z<0$, то

$$\begin{aligned}(x+y-z)^2(x+z-y)^2(y+z-x)^2&=(x+y+(-z))^2(x-(-z)-y)^2(y-(-z)-x)^2=\\&=(x+y+(-z))^2(y+(-z)-x)^2(x+(-z)-y)^2\geq\\&\geq (x+y-(-z))^2(y+(-z)-x)^2(x+(-z)-y)^2,\end{aligned}$$

то есть при замене z на $-z$ правая часть неравенства уменьшится, а левая не изменится, поэтому нужное неравенство следует из уже доказанного неравенства для трех неотрицательных чисел x, y и $-z$.

Задача решена. Пришлось немножко повозиться, но не пришлось ничего изобретать.

Упражнения

71. Докажите, что для неотрицательных значений a,b,c выполняется неравенство $8(a^3+b^3+c^3)^2\geq 9(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)$.

72. Пусть x,y,z – произвольные действительные числа, $p=x+y+z$, $q=xy+xz+yz$, $r=xyz$. Докажите неравенство

$$9(3r-pq)^2\leq 16(p^2-2q)(2q^2-3pr).$$

73. {h.1228, Л.1990} Докажите для любых положительных чисел a, b, c, не больших 1, неравенство $\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leq 2$.

74. {h.2088} Для положительных чисел a, b, c, сумма которых равна 1, докажите неравенство $\frac{a^2+3ab}{a+b}+\frac{b^2+3bc}{b+c}+\frac{c^2+3ca}{c+a}\le 2$.

75. {P.1996} Докажите, что если a, b, c – положительные числа и $ab+bc+ca>a+b+c$, то $a+b+c>3$.

9. Заключение

Освоив новый метод, стоит сравнить его с уже существующими. Удобно сделать это на примере задачи 1. Мне известно еще только одно элементарное решение этой задачи. Цитирую его дословно по [9]:

«Добавим к правой части неравенства выражение

$$(x+y+z)^2-2(x+y+z),$$

равное нулю (а что бы прибавили Вы, читатель?). Тогда после несложных преобразований, получим

$$(xy-z+1)^2+(yz-x+1)^2+(zx-y+1)^2\ge 0.»$$

На ехидный вопрос автора этого решения я не смог ответить, что и привело меня к разработке собственного метода. Я не умею отвечать на этот вопрос и сейчас. Да и относительно «несложности» преобразований есть кое-какие сомнения. В обратную сторону преобразования выполнить действительно несложно. А вот выделение квадратов обычно требует известной изобретательности.

Данная задача в принципе может быть решена стандартным методом введения множителей Лагранжа. Но при этом получается довольно сложная система уравнений, которую еще тоже нужно суметь решить. Да и с вопросом существования точки экстремума в данном случае пришлось бы повозиться.

Впрочем, данная задача не совсем показательна. Большинство других задач имеют другие достаточно естественные и простые решения. Когда удается придумать какую-нибудь хитрость, эти решения бывают даже проще решения нашим методом. Но на удивление часто предложенный выше метод приводит к самому простому решению, несмотря на то, что мы имеем дело с достаточно универсальным алгоритмом.

Предложенный метод может быть обобщен сразу в нескольких направлениях. Например, можно рассматривать задачи с большим числом переменных. При этом появляются новые качественные особенности. А можно рассмотреть преобразования графика, отличные от параллельного переноса, что заметно расширяет круг решаемых задач. Но обсуждение этих обобщений приходится отложить до другого раза.

10. Указания

1. Рассмотрим квадратные трехчлены $f(t)=(t-(a+b))(t-(c+d))$, $g(t)=(t-(a+c))(t-(b+d))$ и $h(t)=(t-(a+d))(t-(b+c))$. Разность любых двух из них – константа. Поэтому график одного получается из графика другого параллельным переносом. Так как меньший корень $f(t)$ меньше обоих корней $g(t)$, график $g(t)$ лежит выше, значит, $y>x$. А так как $a+c<a+d$ и $a+c<b+c$, то же относится и к многочленам $g(t)$ и $h(t)$. Поэтому $z>y$.

2. Используя тождество $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$ или $(a-b)^2=4A^2-4B^2$, перепишем неравенство в виде $B<\dfrac{4A^2-4B^2}{8(A-B)}<A$. Теперь о переменных a и b можно забыть, считая A и B независимыми переменными, связанными лишь соотношением $A>B$ (параболу нельзя сдвинуть слишком высоко). После сокращения получим очевидные неравенства $2B<A+B<2A$.

3. Переписав неравенство в виде $(a+b)^2-ab\geq 3(a+b-1)$ заметим, что при постоянной сумме $a+b$ правая часть неравенства остается неизменной, а левая уменьшается с увеличением произведения ab. Поэтому, сдвигая график квадратного трехчлена $f(t)=(t-a)(t-b)$ вверх, мы будем усиливать неравенство. Самое сильное получится, когда парабола зацепится вершиной за ось абсцисс, то есть при $a=b$. В этом случае получим неравенство $3a^2\geq 6a-3$ или $3(a-1)^2\geq 0$.

4. Если корни многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)$ лежат на отрезке $[1,2]$, то абсцисса вершины его графика лежит на том же отрезке. Если мы будем сдвигать этот график вверх, то правая часть неравенства будет возрастать, а корни – приближаться к вершине (поэтому условие задачи будет оставаться выполненным). Следовательно, неравенство

достаточно доказать для случая, когда $x=y$. В этом случае имеем неравенство $2x^2-6x+4\le 0$, которое выполняется, так как квадратный трехчлен $2x^2-6x+4$ имеет корни 1 и 2.

5. Докажем, что $HQ\le AG$. Очевидными преобразованиями неравенство приводится к виду

$$\sqrt{ab\left(2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab\right)}\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Двигая график квадратного трехчлена $f(t)=(t-a)(t-b)$, мы можем, не меняя значения $a+b$, менять значение произведения ab в пределах от 0 до $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Парабола $g(t)=t\left(2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-t\right)$ имеет вершину в точке $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, поэтому многочлен $g(t)$ достигает наибольшего значения при $t=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Следовательно, левая часть нашего неравенства достигает наибольшего значения при $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Но в этом случае $a=b$ и доказываемое неравенство обращается в равенство.

6. Перепишем доказываемое неравенство в виде $\frac{(a+b)^2-2ab}{(c+d)^2-2cd}<8$. Мы можем усилить это неравенство, не нарушив условия, если сдвинем график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)$ вниз. Вниз этот график можно сдвигать до тех пор, пока одно из чисел не станет равным нулю. В этом случае значение числителя будет равно $(a+b)^2$. Поэтому достаточно доказать неравенство $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2-2cd}<8$.

Это неравенство тоже можно усилить, сдвигая график многочлена $g(t)=(t-c)(t-d)$ вверх. А вверх его можно сдвигать до тех пор, пока он не зацепится вершиной за ось абсцисс. В этом случае числа c и d станут равными, а знаменатель будет равен $(c+d)^2/2$. Поэтому достаточно доказать неравенство $\frac{2(a+b)^2}{(c+d)^2}<8$. Это уже получается возведением данного неравенства в квадрат и умножением полученного неравенства на 2.

7. Если мы избавимся от знаменателей и соберем все члены в одну сторону, мы получим неравенство вида $F(a,b)\geq 0$, где F – симметрический многочлен второй степени. В его разложение через элементарные симметрические многочлены произведение ab входит в степени, не превышающей 1. Поэтому наименьшее значение этого многочлена при *неотрицательных* значениях переменных достигается в одном из двух случаев: либо если одна из переменных равна нулю, либо если значения переменных равны. А поскольку полученное неравенство равносильно исходному, достаточно проверить исходное неравенство в этих двух случаях, а это не составляет труда.

8. Мы имеем дело с симметричным неравенством второй степени, поэтому элементарный симметрический многочлен xy входит в его левую часть линейно. Следовательно, чтобы эта левая часть стала максимальной, мы должны сдвинуть соответствующую параболу «до упора». А «упереться» мы можем в трех случаях: если числа x и y станут равными, если одно из них станет равным 3 и если одно из них станет равным 2. В первом и втором случаях получим очевидное неравенство $2(3-x)^2\leq 2$. В третьем случае получим неравенство $(2-x)^2+(3-x)^2\leq 2$. График многочлена, стоящего в левой части – это парабола «рогами вверх», а потому его левая часть достигает наибольшего значения на конце отрезка, когда она равна 1.

9. Неравенство легко переписать в виде

$$3(ab)^2-4ab(a+b)+6ab-1<0.$$

Максимум на отрезке квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом достигается только на конце этого отрезка. Поэтому неравенство достаточно доказать для трех случаев: $b=0$, $b=1$ или $a=b$. В первых двух случаях исходное неравенство очевидно. При $a=b$ получим неравенство $\frac{a^2(1-a)^2}{(1-a^2)^2}\le\frac{1}{4}$ или $\frac{a^2}{(1+a)^2}\le\frac{1}{4}$, что тоже легко доказывается.

10. Возведя неравенство в квадрат, получим $2c\sqrt{(a-c)(b-c)}\le ab+2c^2-c(a+b)$. Еще раз возведя в квадрат, придем к неравенству

$$(ab)^2-2c(a+b)ab+(2c^2-c(a+b))^2+4c^3(a+b)-4c^4\ge 0.$$

Выделим полный квадрат

$$(ab-c(a+b))^2+[(2c^2-c(a+b))^2+4c^3(a+b)-4c^4-c^2(a+b)^2]\ge 0.$$

Если мы будем двигать график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)$ вверх или вниз, то выражение в квадратных скобках меняться не будет, а потому наименьшее значение левой части неравенства будет достигаться, если $ab=c(a+b)$. Помешать этому могут два обстоятельства: парабола «зацепится» вершиной за ось абсцисс или одно из чисел a или b станет равным c. Поэтому неравенство достаточно доказать для трех случаев: $a=b$, $b=c$ или $ab=c(a+b)$. В первом случае получим $2\sqrt{c(a-c)}\le a$, что после возведения в квадрат приведется к виду $a^2-4ac+4c^2\ge 0$ или $(a-2c)^2\ge 0$. Во втором случае получим очевидное неравенство $\sqrt{b(a-b)}\le\sqrt{ab}$. В третьем, полагая $c=\frac{ab}{a+b}$, получим

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b}\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)}+\sqrt{\frac{ab}{a+b}\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)}=\frac{a}{a+b}\sqrt{ab}+\frac{b}{a+b}\sqrt{ab}=\sqrt{ab},$$

то есть доказываемое неравенство обратится в равенство.

11. После несложных преобразований неравенство приводится к виду $(ab)^2-17(a+b)^2ab/4+(a+b)^4\ge 0$. Мы можем, не меняя суммы $a+b$, менять значение произведения ab на интервале $[0,(a+b)^2/4]$. График квадратного трехчлена $F(t)=t^2-17(a+b)^2t/4+(a+b)^4$ имеет вершину в точке $t=17(a+b)^2/8>(a+b)^2/4$. Поэтому на указанном интервале этот квадратный трехчлен монотонно убывает, и, значит, имеет наименьшее значение на правом конце. А правый конец соответствует случаю $ab=(a+b)/4$, или $a=b$. В этом случае неравенство очевидно.

12. Очевидными преобразованиями выражение приводится к виду $1-3xy+\dfrac{1}{1-2xy}$, причем произведение может меняться на интервале $(-\infty,1/4]$. Остается найти минимум функции $1-3t+\dfrac{1}{1-2t}$ на указанном интервале, а это уже вопрос техники.

13. Решим сразу пункт б). Пусть a,b,c – катеты и гипотенуза треугольника, $S=ab/2$ – его площадь. Тогда радиус вписанной окружности равен

$$r=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{a+b+\sqrt{(a+b)^2-2ab}}.$$

По теореме Пифагора квадраты медиан, проведенных к катетам равны $a^2+b^2/4$ и $b^2+a^2/4$. Следовательно, искомое отношение равно $\dfrac{4(ab)^2}{5\left(a+b+\sqrt{(a+b)^2-2ab}\right)^2\left((a+b)^2-2ab\right)}$. Очевидно, что при неизменной сумме $a+b$ числитель растет с ростом произведения ab, а знаменатель убывает с ростом этого произведения. Следовательно, максимум отношения достигается, когда произведение максимально, то есть при $a=b$. В этом случае оно равно $\dfrac{2}{10+5\sqrt{2}}$.

14. Обозначим $x+y+z=a,\ xy+yz+zx=b$. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-x)(t-y)(t-x)=t^3-at^2+bt-ab=(t-a)(t^2+b)$. Один из его корней равен a, а два других – $\pm\sqrt{-b}$. Отсюда и следует утверждение задачи

15. Пусть $x+y+z=a$. Рассмотрим многочлен

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-x)=t^3-at^2+at-1.$$

Очевидно, $f(1)=0$, откуда и следует утверждение задачи.

16. Пусть одночлены $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ и $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ имеют одинаковый вес. Тогда

$$m_1q^{n-1}+m_2q^{n-2}+\ldots+m_{n-1}q+m_n=l_1q^{n-1}+l_2q^{n-2}+\ldots+l_{n-1}q+l_n.$$

Пусть k – наименьший индекс, для которого $m_k\neq l_k$. Не ограничивая общности, можно считать, что $m_k>l_k$. Тогда

$$(m_k-l_k)q^{n-k}=(l_{k+1}-m_{k+1})q^{n-k-1}+\ldots+(l_{n-1}-m_{n-1})q+(l_n-m_n).$$

Но так как m_k и l_k – целые числа, выполняется неравенство

$$(m_k-l_k)q^{n-k}\geq q^{n-k}.$$

А так как $l_{k+1}-m_{k+1}\leq q-1,\ldots,l_{n-1}-m_{n-1}\leq q-1$, $l_n-m_n\leq q-1$, то имеем

$$(l_{k+1}-m_{k+1})q^{n-k-1}+\ldots+(l_{n-1}-m_{n-1})q+(l_n-m_n)\leq$$
$$\leq(q-1)(q^{n-k-1}+\ldots+q+1)=q^{n-k}-1<q^{n-k}.$$

Получили противоречие.

17. Рассмотрим сначала два одночлена $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ и $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$. Вес первого из них равен $m_1q^{n-1}+m_2q^{n-2}+\ldots+m_{n-1}q+m_n$, а вес второго равен $l_1q^{n-1}+l_2q^{n-2}+\ldots+l_{n-1}q+l_n$. Их произведение $ABx_1^{m_1+l_1}x_2^{m_2+l_2}\ldots x_n^{m_n+l_n}$ имеет вес

$$(m_1+l_1)q^{n-1}+(l_2+m_2)q^{n-2}+\ldots+(l_{n-1}+m_{n-1})q+(l_n+m_n),$$

очевидно, равный сумме весов сомножителей.

Рассмотрим теперь два любых многочлена $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Пусть $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ – одночлен максимального веса, входящий в многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$ – одночлен максимального веса, входящий в $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Их произведение $ABx_1^{m_1+l_1}x_2^{m_2+l_2}\ldots x_n^{m_n+l_n}$ входит в многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, причем вес этого одночлена равен сумме весов многочленов $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Любой другой одночлен, входящий в произведение $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ получается в результате умножения некоторого одночлена $Cx_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$, входящего в многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, и какого-то одночлена $Dx_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_n^{j_n}$, входящего в $G(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Но вес первого из них не превосходит веса $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$, а вес второго не больше веса $Bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n}$, следовательно, и вес произведения меньше или равен весу $ABx_1^{m_1+l_1}x_2^{m_2+l_2}\ldots x_n^{m_n+l_n}$.

18. Допустим противное. Тогда найдется такой индекс i, что $m_i<m_{i+1}$. Так как многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ симметрический, то одночлен $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_{i-1}^{m_{i-1}}x_i^{m_{i+1}}x_{i+1}^{m_i}x_{i+2}^{m_{i+2}}\ldots x_n^{m_n}$ тоже входит в многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Разность весов этих одночленов

$$m_iq^{n-i}+m_{i+1}q^{n-i-1}-m_{i+1}q^{n-i}-m_iq^{n-i-1}=q^{n-i-1}(m_i-m_{i+1})(q-1)$$

отрицательна, что противоречит максимальности веса одночлена $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}$.

19. Очевидно x_1, $x_1x_2,\ldots,x_1x_2\ldots x_{n-1}$, $x_1x_2,\ldots,x_n$ – одночлены максимального веса, входящие в многочлены $p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots$, $p_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ соответственно. Произведение $A(x_1)^{m_1-m_2}(x_1x_2)^{m_2-m_3}...(x_1x_2...x_{n-1})^{m_{n-1}-m_n}(x_1x_2...x_n)^{m_n}$ в точности равно $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}$. Веса всех других одночленов, входящих в произведение

$$A(p_1(x_1,x_2,...,x_n))^{m_1-m_2}(p_2(x_1,x_2,...,x_n))^{m_2-m_3}...$$
$$...(p_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n))^{m_{n-1}-m_n}(p_n(x_1,x_2,...,x_n))^{m_n}$$

меньше веса $Ax_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}$ в силу результата упражнения 17.

20. Число q выбрано очень большим, поэтому, рассуждая, как в решении упражнения 16, можно убедиться, что значением s однозначно определяются числа $m_1+m_2+\ldots+m_n$, $m_2+m_3+\ldots+m_m,\ldots,m_n$. А зная эти числа, легко найти числа $m_1,m_2,\ldots,m_n$.

21. Если мы выберем из выражения для p_1 слагаемое x_1, из выражения для p_2 – слагаемое $x_1x_2,\ldots$, из выражения для p_n – слагаемое $x_1x_2\ldots x_n$, то в произведении получим искомый одночлен. Поскольку последовательности $m_1+m_2+\ldots+m_n,m_2+m_3+\ldots+m_m,\ldots,m_n$ и $q^{n-1},q^{n-2},\ldots,1$ убывают, максимальность веса рассматриваемого одночлена и его единственность следуют из хорошо известного перестановочного неравенства (см., например, [2]).

22. Как в решении предыдущего упражнения, показывается, что все одночлены в многочлене $Bp_1^{l_1}p_2^{l_2}...p_n^{l_n}$ (выраженном через $x_1,x_2,\ldots,x_n$) имеют вес не больший, чем

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)q^{n-1}+(m_2+m_3+\ldots+m_m)q^{n-2}+m_n,$$

что меньше s.

23. После умножения на наименьший общий знаменатель получится симметрическое неравенство второй степени. После разложения по элементарным симметрическим многочленам мы получим выражение, в которое произведение ab входит в первой степени. Двигая график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)$, мы можем менять ab, не меняя суммы $a+b$. А поскольку линейная функция достигает своего

максимума на отрезке в одном из его концов, неравенство достаточно доказать для случая, когда параболу сдвигать дальше уже не получается. Препятствием может быть одно из следующих обстоятельств: числа a и b совпадают, одно из этих чисел равно нулю или одно из них равно единице. Во всех трех случаях получаем простые неравенства с одной переменной.

24. Прежде всего заметим, что условие $a \leq b$ можно опустить. После возведения в квадрат, получим симметричное неравенство четвертой степени. Но нетрудно смекнуть, что и в левой, и в правой частях будет по одному члену четвертой степени, а именно $4a^2b^2$. Сократив их, получим симметричное неравенство третьей степени, равносильное исходному. Но в разложение неравенства третьей степени по элементарным симметрическим многочленам произведение ab может входить только в первой степени. Поэтому исходное неравенство достаточно доказать в трех случаях: при $a=b$, при $b=0$ и при $b=1$. Во всех случаях задача сводится к исследованию знака квадратичной функции от одной переменной на отрезке [0,1].

25. Перепишем неравенство в виде

$$2a^2b^2+ab(a+b)-ab(a^2+b^2)-(a^3+b^3)\leq 0.$$

Отсюда уже видно, что выражение левой части этого неравенства через элементарные симметрические многочлены содержит член a^2b^2 с положительным коэффициентом. Но квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом может достигать наибольшего значения на отрезке только в одном из его концов. Концы отрезка, на котором может меняться произведение ab, определяются условиями $a=b$ и $b=0$. В обоих случаях неравенство очевидно.

26. Доказываемое неравенство имеет третью степень. Поэтому, если перенести все его члены в левую часть и разложить получившийся симметрический многочлен через элементарные симметрические многочлены, то произведение abc будет входить в полученное выражение в степени не выше, чем первая. Двигая график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$, мы можем менять значение этого произведения, не меняя значений двух других элементарных симметрических многочленов. Этому движению может помешать либо обращение одного из корней многочлена в ноль, либо экстремум многочлена. Но линейная функция всегда достигает минимума на одном из

концов отрезка, поэтому наше неравенство достаточно доказать для двух случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда, по крайней мере, два из трех чисел совпадают. В первом случае, не ограничивая общности, можем считать, что $c=0$, и тогда получим неравенство $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$, которое после сокращения на $a+b$ и приведения подобных членов станет очевидным. Во втором случае можем считать, что $b=c$. Тогда наше неравенство превратится в неравенство $4(a^3+2b^3+6ab^2)\geq(a+2b)^3$. После естественных преобразований это неравенство сведется к виду $3a(a^2-2ab+4b^2)\geq0$ или после выделения квадрата $3a((a-b)^2+3b^2)\geq0$. Последнее неравенство уже очевидно.

27. Как видно из решения предыдущей задачи, равенство в доказанном неравенстве достигается только тогда, когда одна из переменных обращается в ноль. Это равенство не нарушится, если мы увеличим коэффициент при abc. Накопленный опыт подсказывает, что «хорошее» неравенство должно обращаться в равенство, когда значения всех переменных равны. А тогда коэффициент при abc должен быть равен 15. Таким образом, приходим к гипотезе, что при всех неотрицательных значениях a, b, c выполняется неравенство $4(a^3+b^3+c^3)+15abc\geq(a+b+c)^3$. Остается ее проверить. Рассуждая, как в предыдущем решении, убеждаемся, что неравенство достаточно проверить в двух случаях: когда одна из переменных обращается в ноль и когда две из трех переменных равны. Первый случай уже рассмотрен при решении предыдущей задачи. При $b=c$ придем к неравенству $4(a^3+2b^3)+15ab^2\geq(a+2b)^3$ или $3a^3-6a^2b+3ab^2\geq0$. Левая часть легко раскладывается на множители $3a(a-b)^2\geq0$. Это уже очевидно. Интересно отметить, что при доказательстве неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел точное неравенство получилось в случае $b=c$, в предыдущей задаче точное неравенство получилось в случае $c=0$, а в данной задаче точные неравенства получаются в обоих случаях.

28. Схема, примененная при решении предыдущей задачи, без затруднений проходит и в данном случае.

29. Разность левой и правой частей неравенства представляет собой симметрический многочлен четвертой степени. Согласно теореме об элементарных симметрических многочленах он может быть записан в виде

$$\alpha(x+y+z)^4+\beta(x+y+x)^2(xy+yx+xz)+\gamma(xy+yz+xz)^2+\delta(x+y+z)xyz.$$

Произведение xyz входит в это выражение линейно, поэтому, сдвигая график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ вверх, если δ положительно, или вниз, если δ отрицательно, мы будем усиливать неравенство. Самое сильное из таких неравенств получится, когда два из трех чисел совпадут. Его и достаточно доказать. В силу симметрии можно считать, что $z=y$. В таком случае неравенство приведется к виду $2x^2y^2+y^4\geq xy^2(x+2y)$ или $y^2(x-y)^2\geq 0$. Это уже очевидно.

30. В силу неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим трех чисел xy, yz, xz доказываемое неравенство сильнее неравенства предыдущей задачи, а доказывается оно даже проще. Мы уже имеем разложение по элементарным симметрическим многочленам. Из него видно, что сдвигая график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ вниз мы только усилим неравенство. Сдвигать можно до тех пор, пока график не зацепится точкой локального максимума за ось абсцисс. В этом случае два из трех чисел станут равными. Но при $z=y$ неравенство примет вид $(2xy+y^2)^2\geq 3xy^2(x+2y)$ или $y^2(x-y)^2\geq 0$.

31. При доказательстве левого неравенства можно рассмотреть два случая: $c=0$ и $b=c$. В первом случае неравенство очевидно, а во втором имеем по условию $a=1-2b$ и после очевидных преобразований неравенство сводится к квадратному неравенству $4b^2-5b+2\geq 0$ с отрицательным дискриминантом. При доказательстве правого неравенства достаточно рассмотреть случай $b=c$ и $a=1-2b$. Тогда неравенство приводится к виду $\left(4b-\frac{7}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)^2\leq 0$. Последнее справедливо, так как из условия легко следует, что $2b=b+c\leq a+b+c=1$.

32. С учетом условия данное неравенство эквивалентно неравенству $(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)\geq 8(b+c)(a+c)(a+b)$. Докажем, что оно справедливо при *всех* неотрицательных a, b и c. Поскольку это – симметрическое неравенство третьей степени, его достаточно доказать в случаях $c=0$ и $c=b$. В первом случае неравенство приводится к виду $(a+b)(2a^2-3ab+2b^2)\geq 0$, а во втором – к виду $2(a+b)(a-b)^2\geq 0$. Оба неравенства очевидны.

33. Докажем, что неравенство

$$64(ab+bc+ac)^3\le 27[(b+c)(c+a)(a+b)]^2$$

выполняется при *всех* действительных a,b,c. Сдвигая график кубического многочлена с корнями a,b,c, мы можем менять правую часть этого неравенства, не меняя левой. В квадратных скобках стоит многочлен третьей степени, поэтому в ее разложение по элементарным симметрическим многочленам произведение abc входит в первой степени. Значит, неравенство достаточно доказать в случае, когда два из трех чисел a,b,c равны. При $b=c$ неравенство приводится к виду

$$4b^2(27a^4-20a^3b-30a^2b^2+12ab^3+11b^4)\ge 0,$$

или $(27a^2+34ab+11b^2)(a-b)^2\ge 0$. Дискриминант квадратного трехчлена $27t^2+34t+11$ равен -32, поэтому последнее неравенство действительно справедливо.

34. Сдвигая вниз график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$, мы будем увеличивать подкоренное выражение, не меняя других частей неравенства. Самое сильное неравенство получится, когда меньшие корни многочлена будут совпадать. Если $c=b$, то неравенство запишется в виде $2\sqrt{3ab}+a^2+2b^2\le 1$, а условие примет вид $a+2b=1$. Подставляя в неравенство $a=1-2b$, получим после очевидных упрощений $\sqrt{3(1-2b)}\le 2-3b$. Возводя в квадрат и раскладывая на множители, получим $(1-3b)^2\ge 0$.

35. Докажем, что для *неотрицательных* a,b,c выполняется неравенство $abc(a+b+c)\le a^4+b^4+c^4$. Неравенство имеет уже четвертую степень, но схема рассуждений предыдущих задач проходит без изменений. Случай $c=0$ очевиден. В случае $b=c$ имеем неравенство

$$a^4-a^2b^2-2ab^3+2b^4=a^2(a-b)(a+b)-2b^3(a-b)=(a-b)(a^3+a^2b-2b^3)=$$
$$=(a-b)(a^3-b^3+a^2b-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2+ab+b^2)=(a-b)^2(a^2+2ab+2b^2)\ge 0.$$

36. Если мы избавимся от знаменателей и соберем все члены в левой части, мы получим неравенство вида $F(a,b,c)\le 0$, где F – симметрический многочлен третьей степени. Его достаточно доказать для двух частных случаев: когда два из трех чисел равны и когда одно из них равно нулю. Значит, для тех же частных случаев достаточно доказать и исходное неравенство. В обоих случаях соответствующее неравенство *второй* степени проверяется без труда.

37. Левое неравенство – простое: из неравенства $a^2+1\geq 2a$ следует, что $\frac{a}{1+a^2}\leq\frac{1}{2}$, откуда получается нужный результат.

Докажем правое неравенство. Поскольку его правая часть уменьшается с ростом a, его достаточно доказать при условии $a+b+c=3$. Тогда неравенство перепишется в виде

$$\frac{1}{4a+b+c}+\frac{1}{a+4b+c}+\frac{1}{a+b+4c}\geq\frac{1}{2}.$$

Это неравенство достаточно доказать в двух случаях $c=0$ и $c=b$.

В первом случае получим неравенство

$$\frac{1}{4a+b}+\frac{1}{a+4b}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{1}{2},$$

которое опять достаточно доказать для двух случаев $b=0$ (и, следовательно, $a=3$) и $a=b=3/2$. В обоих случаях неравенство очевидно.

Во втором случае неравенство переписывается в виде

$$\frac{1}{4a+2b}+\frac{2}{a+5b}\geq\frac{3}{2(a+2b)},$$

что простыми преобразованиями приводится к виду $(a-b)^2\geq 0$.

38. Будем считать, что треугольник задан, а положение точки M может меняться. Тогда высоты треугольника будут параметрами задачи, а расстояния d_a,d_b,d_c – переменными. Пусть a,b,c – стороны треугольника, а S – его площадь. Сумма площадей треугольников AMB, AMC и BMC равна площади исходного треугольника, поэтому переменные связаны ограничением $ad_a+bd_b+cd_c=2S$. Умножив доказываемое неравенство на abc, получим эквивалентное неравенство $(2S-ad_a)(2S-bd_b)(2S-cd_c)\geq 8(ad_a)(bd_b)(cd_c)$. И ограничение, и последнее неравенство, вообще говоря, не симметричны. Однако почти очевидная замена переменных $x=ad_a$, $y=bd_b$, $z=cd_c$ делает задачу симметричной: доказать, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x+y+z=2S$, выполняется неравенство

$$(2S-x)(2S-y)(2S-z)\geq 8xyz.$$

Докажем, что неравенство $(x+y)(y+z)(x+z)\geq 8xyz$ выполняется при всех неотрицательных xyz. Неравенство имеет третью степень, поэтому элементарный симметрический многочлен xyz входит в разложение разности левой и правой частей по элементарным симметрическим многочленам в степени, не превосходящей первую. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда по крайней мере два из трех чисел равны. В первом случае неравенство очевидно. В случае $y=z$ оно легко приводится к виду $2y(x-y)^2\geq 0$.

39. Решение предыдущей задачи проходит с минимальными изменениями.

40. Мы имеем дело с симметричным неравенством четвертой степени. Произведение abc входит в его левую часть в первой степени, а максимум линейной функции достигается на конце отрезка. Поэтому неравенство достаточно доказать для трех частных случаев: когда одно из чисел обращается в ноль, когда одно из чисел равно единице и когда два из трех чисел совпадают.

При $c=0$ получаем неравенство $3a^2b^2\leq 3$, которое непосредственно следует из условий $a\leq 1$ и $b\leq 1$.

При $c=1$ получим неравенство $3a^2b^2+3(a+b)^2-2ab(a+b)-8ab\leq 3$. Это – симметрическое неравенство от двух переменных, представляющее собой квадратный трехчлен относительно ab с положительным старшим коэффициентом. Такой квадратный трехчлен достигает максимума на отрезке непременно в одном из его концов. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда одно из чисел равно нулю, когда числа равны, или когда одно число равно 1. Первый случай уже рассмотрен. Во втором получим неравенство $3a^4-4a^3+4a^2\leq 3$, или $(a-1)(3a^3-a^2+3a+3)\leq 0$ которое непосредственно следует из условий $0\leq a\leq 1$. В третьем случае $b=1$ получим неравенство $4a(a-1)\leq 0$.

А при $c=b$ придем к неравенству $b^2(4a^2-4ab+3b^2)\leq 3$. Относительно a это квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Такой многочлен может достигать максимума на отрезке только в одном из его концов, и опять приходим к уже рассмотренному случаю.

41. После умножения на произведение знаменателей неравенство сведется к симметрическому неравенству четвертой степени. Его (а, значит, и исходное неравенство) достаточно доказать для двух случаев: когда два из трех чисел равны и когда одно число равно нулю. В первом случае можно считать, что $c=b$, и тогда получается

неравенство 2 $(a+2b)(a-b)^2 \geq 0$, а во втором можно положить $c=0$ и тогда придем к неравенству $(a+b)(2a^2-3ab+2b^2)\geq 0$.

42. После умножения на общий знаменатель получим однородное симметрическое неравенство третьей степени. Элементарный симметрический многочлен abc может входить в него только линейно, поэтому неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел a,b,c равны, и когда одно из этих чисел равно нулю. В первом случае доказываемое неравенство после очевидных упрощений приводится к виду $\dfrac{a^2}{(a+b)^2}+\dfrac{b}{a+b}\geq\dfrac{3}{4}$, что после умножения на $4(a+b)^2$ и упрощения приведется к виду $a^2-2ab+b^2\geq 0$, а во втором случае получается неравенство $1\geq 3/4$.

43. Преобразуем левую часть неравенства:

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(abc)^{4/3}=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+3(abc)^{4/3}=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2-4(ab+ac+bc)^2+8(a+b+c)abc+3(abc)^{4/3}.$$

Теперь очевидно, что зависимость левой части от abc монотонна, а поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда два из трех чисел равны между собой, и когда одно из чисел равно нулю. В случае $b=c$ неравенство приведется к виду $a^4-4a^2b^2+3(ab^2)^{4/3}\geq 0$. Разделив его на b^4 и обозначив $t=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2/3}$, придем к неравенству $t^2(t^4-4t+3)\geq 0$. Имеем

$$t^4-4t+3=t^4-t-3(t-1)=(t-1)(t^3+t^2+t-3)=(t-1)((t^3-1)+(t^2-1)+(t-1))=$$
$$=(t-1)^2(t^2+2t+3).$$

Последнее выражение очевидно неотрицательно. Второй случай рассматривается легко.

44. Если умножим неравенства на abc, то во всех тех частях получим однородные симметрические многочлены третьей степени. Поэтому неравенства достаточно доказать для двух частных случаев: когда среди чисел a,b,c есть равные, или когда одно из этих чисел равно нулю. Если $b=c$, левое неравенство приводится к виду

$$a+b\le\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{a^3+b^3}{ab},$$

или, после сокращения $1\le\frac{a^2-ab+b^2}{ab}$. Это неравенство легко приводится к виду $(a–b)^2\ge0$. Справа в этом случае получим $\frac{a^2+b^2}{b}\le\frac{a^4+b^4}{ab^2}$ или после очевидных преобразований

$$0\le a^4–a^3b–ab^3+b^4=a^3(a–b)–b^3(a–b)=(a–b)(a^3–b^3)=(a–b)^2(a^2+ab+b^2),$$

что уже проверяется без труда. В случае $c=0$ левое неравенство очевидно, а правое приводится к виду $\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}$, что слабее только что доказанного неравенства.

45. Покажем, что при условии $a+b+c=1$, выполняется неравенство $(1–a)(1–b)(1–c)>abc$. Для этого достаточно рассмотреть случаи $a=b$, $c=1–2a$, и $c=0$. В первом случае его проверка сводится к решению квадратичного неравенства, а во втором оно очевидно.

46. Схема рассуждений стандартна. В случае $c=0$ получаем

$$a^2(b–a)+b^2(a–b)=–(a+b)(a–b)^2\le0.$$

В случае $b=c$ имеем $–a^3+2a^2b+ 2ab^2\le3ab^2$, или $–a(a^2–2ab+b^2)\le0$.

47. Докажем даже несколько больше, а именно, что указанное неравенство выполняется для произвольных неотрицательных чисел a,b,c, удовлетворяющих неравенствам $a+b\ge c$, $a+c\ge b$, $b+c\ge a$. Схема предыдущих рассуждений сохраняется с тем отличием, что границы области значений произведения abc задаются условиями двух типов: либо одно из трех последних неравенств обращается в равенство, либо два из трех чисел совпадают. В случае $a=b+c$ неравенство легко приводится к виду $b^2c+bc^2\ge0$. В случае $b=c$ получаем

$$a^3–2a^2b+ab^2=a(a^2–2ab+b^2)\ge0.$$

48. Выразив косинусы углов через стороны треугольника с помощью теоремы косинусов, получим неравенство из предыдущей задачи.

49. Воспользовавшись теоремой косинусов, приведем неравенство к виду $(A+B–C)(A+C–B)(B+C–A)\le ABC$, где A,B,C – квадраты длин сторон треугольника. Проще доказать, что последнее неравен-

ство справедливо для всех неотрицательных чисел A,B,C. Тогда достаточно рассмотреть случаи, когда два из трех чисел равны и когда одно из чисел равно нулю. В обоих случаях неравенство проверяется легко.

50. Площадь треугольника, составленного из медиан, составляет ¾ площади исходного треугольника, а радиус описанной окружности R связан с площадью S и длинами сторон a,b,c треугольника формулой $abc=4RS$. Поэтому доказываемое неравенство сводится к виду $8m_am_bm_c\geq 5abc$, где m_a,m_b,m_c – длины медиан треугольника. Используя равенство $m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$ и два аналогичных, запишем это неравенство в виде

$$(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2)\geq 25a^2b^2c^2.$$

Введя новые переменные $u=a^2, v=b^2$, $w=c^2$, приведем неравенство к виду $(2u+2v-w)(2u+2w-v)(2v+2w-u)\geq 25uvw$. Для *нетупоугольного* треугольника выполняются неравенства $u+v\geq w$, $u+w\geq v$, $v+w\geq u$. Поскольку неравенство имеет третью степень, очевидно, что его достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из последних трех неравенств обращается в равенство и когда значения каких-то двух из трех переменных равны. В случае $w=u+v$ неравенство легко приводится к виду $4(u+v)(u^2+v^2-2uv)\geq 0$, что очевидно справедливо, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u=v$. В случае $v=w$ получается неравенство $4v^3+12u^2v-10uv^2-4u^3\geq 0$, причем из рассмотрения предыдущего случая мы знаем, что при $u=2v$ имеет место равенство. Это позволяет нам привести неравенство к виду $2(u-2v)(v^2-2uv+2u^2)\geq 0$ или $2(u-2v)((v-u)^2+u^2)\geq 0$, что уже очевидно, причем равенство достигается при $u=2v$ либо при $u=0$. Поскольку равенство достигается только для вырожденных и прямоугольных треугольников, для остроугольных треугольников имеет место строгое неравенство.

51. Рассуждения стандартны. В случае $b=c$ приходим к неравенству $a(a-3b)\leq 0$, которое справедливо в силу неравенства треугольника, а в случае $c=a+b$, получается очевидное неравенство $0\leq ab$.

52. Схема рассуждений стандарта. В случае $c=0$ имеем $ab(a+b)(a-b)^2\geq 0$. В случае $b=c$ после очевидных упрощений неравенство сводится к виду $(a-b)^2\geq 0$.

53. Умножив неравенство на $abc(1+48abc)$, перепишем его в виде $(1+48abc)(ab+bc+ac)\geq 25abc$. Докажем, что это неравенство выполняется при всех неотрицательных значений переменных. Произведение abc входит в него линейно, поэтому неравенство достаточно доказать для случаев, когда одна из переменных равна нулю и когда две из трех переменных равны. В первом случае неравенство очевидно. А при $b=c$ получим неравенство $(1+48ab^2)b(2a+b)\geq 25ab^2$. В силу равенства $a+2b=1$, последнее неравенство можно переписать в виде $((a+2b)^3+48ab^2)b(2a+b)-25ab^2(a+2b)^2\geq 0$. А это неравенство эквивалентно $2b(a-2b)^2(a-b)^2\geq 0$.

54. Избавляясь от знаменателя и перенося всё в левую часть, получим неравенство

$$9\{(a+b)(a+c)(b+c)\}^2-4(ab+bc+ac)[(a+b)^2(a+c)^2+$$
$$+(a+b)^2(b+c)^2+(a+c)^2(b+c)^2]\leq 0.$$

Докажем, что это неравенство выполняется для всех неотрицательных значений a,b,c. Из последнего выражения видно, что во второе слагаемое abc входит линейно, так как может появиться только в квадратной скобке, а там стоит многочлен четвертой степени. Следовательно, при разложении левой части неравенства по элементарным симметрическим многочленам, слагаемое с $(abc)^2$ может появиться только после возведения в квадрат фигурной скобки, а, значит, $(abc)^2$ войдет в левую часть с неотрицательным коэффициентом. Квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом достигает своего наибольшего значения на любом отрезке, причем непременно в одном из концов этого отрезка. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда два из трех чисел равны между собой. В случае $c=0$ неравенство приводится к виду $ab(4a^2+7ab+4b^2)(a-b)^2/4\geq 0$, а в случае $b=c$ – к виду $2ab(a-b)^2(a+b)^2\geq 0$.

55. Обозначим $a+b+c=p$ и перепишем неравенство в виде

$$((p-c)(p-a)(p-b))^2\geq abc(p+a)(p+b)(p+c)$$

или

$$(p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc)^2 \geq$$
$$\geq abc(p^3 + p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) + abc).$$

Теперь видно, что после раскрытия скобок члены $(abc)^2$ сократятся и получится неравенство, содержащее элементарный симметрический многочлен abc только в первой степени. Поэтому неравенство достаточно доказать в двух случаях: $c=0$ и $c=b$ В первом случае неравенство очевидно. Во втором неравенство приводится к виду $2b^2(a+b)(a+2b)(a-b)^2 \geq 0$.

56. Левая часть неравенства не зависит от элементарного симметрического многочлена abc, а в правую он входит линейно. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда два из трех чисел a,b,c равны между собой и когда одно из этих чисел равно нулю. В случае $b=c$ после возведения в квадрат и разложения на множители неравенство приводится к виду

$$3(a-b)^2(27a^4+216a^3b+630a^2b^2+784ab^3+359b^4) \geq 0,$$

что, очевидно, справедливо. В случае $c=0$ получим неравенство $\sqrt{3ab}(9(a+b)^2+ab) \leq 9(a+b)^3$. Левая часть зависит от элементарного симметрического многочлена ab монотонно, а правая не зависит вовсе. Значит, неравенство достаточно доказать в случаях, когда числа равны и когда одно из них равно нулю. В первом случае придем к неравенству $4107 \leq 5184$. Во втором неравенство очевидно.

57. Если мы будем двигать график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ вверх или вниз, его корни будут меняться, но при этом ни данное по условию равенство, ни доказываемое неравенство меняться не будут. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $y=z$. А тогда неравенство перепишется в виде $2(x-y)^2 \leq 3x^2+6y^2=3$, или $(x+2y)^2 \geq 0$.

58. Сдвиги графика многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ не меняют значения ни выражения, входящего в доказываемое неравенство, ни выражения в левой части ограничения. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $z=y$. В этом случае неравенства перепишутся в виде $-\frac{1}{2}x^2 - y^2 \leq 2xy + y^2 \leq x^2 + 2y^2$. Левое неравенство эквивалентно условию $\frac{1}{2}(x+2y)^2 \geq 0$, а правое – условию $(x-y)^2 \geq 0$.

59. Очевидно, что неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда два из трех чисел совпадают. В первом случае получаем неравенство $7ab\le 2(a+b)^2$, которое слабее неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел $8ab\le 2(a+b)^2$, доказанного во втором разделе данной работы. В случае $b=c$ имеем $a=1-2b$ и неравенство приведется к виду $2(1-b)(3b-1)^2\ge 0$.

60. Двигая график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ вверх и вниз, мы можем менять произведение xyz, не нарушая данных по условию равенств. Поэтому наибольшее и наименьшее значение произведения будет достигаться, когда значения двух из трех переменных равны. Не ограничивая общности, можем считать, что $y=z$, и тогда по условию имеем $x+2y=5$, $x^2+2y^2=9$. Отсюда находим $x=1$, $y=2$ или $x=7/3$, $y=4/3$. В первом случае произведение равно$1\cdot 2\cdot 2=4$, а во втором – 112/27.

61. Без изменения проходит идея предыдущего решения. Ответ: 2 и 50/27.

62. Данное выражение приводится к виду

$$\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}=\frac{(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)}{abc}=$$

$$=\frac{(ab+ac+bc)^2}{abc}-2(a+b+c),$$

откуда видно, что значение выражения тем меньше, чем больше произведение abc. Поэтому можем считать, что $a=b=\sqrt{(1-c^2)/2}$, и наше выражение приводится к виду $\frac{1+3c^2}{2c}$. Если m – наименьшее значение этого выражения, то уравнение $\frac{1+3c^2}{2c}=m$ имеет кратный корень, следовательно, дискриминант квадратного трехчлена $\varphi(c)=3c^2-2mc+1$ равен нулю. Отсюда находим $m=\pm\sqrt{3}$. Поскольку все переменные неотрицательны, нас интересует только положительное значение m.

63. Заметим, что после умножения доказываемого неравенства на общий знаменатель, член $(abc)^2$ окажется только справа, причем с положительным коэффициентом. Квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом достигает своего максимума на отрезке непременно в одном из его концов. Можно менять значение произведения abc, не нарушая данного по условию равенства. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда какие-то два из них равны между собой. В первом случае неравенство очевидно. В случае $b=c$ доказываемое неравенство приводится к виду $b^2+3\geq ab(3b^2+1)$, а после возведения в квадрат и подстановки $a^2=3-2b^2$ – к виду $3(6b^4+7b^2+3)(b-1)^2(b+1)^2\geq 0$, что, очевидно, справедливо.

64. Сдвигая график кубического многочлена вверх, можно уменьшить правую часть доказываемого неравенства, не нарушая условий задачи. Поэтому неравенство достаточно доказать для случая, когда *больший* корень кратный. Не ограничивая общности, можем считать, что $x\leq y=z$. Тогда по условию $2y^2\leq x^2+y^2+z^2\leq 2$, то есть $x\leq y\leq 1$. Доказываемое неравенство можно записать в виде $x+2y\leq 2+xy^2$, или $x(1-y)(1+y)\leq 2(1-y)$, а это следует из условий $x\leq 1$, $0\leq 1-y$ и $1+y\leq 2$.

65. Когда график кубического многочлена сдвигается вниз, правая точка его пересечения с осью абсцисс сдвигается вправо, поэтому больший корень кубического имеет наибольшее значение, когда два других корня совпадают. По аналогичным соображениям (используя сдвиг вниз) приходим к выводу, что меньший корень кубического многочлена имеет наименьшее значение, когда другие два корня совпадают. Но в случае $y=z$ имеем $x+2y=6$, $2xy+y^2=9$, откуда $x=4$, $y=1$ или $x=0$, $y=3$, откуда и следует утверждение задачи.

66. Введем обозначения $p=a+b+c$, $r=abc$. Избавившись от знаменателей, перепишем неравенство в виде $q^3+pq^2\geq 4r$. Положим $A=a/p$, $B=b/p$, $C=c/p$, $P=A+B+C=1$, $Q=AB+BC+AC=q/p^2$, $R=ABC=r/p^3$. Получим неравенство $p^6Q^3+p^5Q^2\geq 4p^3R$, или $p^3Q^3+p^2Q^2\geq 4R$ Поскольку по условию $p\geq 1$, неравенство $Q^3+Q^2\geq 4R$ или $Q^3+P^2Q^2\geq 4P^3R$ более сильное. Докажем, что оно выполняется для *всех неотрицательных* чисел A, B, C. Поскольку R входит в него в первой степени, его достаточно доказать в двух частных случаях:

C=0 и $C=B$. В первом случае неравенство очевидно, а во втором приводится к виду $B^3(4A+5B)(A-B)^2\geq 0$.

67. Рассмотрим многочлены

$$f(t)=(t-a_1)(t-a_2)(t-a_3) \text{ и } f(t)=(t-b_1)(t-b_2)(t-b_3).$$

По условию, график одного из них получается из графика другого параллельным переносом вдоль оси ординат. В некоторой точке $a_1\leq c\leq a_2$ многочлен $f(t)$ достигает максимума, а на интервале $(-\infty,c)$ возрастает, поэтому из условия $a_1\leq b_1$ следует, что график многочлена $g(t)$ лежит ниже графика многочлена $f(t)$. В некоторой точке $a_2\leq d\leq a_3$ многочлен $f(t)$ достигает минимума, а на интервале $(d,+\infty)$ возрастает, поэтому $g(a_3)\leq 0$ и $a_3\leq b_3$.

68. Докажем первое неравенство. Вначале установим, что если $a\leq b\leq c$, то $a\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$. Когда мы сдвигаем график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вниз, его меньший корень увеличивается, а значения p,s и d остаются неизменными. Значение a будет наибольшим, когда $a=b$. В этом случае имеем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)=\frac{1}{3}\left(2a+c-\sqrt{(2a^2+c^2)-(2ac+a^2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2a+c-\sqrt{a^2-2ac+c^2}\right)=\frac{1}{3}(2a+c-(c-a))=a.$$

Поэтому неравенство $a\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$ справедливо, причем равенство в нем достигается только при $a=b$, а при $a<b$ имеет место строгое неравенство, что и требуется доказать. Второе неравенство доказывается аналогично.

69. Накопленный опыт доказательства подсказывает, что «критическим» случаем является $x=y=z$. В этом случае неравенство обращается в равенство при d=2/3. Поэтому условию задачи не может удовлетворять d>2/3. Остается доказать, что неравенство $3(x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z))\geq 2(xy+yz+xz)^2$ выполняется при всех x,y,z. Как обычно убеждаемся, что неравенство достаточно доказать в случае

$y=z$. А тогда оно сводится к виду $(3x^2+6xy+4y^2)(x-y)^2\geq 0$ или $(3(x+y)^2+y^2)(x-y)^2\geq 0$.

70. а) Как обычно убеждаемся, что неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда одно из чисел равно нулю и когда значения двух из трех переменных совпадают. В первом случае неравенство почти очевидно. В случае $b=c$, $a=1-2b$ оно сводится к виду $2(1-2b)(3b-1)^2\geq 0$, что очевидно, поскольку по условию $2b=b+c\leq a+b+c=1$.

б) При $d>15/4$ неравенство слабее, чем доказанное в пункте а). При $d<15/4$ неравенство сводится к виду $a^3+b^3+c^3+abcd\geq \frac{1}{9}+\frac{d}{27}$. Опять это неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда одно из чисел a, b или c равно нулю и когда два из этих трех чисел равны. При $c=0$ имеем $a^3+b^3\geq \frac{1}{4}(a+b)^3\geq \frac{1}{4}\geq \frac{1}{9}+\frac{d}{27}$. А при $b=c,$ $a=1-2b$ неравенство сводится к виду $\frac{1}{27}(3b-1)^2(24-18b-6bd-d)\geq 0$. При $d<15/4$ и $b\leq 1/2$ это неравенство справедливо.

71. Заметим, что при $c=0$ имеет место равенство

$$(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)=a^3b^3.$$

Поэтому $(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)-(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)$ делится на a, а значит, и на abc. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)-(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)=abc(2abc+a^3+b^3+c^3)$. Воспользовавшись тождеством

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+ac+bc)+3abc,$$

найдем

$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=(ab+bc+ac)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ac)abc+3(abc)^2.$$

После этого легко понять, что доказываемое неравенство примет вид $8[9(abc)^2+\ldots]\geq 9[8(abc)^2+\ldots]$, где многоточием обозначены слагаемые, содержащие abc самое большее в первой степени. Таким образом, разность левой и правой частей зависит от abc линейно. Поэтому неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда одно из чисел a,b,c равно нулю и когда два из этих трех чисел равны между собой. В первом случае неравенство следует из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. При $b=c$ неравенство приводится к виду

$$(8a^4+16a^3b+15a^2b^2+28ab^3+23b^4)(a-b)^2\geq 0.$$

72. Если p и q фиксированы, то разность левой и правой частей неравенства представляет собой квадратный трехчлен относительно переменной r с положительным старшим коэффициентом. На любом отрезке такой квадратный трехчлен достигает своего наибольшего значения непременно в одном из концов отрезка. Мы умеем менять значение r, не меняя p и q на отрезке, концы которого задаются условием совпадения двух корней многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$. Поэтому неравенство достаточно доказать для случая когда по крайней мере два из чисел x,y,z равны между собой. Если $y=z$, неравенство приводится к виду

$$0\leq 12x^4y-16x^3y^3+8x^2y^4-16xy^5+12y^6=4y^2(x-y)^2(3x^2+2xy+3y^2)=$$
$$=4y^2(x-y)^2(2x^2+(x+y)^2+y).$$

73. Избавившись от знаменателей, приведем неравенство к виду

$$(a^2+b^2+c^2)abc+(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+(a+b+c)\leq$$
$$\leq 2(abc)^2+2(a+b+c)abc+2(ab+ac+bc)+2,$$

или

$$2(abc)^2+(2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)+3)abc+$$
$$+(2-(a+b+c))(ab+ac+bc)-(a+b+c)+2\geq 0.$$

Поскольку числа a, b, c не превосходят 1, выполняется неравенство $2(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)+3\geq 0$, и поэтому левая часть последнего неравенства возрастает с ростом abc при фиксированных значениях двух других элементарных симметрических многочленов. Поэтому, если мы будем сдвигать график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вверх, неравенство будет только усиливаться. При этом больший и меньший корень многочлена будут уменьшаться. Значит, препятствий для движения может быть всего два: либо два из трех корней станут равными, либо один из корней станет равным нулю.

В первом случае неравенство перепишется в виде $\dfrac{a}{b^2+1}+\dfrac{2b}{ab+1}\leq 2$ или $ba^2+(1-2b-2b^3)a+2b^3-2b^2+2b-2\leq 0$. Считая b параметром, получим в левой части неравенства квадратный трехчлен от переменной a с положительным старшим коэффициентом. Такой многочлен может достигать максимального значения на отрезке $[0,1]$ только при $a=0$ или $a=1$. В обоих случаях неравенство проверяется легко.

Во втором случае неравенство очевидно.

74. Сразу не очевидно, что неравенство симметрическое. Но это станет видно, если мы прибавим к первой дроби $(b–a)/2$, ко второй добавим $(c–b)/2$, а третью увеличим на $(a–c)/2$ (в сумме будет добавлен ноль). Избавившись от знаменателей, получим симметрическое неравенство четвертой степени. Собрав все его члены в левой части и разложив получившийся многочлен по элементарным симметрическим, получим выражение, в которое произведение abc входит в первой степени. Поэтому полученное неравенство достаточно доказать ля случаев, когда одно из чисел равно 0 или когда два из трех чисел a,b,c совпадают.

Если только одно число равно нулю, то полученное неравенство равносильно исходному, поэтому достаточно доказать, что $\frac{a^2+3ab}{a+b}+b\le 2$ (считаем, что $c=0$) или $\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\le 2$. С учетом равенства $a+b=1$, это неравенство перепишется в виде $a^2+4ab+b^2\le 2(a+b)^2$ или $0\le a^2+b^2$, что очевидно.

При $b=c$ полученное неравенство тоже равносильно исходному. Последнее запишется в виде $\frac{a^2+6ab+b^2}{a+b}+2b\le 2$ или $\frac{a^2+8ab+3b^2}{a+b}\le 2$. Но теперь $a+2b=1$, поэтому неравенство можно преобразовать к виду $a^2+8ab+3b^2\le 2(a+b)(a+2b)$ или $0\le (a–b)^2$.

75. Докажем, что из неравенства $a+b+c\le 3$ следует неравенство $ab+bc+ca\le a+b+c$. Неравенство $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2$ даже сильнее, чем нужно. А оно справедливо при всех действительных a, b, c. Действительно, поскольку последнее неравенство симметрично и имеет вторую степень, то его достаточно доказать для $c=b$. А в этом случае неравенство эквивалентно условию $(a–b)^2\ge 0$.

11. Приложение

W – международная олимпиада;
B – Всесоюзная или заключительный этап Всероссийской;
P – четвертый (зональный) этап Всероссийской;
У – Всеукраинская;
M – Московская;
Л – Ленинградская (Санкт-Петербургская);
К – Киевская;
h – Задачник «Кванта» (с указанием номера);
C – конкурс им. А.П. Савина;
S – Соросовская олимпиада на Украине;
A – журнал American Mathematical Monthly;
H – Венгерская олимпиада.

Литература

1. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: ВЦ РАН. 2010.

2. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта и мажоризация. М.: ВЦ РАН. 2011.

3. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства.. Методы доказательства. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

4. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. М.: Дрофа, 2005.

5. Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

6. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.

7. Mitrinovic D. S. Analytic Inequalities. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1970.

8. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

9. Петербургские математические олимпиады. СПб.: Лань. 2003.