РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М. А. ГОРЕЛОВ

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. ПРАВИЛО ДЕКАРТА И МАЖОРИЗАЦИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2011

УДК 519.8, 517.2

Ответственный редактор
кандидат физ.-матем. наук Л.Г. Гурин

Показывается, что теория мажоризации может быть использована для уточнения оценок числа корней квазимногочленов, даваемых правилом знаков Декарта. Полученные результаты используются для решения задач на доказательство неравенств. Возможности метода продемонстрированы на большом числе примеров.

Ключевые слова: оптимизация, неравенства, мажоризация.

Рецензенты: И.А. Копылов,
А.Ф. Кононенко

Научное издание

1. Введение

Данная работа является непосредственным продолжением [1], поэтому все сказанное во введении к [1] напрямую относится и к приводимому ниже тексту. Не будем повторяться. Сформулируем лишь основную идею, предложенную в [1].

Задача поиска максимума функции $F(x)$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^k$ очевидным образом сводится к доказательству неравенства

$$F(x) \le \max_{y \in X} F(y)$$

и определению тех значений x, для которых это неравенство обращается в равенство. Именно в такой форме мы и будем исследовать задачи оптимизации.

Часто доказательство неравенства удается свести к определению знака вспомогательной функции $f(t)$ от одной переменной t (в которую исходная x входит как параметр) при специально выбранном значении переменной t_0. Последнюю задачу удастся решить, если будут известны корни функции $f(t)$ и ее знак при каком-нибудь другом значении переменной t_1. Значение t_1 можно выбирать произвольно, поэтому знак $f(t_1)$ обычно определить несложно.

Несколько корней функции $f(t)$ во многих случаях удается угадать. Поэтому остается лишь доказать, что других корней нет. Это можно сделать, например, оценив число корней функции $f(t)$. Для этого можно использовать способ аналитического задания функции $f(t)$. В [1] в качестве $f(t)$ рассматривались квазимногочлены и многочлены, а для оценки числа корней применялось правило знаков Декарта. Поскольку эта теорема будет активно применяться ниже, приведем ее точную формулировку.

Квазимногочленами называют функции вида

$$f(t) = a_k b_k^t + a_{k-1} b_{k-1}^t + \ldots + a_1 b_1^t + a_0 b_0^t.$$

Договоримся записывать квазимногочлены таким образом, что $b_k>b_{k-1}>\ldots>b_1>b_0>0$, а среди коэффициентов a_k, $a_{k-1},\ldots,a_1$, a_0 нет нулей. Такую форму записи будем называть стандартной.

Будем говорить, что эта последовательность содержит k перемен знака, если среди чисел a_0a_1, $a_1a_2,\ldots,a_{n-1}a_n$ имеется ровно k отрицательных чисел. Индексы l, для которых $a_{l-1}a_l<0$, будем называть местами перемены знака.

Теорема (правило Декарта для квазимногочленов). Число действительных корней квазимногочлена, записанного в стандартной форме, не превосходит числа перемен знака в последовательности его коэффициентов.

Доказательство этой теоремы можно найти в [1] или [2]. Аналогичный результат можно сформулировать и для обычных многочленов, но ниже он не используется, потому и не приводится. Заинтересованных мы отсылаем к только что цитированным работам.

В [1] рассматривались квазимногочлены с малым числом перемен знаков (одним, двумя или тремя). Это обусловлено тем, что при большом числе перемен знаков в последовательности коэффициентов квазимногочлена правило Декарта может дать слишком грубую оценку числа корней. Поэтому естественно встает вопрос об уточнении этой теоремы.

Для обычных многочленов такие уточнения известны. К их числу можно отнести теорему Ньютона–Сильвестра (единственное доступное автору доказательство содержится в [3]) и теорему Штурма (элементарные доказательства можно найти в [3–5]). Правда, для наших целей их применить не удается, так как обе теоремы, в отличие от правила Декарта, предполагают выполнение значительных объемов вычислений. А поскольку нам приходится решать задачу «с параметром» x, вычисления становятся слишком сложными.

Для квазимногочленов аналогичных уточнений автору не встречалось. А между тем соответствующая идея в ином контексте давно и хорошо известна.

Речь идет о теории мажоризации. В достаточном для наших целей объеме она изложена в [6]. Специально данному вопросу посвящена монография [7]. Некоторые более современные результаты и дальнейшие ссылки можно найти в [8].

Как и правило Декарта, теория мажоризации используется ниже в весьма ограниченном объеме. Однако уже это позволяет решить неожиданно большое число задач.

В [1] большая часть задач решается «в один ход» и практически без вычислений. При известном навыке эти задачи можно решать «в уме». Ниже решение задач сопряжено с вычислениями, но все они преодолимы. Кроме того, при решении некоторых задач используемые идеи приходится применять многократно.

Большинство задач заимствованные, но установить первоисточники не представляется возможным. Ссылки указаны для тех задач, которые предлагались на различных олимпиадах, поскольку соответствующие источники наиболее доступны, а соответствующие решения естественно считать наиболее элементарными и красивыми. Читатель получает возможность сравнить их с приводимыми ниже. Ссылки даются после номера задачи в фигурных скобках, где указывается название олимпиады и год ее проведения. При этом используются сокращения, приведенные в приложении.

2. Декомпозиция

Математики хорошо знают, что решить много простых задач гораздо легче, чем одну сложную. Поэтому, если удается «разбить» сложную задачу на несколько аналогичных, но более простых, то это – несомненный успех. Вопрос только в том, как осуществить такую декомпозицию?

В [1] рассматривались задачи, решение которых сводилось к исследованию «простых» квазимногочленов, то есть таких, последовательности коэффициентов которых содержат мало перемен знаков (одну, две или три). Оказывается, что существует регулярный способ показать, что «сложный» квазимногочлен имеет мало корней. К его описанию мы и приступим.

Рассмотрим простую задачу, приписываемую Э. Чезаро[1].

Задача 1. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c выполняется неравенство $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$.

---

[1] Ernesto Cesaro (1859–1906) – итальянский математик.

Решение. Накопленный в [1] опыт приводит к рассмотрению квазимногочлена $f(t)=a^t+b^t+c^t-\left(\frac{a+b}{2}\right)^t-\left(\frac{a+c}{2}\right)^t-\left(\frac{b+c}{2}\right)^t$. Но привычная схема рассуждений в данном случае дает сбой. Квазимногочлен имеет два очевидных корня 0 и 1, а последовательность его коэффициентов в стандартной записи имеет четыре перемены знака. Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $a\ge b\ge c$. Тогда выполняются неравенства $a\ge\frac{a+b}{2}\ge b\ge\frac{b+c}{2}\ge c$, поэтому запись квазимногочлена $a^t-\left(\frac{a+b}{2}\right)^t+b^t-\left(\frac{b+c}{2}\right)^t+c^t$ является стандартной и содержит четыре перемены знака. А так как, кроме того, $a\ge\frac{a+c}{2}\ge c$, добавление члена вида $-\left(\frac{a+c}{2}\right)^t$ числа перемен знака не меняет.

Тем не менее легко показать, что этот квазимногочлен имеет всего два корня. В самом деле, перепишем его в виде

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}a^t-\left(\frac{a+b}{2}\right)^t+\frac{1}{2}b^t\right]+\left[\frac{1}{2}a^t-\left(\frac{a+c}{2}\right)^t+\frac{1}{2}c^t\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}b^t-\left(\frac{b+c}{2}\right)^t+\frac{1}{2}c^t\right].$$

Каждый из квазимногочленов, заключенных в квадратные скобки, имеет два корня 0 и 1, и последовательности их коэффициентов содержат по две перемены знака. Значит, в силу правила Декарта других корней нет и каждый из этих квазимногочленов положителен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$. Значит, и их сумма положительна на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицательна на интервале $(0,1)$, а потому имеет всего два корня.

Теперь решение задачи стандартным образом доводится до конца. Так как квазимногочлен $f(t)$ положителен при $t\in(-\infty,0)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$, он убывает при t=0 и его производная в этой точке не положительна. Это и дает нужное неравенство.

Заметим, что доказав данное неравенство, мы получаем возможность найти решение, по меньшей мере трех задач: 1) найти максимум функции $(a+b)(a+c)(b+c)\geq 8abc$ при всех неотрицательных значениях переменных; 2) найти минимум функции $(a+b)(a+c)(b+c)$ при условии что произведение abc неотрицательных чисел равно 1, и 3) найти максимум произведения abc при условии, что $(a+b)(a+c)(b+c)=1$,а числа a, b, c неотрицательны.

Упражнения

1. Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}$.

2. Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $4^{a+b+c}a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geq(a+b)^{a+b}(a+c)^{a+c}(b+c)^{b+c}$.

3. {В.2003} Пусть $a>0,b>0,c>0$ и $a+b+c=1$. Докажите неравенство $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$.

Нельзя ли обобщить эту идею? Ответ на этот вопрос содержит

Задача 2. Пусть числа $a_1\geq a_2\geq a_3>0$ и $b_1\geq b_2\geq b_3>0$ удовлетворяют условиям $a_1\geq b_1$, $a_3\leq b_3$ и $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$. Докажите, что тогда квазимногочлен $f(t)=a_1^t+a_2^t+a_3^t-b_1^t-b_2^t-b_3^t$ имеет два корня.

Решение. Пусть δ – наименьшее из чисел a_1-b_1 и b_3-a_3. Запишем рассматриваемый квазимногочлен в виде

$$f(t)=\left[a_1^t-(a_1-\delta)^t-(a_3+\delta)^t+a_3^t\right]+$$
$$+\left[(a_1-\delta)^t+a_2^t+(a_3+\delta)^t-b_1^t-b_2^t-b_3^t\right].$$

Так как $a_1-\delta\geq b_1\geq a_3$ и $a_3+\delta\leq b_3\leq a_1$, последовательность коэффициентов квазимногочлена $g(t)=a_1^t-(a_1-\delta)^t-(a_3+\delta)^t+a_3^t$, записанного в стандартной форме, имеет две перемены знака, следовательно, в силу правила Декарта он имеет два коня 0 и 1.

Пусть $h(t)=\left(a_1-\delta\right)^t+a_2^t+\left(a_3+\delta\right)^t-b_1^t-b_2^t-b_3^t$. Рассмотрим случай $a_1-b_1=\delta$ (случай $b_3-a_3=\delta$ рассматривается аналогично). Тогда $h(t)=a_2^t+\left(a_3+\delta\right)^t-b_2^t-b_3^t$ и $a_3+\delta\le b_3$. Но так как выполняется равенство $a_2+(a_3+\delta)-b_2-b_3=a_2+a_3+a_1-b_1-b_2-b_3=0$, имеет место неравенство $a_2\ge b_2$, то есть последовательность коэффициентов квазимногочлена $h(t)$ в стандартной записи имеет две перемены знака. Следовательно, и $h(t)$ имеет два корня 0 и 1.

Так как каждый из квазимногочленов $g(t)$ и $h(t)$ положителен на интервалах $\left(-\infty,0\right)$ и $\left(1,+\infty\right)$ и отрицателен на интервале $\left(0,1\right)$, их сумма $f(t)$ положительна на интервалах $\left(-\infty,0\right)$ и $\left(1,+\infty\right)$ и отрицательна на интервале $\left(0,1\right)$, а потому имеет всего два корня.

Этот простой результат имеет многочисленные применения.

Упражнения

4. (Азиатско-Тихоокеанская олимпиада, 1996 г.) Пусть *a, b* и *c* – длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\,.$$

5. {h7.1970} Пусть *a,b,c* – стороны треугольника. Докажите, что $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\ge 3$.

6. Пусть h_a,h_b,h_c и r_a,r_b,r_c – высоты и радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство[2]

$$h_a+h_b+h_c\le r_a+r_b+r_c.$$

7. Пусть точка *M* лежит внутри треугольника *ABC*, *u,v,w* – расстояния от *M* до сторон *BC, AC* и *AB*, а h_a, h_b и h_c – соответствующие высоты. Докажите неравенство $(h_a-u)(h_b-v)(h_c-w)\ge 8uvw$.

8. {A.1964} Пусть h_a,h_b,h_c и r_a,r_b,r_c – высоты и радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство $h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a\le r_ar_b+r_br_c+r_cr_a$.

9. Пусть *a, b* и *c* – длины сторон треугольника. Докажите, что

[2] Результат был получен А. Маковским (A. Makowski) в 1961 г.

$$\sqrt{a+b-c}\sqrt{b+c-a}+\sqrt{a+b-c}\sqrt{c+a-b}+\sqrt{b+c-a}\sqrt{c+a-b}\le$$
$$\le\sqrt{a}\sqrt{c}+\sqrt{c}\sqrt{b}+\sqrt{a}\sqrt{c}.$$

10. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\sqrt{a+2^a}+\sqrt{b+2^b}+\sqrt{c+2^c}\le\sqrt{b+2^a}+\sqrt{c+2^b}+\sqrt{a+2^c}\ .$$

11. {h2051.2007} Докажите, что если числа a, b и c положительные и $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=abc$, то $a=b=c$.

12. {C.2001} Положительные числа a,b,c таковы, что $a^3+b^3+c^3=(a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3$. Докажите равенства $a=b=c$.

3. Мажоризация

Рассмотрим дальнейшее обобщение.

Задача 3. Пусть $k\ge 2$ и числа $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k>0$ и $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_k>0$ таковы, что для всех $i=1,\ldots,k-1$ выполняются неравенства
$$a_1+\ldots+a_i\ge b_1+\ldots+b_i \tag{1}$$
и имеет место равенство
$$a_1+\ldots+a_k=b_1+\ldots+b_k\,. \tag{2}$$

Тогда квазимногочлен $f(t)=a_1^t+a_2^t+\ldots+a_k^t-b_1^t-b_2^t-\ldots-b_k^t$ имеет ровно два корня, положителен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$. Докажите это.

Заметим, что при условии выполнения равенства (2) неравенства (1) имеют место для всех $i=1,\ldots,k-1$ тогда и только тогда, когда для всех $i=2,\ldots,k$ справедливы неравенства
$$a_i+\ldots+a_k\le b_i+\ldots+b_k\,. \tag{3}$$

Решение. Очевидно, что при выполнении равенства (2) рассматриваемый квазимногочлен имеет два корня 0 и 1. Докажем, что других корней нет.

Доказательство будем вести индукцией по k. Для k=2 последовательность коэффициентов квазимногочлена $f(t)$ в стандартной записи имеет две перемены знака, поэтому нужное утверждение непосредственно следует из правила Декарта.

Допустим, что утверждение доказано для всех квазимногочленов рассматриваемого вида с числом слагаемых, меньшим чем k.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_i \neq b_i$ для всех i (в противном случае можно было бы просто сократить соответствующие члены и воспользоваться предположением индукции). Тогда $a_1 > b_1$ и $a_k < b_k$. Пусть l – наибольший из индексов i, для которых выполняется неравенство $a_i > b_i$. Тогда $a_l > b_l$ и $a_{l+1} < b_{l+1}$.

Пусть δ – наименьшее из чисел $a_l - b_l$ и $b_{l+1} - a_{l+1}$. Запишем рассматриваемый квазимногочлен в виде

$$f(t) = \left[a_l^t - \left(a_l - \delta\right)^t - \left(a_{l+1} + \delta\right)^t + a_{l+1}^t \right] +$$

$$+\left[a_1^t + \ldots + a_{l-1}^t + \left(a_l - \delta\right)^t + \left(a_{l+1} + \delta\right)^t + a_{l+2}^t + \ldots + a_k^t - b_1^t - \ldots - b_k^t \right].$$

Так как $a_l - \delta \geq b_l \geq b_{l+1} \geq a_{l+1}$ и $a_{l+1} + \delta \leq b_{l+1} \leq b_l \leq a_l$, последовательность коэффициентов квазимногочлена

$$g(t) = a_l^t - \left(a_l - \delta\right)^t - \left(a_{l+1} + \delta\right)^t + a_{l+1}^t,$$

записанного в стандартной форме, имеет две перемены знака, следовательно, в силу правила Декарта он имеет два корня 0 и 1.

Пусть

$$h(t) = a_1^t + \ldots + a_{l-1}^t + \left(a_l - \delta\right)^t + \left(a_{l+1} + \delta\right)^t + a_{l+2}^t + \ldots + a_k^t - b_1^t - \ldots - b_k^t.$$

Рассмотрим случай $a_l - b_l = \delta$ (случай $b_{l+1} - a_{l+1} = \delta$ рассматривается аналогично). Тогда

$$h(t) = a_1^t + \ldots + a_{l-1}^t + \left(a_{l+1} + \delta\right)^t + a_{l+2}^t + \ldots + a_k^t - b_1^t - \ldots - b_{l-1}^t - b_{l+1}^t - \ldots - b_k^t$$

и $a_{l+1} + \delta \leq b_{l+1} \leq b_{l-1} \leq a_{l-1}$.

Кроме того, из условия (2) следует, что $a_1 + \ldots + a_{l-1} + (a_{l+1} + \delta) + a_{l+2} + \ldots + a_k = b_1 + \ldots + b_{l-1} + b_{l+1} + \ldots + b_k$. Для $i \leq l-1$ неравенства $a_1 + \ldots + a_i \geq b_1 + \ldots + b_i$ выполняются в силу условия (1), а неравенства

$$a_1 + \ldots + a_{l-1} + (a_{l+1} + \delta) \geq b_1 + \ldots + b_{l-1} + b_{l+1} + \ldots + b_k$$

и

$$a_1 + \ldots + a_{l-1} + (a_{l+1} + \delta) + a_{l+2} + \ldots + a_i \geq b_1 + \ldots + b_{l-1} + b_{l+1} + \ldots + b_i$$

для $i = l+2,...,k-1$ следуют из условий (3) и предыдущего равенства. Значит, квазимногочлен $h(t)$ удовлетворяет условию задачи и в силу предположения индукции он имеет ровно два корня.

Так как каждый из квазимногочленов $g(t)$ и $h(t)$ положителен на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$, их сумма $f(t)$ положительна на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ и отрицательна на интервале $(0,1)$, а потому имеет всего два корня. Шаг индукции завершен и задачу можно считать решенной.

Задачу Чезаро можно обобщить и более прямым способом.

Задача 4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – положительные числа,

$$b_i = x_{i1}a_1 + x_{i2}a_2 + \ldots + x_{ik}a_k,\ i = 1,...,k\ , \tag{4}$$

где x_{ij} – неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ik} = 1,\ i = 1,...,k \tag{5}$$

и

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{kj} = 1,\ j = 1,...,k\ . \tag{6}$$

Тогда $a_1a_2\ldots a_k \le b_1b_2\ldots b_k$.

Решение. Рассмотрим квазимногочлены

$$f_i(t) = x_{i1}a_1^t + x_{i2}a_2^t + \ldots + x_{ik}a_k^t - b_i^t\ .$$

В силу правила Декарта каждый из них имеет не более двух корней. Но равенство (4) означает, что корнем $f_i(t)$ является число 1, а условие (5) свидетельствует о том, что $f_i(t)$ обращается в ноль при t=0. Следовательно, других корней нет и каждый из квазимногочленов $f_i(t)$ положителен на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$. Значит, то же относится и к их сумме $f(t)=f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t)$. Но тогда производная функции $f(t)$ в точке 0 не положительна. А в силу условия (6) имеем

$$f(t) = a_1^t + a_2^t + \ldots + a_k^t - b_1^t - b_2^t - \ldots - b_k^t\ ,$$

откуда и следует нужное неравенство. Задача решена.

По сути, при этом был установлен следующий факт.

Задача 5. Пусть положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_k$ удовлетворяют условию (4), а коэффициенты x_{ij} неотрицательны и выполняются равенства (5) и (6). Тогда квазимногочлен $f(t) = a_1^t + a_2^t + ... + a_k^t - b_1^t - b_2^t - ... - b_k^t$ имеет ровно два корня 0 и 1.

К сожалению, этот результат не расширяет круг решаемых задач, как показывает следующая

Задача 6. Неотрицательные числа x_{ij}, удовлетворяющие системе уравнений (4)–(6) существуют тогда и только тогда, когда выполняются условия (1) и (2).

Решение. Для доказательства достаточности заметим, что в решении задачи 3, по сути, приведен алгоритм поиска неотрицательного решения системы (4)–(6). Действительно, при выполнении очередного шага индукции мы выражаем числа $c_1=a_1,\dots,c_{l-1}=a_{l-1}$, $c_l=a_l-\delta$, $c_{l+1}=a_{l+1}+\delta$, $c_{l+2}=a_{l+2},\dots,c_n=a_n$ в виде

$$c_i = x_{i1}a_1 + x_{i2}a_2 + ... + x_{ik}a_k,\ i = 1,...,k\ , \tag{7}$$

где числа x_{ij} определяются условиями $x_{ii}=1$ для $i\neq l,l+1$,

$$x_{ll} = 1 - \frac{\delta}{a_i - a_{l+1}},\ x_{l(l+1)} = \frac{\delta}{a_i - a_{l+1}}, x_{(l+1)l} = \frac{\delta}{a_i - a_{l+1}},\ x_{(l+1)(l+1)} = 1 - \frac{\delta}{a_i - a_{l+1}}$$

и $x_{ij}=0$ для всех остальных i и j. Это проверяется непосредственно. Равенства (5) и (6) при этом очевидно выполняются.

Далее числа $b_1,b_2,\dots,b_k$ аналогичным образом выражаются через числа $c_1,c_2,\dots,c_k$. Поэтому нам достаточно доказать следующее. Пусть числа $c_1,c_2,\dots,c_k$ выражаются через числа $a_1,a_2,\dots,a_k$ в виде (7), а числа $d_1,d_2,\dots,d_k$ выражаются через числа $c_1,c_2,\dots,c_k$ в виде

$$d_i = y_{i1}c_1 + y_{i2}c_2 + ... + y_{ik}c_k,\ i = 1,...,k\ , \tag{8}$$

причем коэффициенты x_{ij} и y_{ij} неотрицательны и удовлетворяют условиям (5), (6),

$$y_{i1} + y_{i2} + ... + y_{ik} = 1,\ i = 1,...,k$$

и

$$y_{1j} + y_{2j} + ... + y_{kj} = 1,\ j = 1,...,k\ .$$

Тогда существуют неотрицательные коэффициенты z_{ij}, для которых выполняются равенства

$$d_i = z_{i1}a_1 + z_{i2}a_2 + ... + z_{ik}a_k,\ i = 1,...,k\ , \tag{9}$$

$$z_{i1} + z_{i2} + ... + z_{ik} = 1,\ i = 1,...,k, \tag{10}$$

$$z_{1j} + z_{2j} + ... + z_{kj} = 1,\ j = 1,...,k\ . \tag{11}$$

Для доказательства этого, подставим выражение для c_i из формулы (7) в (8). Получим выражение вида (9), где

$$z_{ij}=y_{i1}x_{1j}+y_{i2}x_{2j}+\ldots+y_{ik}x_{kj}.$$

Остается доказать равенства (10) и (11). Докажем, например, первое из них (второе доказывается аналогично). Имеем

$$z_{i1}+z_{i2}+\ldots+z_{ik}=(y_{11}x_{1j}+y_{12}x_{2j}+\ldots+y_{1k}x_{kj})+$$
$$+(y_{21}x_{1j}+y_{22}x_{2j}+\ldots+y_{2k}x_{kj})+\ldots+(y_{n1}x_{1j}+y_{n2}x_{2j}+\ldots+y_{kn}x_{kj})=$$
$$=(y_{11}x_{1j}+y_{21}x_{1j}+\ldots+y_{k1}x_{1j})+(y_{12}x_{2j}+y_{22}x_{2j}+\ldots+y_{k2}x_{2j})+\ldots$$
$$\ldots+(y_{1k}x_{kj}+y_{2k}x_{ki}+\ldots+y_{kk}x_{kj})=$$
$$=(y_{11}+y_{21}+\ldots+y_{k1})\,x_{1j}+(y_{12}+y_{22}+\ldots+y_{k2})\,x_{2j}+\ldots$$
$$\ldots+(y_{1k}+y_{2k}+\ldots+y_{kk})x_{kj}=x_{1j+}x_{2j+\ldots+}x_{kj}=1.$$

Достаточность доказана. Докажем необходимость. В силу условия (4) $\sum_{l=1}^{i} b_l = \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{k} x_{lj}a_j$. Представим правую часть этого равенства в виде двух слагаемых $\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{k} x_{lj}a_j$ и заменим во втором из них числа a_j на большее число a_i. Получим большее число $\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{k} x_{lj}a_i$, или, вынося a_i за скобки, $\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{k} x_{lj}\right)a_i$. С учетом равенства (5) это выражение равно $\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(\sum_{l=1}^{i}\left(1-\sum_{j=1}^{i} x_{lj}\right)\right)a_i = \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(i-\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}\right)a_i$.

Поменяв во втором слагаемом порядок суммирования, получим

$$\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(i-\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} x_{lj}\right)a_i = \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(\sum_{j=1}^{i}\left(1-\sum_{l=1}^{i} x_{lj}\right)\right)a_i.$$

В силу условия (6) это равно

$$\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \left(\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=i+1}^{k} x_{lj}\right)a_i = \sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i} x_{lj}a_j + \sum_{j=1}^{i}\sum_{l=i+1}^{k} x_{lj}a_i$$

(мы опять внесли a_i в скобки). Теперь во втором слагаемом поменяем a_i на большее число a_j. Получим

$\sum_{l=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}x_{lj}a_j+\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=i+1}^{k}x_{lj}a_j=\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}x_{lj}a_j+\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=i+1}^{k}x_{lj}a_j$ (мы поменяли порядок суммирования в первом слагаемом). Теперь можно объединить слагаемые и вынести a_j за скобки. Получим $\sum_{j=1}^{i}\left(\sum_{l=1}^{i}x_{lj}a_j+\sum_{l=i+1}^{k}x_{lj}a_j\right)=\sum_{j=1}^{i}\left(a_j\left(\sum_{l=1}^{i}x_{lj}+\sum_{l=i+1}^{k}x_{lj}\right)\right)=\sum_{j=1}^{i}\left(a_j\sum_{l=1}^{k}x_{lj}\right)=\sum_{j=1}^{i}a_j$ (в последнем равенстве использовалось условие (6)). На каждом шаге наших преобразований значение рассматриваемого выражения не уменьшалось, поэтому условие (1) выполнено.

Если мы просуммируем равенства (4) по всем $i=1,\ldots,k$, то с учетом равенств (6) получим равенство (2).

Таким образом, достаточные условия декомпозиции, полученные в задачах 3 и 5 равносильны. Иногда удобно пользоваться одним, а иногда – другим.

Если две последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$ удовлетворяют условиям (1) и (2), или, что то же самое, условиям (3)–(5), то говорят, что последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ мажорирует последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Понятие мажоризации появилось почти одновременно и независимо в работах математиков и экономистов. В 1903 г. его использовал шотландский математик Мюрхед[3]. В 1905 г. американский экономист Лоренц[4] ввел его в форме близкой к условиям (1) и (2). В 1920 г. английский экономист Дальтон[5] ввел тоже понятие в форме, близкой к решению задачи 6. А в 1929 г. английские математики Харди[6], Литлвуд[7] и американский математик Пойа[8] исследовали его систематически.

---

[3] Robert Franklin Muirhead (1860–1941) – шотландский математик, член Эдинбургского математического общества.

[4] Max Otto Lorenz (1876–1959) – крупный американский государственный чиновник.

[5] Барон H. Dalton (1887–1962) – крупный английский государственный деятель, избиравшийся членом парламента и несколько раз занимавший пост министра.

[6] Godfrey Harold Hardy (1877–1947) – английский математик, специалист по теории чисел и теории функций, иностранный почетный член АН СССР.

Экономический смысл мажоризации состоит в следующем. Вероятно, читателю приходилось сталкиваться с рассуждениями такого рода. В стране А 10 процентов самых бедных получают в 40 раз меньше, чем 10 процентов самых богатых граждан. А в стране Б аналогичное отношение равно 15. Поэтому способ распределения богатства в стране Б более справедлив. Естественно встает вопрос, почему сравниваются 10 процентов граждан, а не 8 или 15? Очевидно, такой выбор чисто условен и делает данный способ сравнения весьма субъективным. Устранить данный недостаток можно так.

Конечно, разумно сравнивать лишь способы распределения одного и того же совокупного богатства. Скажем, что способ дележа Б более справедлив, чем способ дележа А, если при любом $0 \le \alpha \le 100$ α процентов самых бедных граждан при способе дележа Б получают в сумме не меньше, чем при способе дележа А. Это и зафиксировано в определении мажоризации. Если a_i обозначает доход i-го по степени богатства гражданина при способе дележа А, а b_i – доход i-го по степени богатства гражданина при способе дележа Б, то условия (1) и (2) как раз и выражают данное понимание справедливости (см. замечание перед решением задачи 3). Разумеется, при таком подходе не любые два способа дележа можно сравнить по степени «справедливости», но если сравнение возможно, то это говорит о многом.

Можно взглянуть на ситуацию несколько иначе. Пусть нам дан некий способ дележа совокупного богатства. Если мы немного перераспределим богатство, передав некую сумму от более богатого гражданина более бедному[9], то естественно полагать, что новое распределение будет более равномерным, а потому и более справедливым. Если мы проделаем такую процедуру несколько раз, то в конце получим еще более справедливый способ дележа. Это рассуждение, по сути, воспроизводит решение задачи 6.

---

[7] John Edensor Littlewood (1885–1977) – английский математик, специалист по теории чисел и теории функций.

[8] György Polya (1887–1985) – американский математик венгерского происхождения, специалист по теории чисел, функциональному анализу, математической статистике и комбинаторике.

[9] но так, чтобы богатый после передела не стал беднее, чем изначально был бедный.

Вот некоторые примеры применения рассмотренных идей.

Упражнения

13. {S.2000} Какое из двух чисел больше $\sqrt{1997}+2\sqrt{1999}+2\sqrt{2001}+\sqrt{2003}$ или $2\sqrt{1998}+2\sqrt{2000}+2\sqrt{2002}$?

14. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа. Докажите неравенство $\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{k-1}+a_k}{2}\cdot\frac{a_k+a_1}{2}\ge a_1a_2...a_k$.

15. {h23.1970} Докажите, что при всех натуральных $k>1$ выполняются неравенства $\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2k}}<\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2k}<\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2k}}$.

16. {h1277.1991} Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{k-1}+a_k}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_k+a_1}{a_2}}\ge k\sqrt{2}.$$

17. {К.1965} Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – такие положительные числа, что $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$. Докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\left(\frac{1}{a_2}-1\right)\left(\frac{1}{a_3}-1\right)\left(\frac{1}{a_4}-1\right)\left(\frac{1}{a_5}-1\right)\ge 1024.$$

18. Для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\sqrt{k-1}\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_k}\right)\le\sqrt{1-a_1}+\sqrt{1-a_2}+\ldots+\sqrt{1-a_k}.$$

19. {Л.2001} Даны вещественные числа $x_1,x_2,\ldots,x_{10}$ из отрезка $\left[0,\pi/2\right]$, сумма квадратов синусов которых равна 1. Докажите неравенство $3(\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_{10})\le\cos x_1+\cos x_2+\ldots+\cos x_{10}$.

20. {h1272.1991} Докажите, что для любых k положительных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$, сумма которых равна 1, выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_k^2}-1\right)\ge\left(k^2-1\right)^k.$$

21. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ справедливо неравенство $\frac{a_1a_2...a_k}{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^k}\le\frac{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k)}{(k+a_1+a_2+\ldots+a_k)^k}$.

22. Для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, сумма которых равна 1, докажите неравенство $\sqrt{\frac{1+a_1}{a_1}}+\sqrt{\frac{1+a_2}{a_2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1+a_k}{a_k}}\ge k\sqrt{k+1}$.

23. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c справедливо неравенство $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 abc \le \left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\right)^2$.

24. Пусть a, b, c – стороны треугольника, а r_a, r_b, r_c – радиусы его вневписанных окружностей. Докажите, что $r_a r_b r_c \le \left(\sqrt{3}/2\right)^3 abc$.

25. Докажите, что для неотрицательных a,b,c имеет место неравенство $2\sqrt{ab+bc+ac}\le\sqrt{3}\sqrt[3]{(b+c)(c+a)a+b)}$.

26. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c справедливо неравенство $\frac{a+b+2c}{4}\cdot\frac{2a+b+c}{4}\cdot\frac{a+2b+c}{4}\ge\frac{b+2c}{3}\cdot\frac{c+2a}{3}\cdot\frac{a+2b}{3}$.

27. Докажите, что для положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$.

28. {Л.1997} Пусть a,b,c – длины сторон треугольника с периметром 1. Докажите неравенство $\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}>6$.

29. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа. Положим $a_{i+k}=a_i$ для i=1,2… Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+2a_3+\ldots+(k-1)a_k}+\frac{a_2}{a_3+2a_4+\ldots+(k-1)a_{k+1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}+2a_{k+2}+\ldots+(k-1)a_{2k-1}}\ge\frac{2}{k-1}.$$

30. {Л.1995} Числа a,b,c положительны. Докажите неравенство

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2\ge 27.$$

31. Докажите, что для положительных чисел a,b,c,d выполняется неравенство $\frac{a+c}{a+d}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geq 4$.

32. Докажите, что для положительных чисел a,b,c,d выполняется неравенство $\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\geq 1$.

33. Докажите, что отношение мажорирования транзитивно, то есть если последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n$ мажорирует последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_n$, а последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_n$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_n$, то последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_n$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_n$.

34. Пусть числа p, q, r, a, b, c неотрицательны и $p+q+r=1$. Докажите неравенство

$$(pa+qb+rc)(qa+rb+pc)(ra+pb+qc)\geq$$
$$\geq(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

35. {h.1011 а).1986} Докажите, что для положительных чисел $a_1\geq a_2\geq a_3$ выполняется неравенство $a_1^2-a_2^2+a_3^2\geq(a_1-a_2+a_3)^2$.

36. {h.1011 б).1986} Докажите, что для положительных чисел $a_1\geq a_2\geq a_3\geq a_4$ выполняется неравенство

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2\geq(a_1-a_2+a_3-a_4)^2.$$

37. {h.1011 в).1986} Докажите, что для положительных чисел $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k$ выполняется неравенство

$$a_1^2-a_2^2+\ldots+(-1)^k a_k^2\geq(a_1-a_2+\ldots+(-1)^k a_k)^2.$$

38. {M.1972} Даны два набора чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$. Известно, что а) $a_1>a_2>\ldots>a_k$, $b_1>b_2>\ldots>b_k$; б) $a_1>b_1$, $a_1+a_2>b_1+b_2$, $a_1+a_2+\ldots+a_k>b_1+b_2+\ldots+b_k$. Докажите, что для любого натурального n справедливо неравенство $a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n>b_1^n+b_2^n+\ldots+b_k^n$.

4. Перестановочные неравенства

Рассмотрим важные частные случаи полученных в предыдущем разделе результатов.

Задача 7. Пусть заданы числа $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k>0$ и $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_k>0$ и пусть $c_1,c_2,\ldots,c_k$ – какая-то перестановка чисел

$a_1,a_2,\ldots,a_k$, а $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$. Докажите, что тогда квазимногочлен

$$f(t)=\left(a_1+b_1\right)^t+\left(a_2+b_2\right)^t+\ldots+\left(a_k+b_k\right)^t-$$
$$-\left(c_1+d_1\right)^t-\left(c_2+d_2\right)^t-\ldots-\left(c_k+d_k\right)^t$$

либо тождественно равен нулю, либо имеет два корня 0 и 1, положителен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицателен при $t\in(0,1)$.

Решение. Воспользуемся результатом задачи 3. Для этого нужно установить, что имеет место равенство

$$A_1+A_2+\ldots+A_k=B_1+B_2+\ldots+B_k$$

и для всех $i=1,\ldots,k-1$ выполняются неравенства

$$A_1+A_2+\ldots+A_k\geq B_1+B_2+\ldots+B_k$$

где $A_j=a_j+b_j$, а символами B_j обозначены числа c_j+d_j, перенумерованные в невозрастающем порядке (очевидно, что числа $A_1,A_2,\ldots,A_k$ тоже расположены в невозрастающем порядке).

Равенство очевидно, так как и его левая и его правая части равны $a_1+a_2+\ldots+a_k+b_1+b_2+\ldots+b_k$. Чтобы проверить выполнение неравенства заметим, что его левая часть равна

$$S=\left(a_1+b_1\right)+\left(a_2+b_2\right)+\ldots+\left(a_i+b_i\right)=$$
$$=\left(a_1+a_2+\ldots+a_i\right)+\left(b_1+b_2+\ldots+b_i\right).$$

Сумму, стоящую в правой части, вычислить, не зная конкретных чисел и способа их перестановки, невозможно. Однако в нее войдет i каких-то чисел $a_{j_1},a_{j_2},\ldots,a_{j_i}$ и i чисел $b_{l_1},b_{l_2},\ldots,b_{l_i}$. И в том и в другом случае индексы не повторяются. Поэтому наибольшее из чисел $a_{j_1},a_{j_2},\ldots,a_{j_i}$ не превосходит a_1, следующее по величине не превосходит a_2 и так далее. Значит, сумма $a_{j_1}+a_{j_2}+\ldots+a_{j_i}\leq a_1+a_2+\ldots+a_i$. Аналогично доказывается, что $b_{l_1}+b_{l_2}+\ldots+b_{l_i}\leq b_1+b_2+\ldots+b_i$, откуда и следует нужное неравенство.

Таким образом, условие задачи 3 выполнено, а значит, справедлив и ее вывод.

Задача 8. Пусть заданы числа $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k>0$ и $0<b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_k$ и пусть $c_1,c_2,\ldots,c_k$ – какая-то перестановка чисел

$a_1,a_2,\ldots,a_k$, а $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$. Докажите, что тогда квазимногочлен

$$f(t)=\left(a_1+b_1\right)^t+\left(a_2+b_2\right)^t+\ldots+\left(a_k+b_k\right)^t-$$
$$-\left(c_1+d_1\right)^t-\left(c_2+d_2\right)^t-\ldots-\left(c_k+d_k\right)^t$$

либо тождественно равен нулю, либо имеет два корня 0 и 1, отрицателен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и положителен при $t\in(0,1)$.

Решение. Можно вновь воспользоваться результатом задачи 3, однако проще воспроизвести в общих чертах ее решение. Воспользуемся индукцией по k.

Начнем с $k=2$. Пусть, например, $a_1=c_1$ (случай $a_1=c_2$ рассматривается аналогично). Если $b_1=d_1$, то рассматриваемый квазимногочлен очевидно тожественно равен нулю. В противном случае $c_1+d_1>a_1+b_1>c_2+d_2$ и $c_1+d_1>a_2+b_2>c_2+d_2$, и тогда нужный результат немедленно следует из правила Декарта, так как последовательность коэффициентов квазимногочлена содержит две перемены знака.

Пусть утверждение доказано для всех квазимногочленов рассматриваемого вида, содержащих менее $2k$ членов, и пусть

$$f(t)=\left(a_1+b_1\right)^t+\left(a_2+b_2\right)^t+\ldots+\left(a_k+b_k\right)^t-$$
$$-\left(c_1+d_1\right)^t-\left(c_2+d_2\right)^t-\ldots-\left(c_k+d_k\right)^t.$$

Найдем индекс i, для которого $c_i=a_k$, и индекс j, для которого $d_j=b_k$. Если $i=j$, то слагаемые (a_k+b_k) и (c_i+d_i) попросту сократятся и можно воспользоваться предположением индукции. В противном случае представим квазимногочлен $f(t)$ в виде $f(t)=g(t)+[f(t)-g(t)]$, где $g(t)=(c_j+d_i)^t+(a_k+b_k)^t-(c_i+d_i)^t-(c_j+d_j)^t=(c_j+d_i)^t+(a_k+b_k)^t-(a_k+d_i)^t-(c_j+b_k)^t$. По определению $a_k\le c_j$ и $b_k\ge d_i$, поэтому $a_k+d_i\le a_k+b_k\le c_j+b_k$. А поскольку $(c_j+d_i)+(a_k+b_k)=(a_k+d_i)+(c_j+b_k)$, выполняются и неравенства $a_k+d_i\le c_j+d_i\le c_j+b_k$. Следовательно, в силу правила Декарта квазимногочлен $g(t)$ имеет два корня 0 и 1, отрицателен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и положителен на интервале $(0,1)$.

Рассмотрим теперь остаток $f(t)-g(t)$. Он имеет вид $f(t)-g(t)=\left(a_1+b_1\right)^t+\left(a_2+b_2\right)^t+\ldots+\left(a_{k-1}+b_{k-1}\right)^t-h(t)$, где квазимногочлен $h(t)$ представляет собой сумму $k-1$ скобок вида (a_i+b_j), где индексы i и j пробегают без повторений множество $\{1,\ldots,k-1\}$. Поэтому к квазимногочлену $f(t)–g(t)$ применимо предположение индукции и поэтому он либо тождественно равен нулю, либо имеет два корня 0 и 1, отрицателен на интервалах $(–\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и положителен на интервале $(0,1)$.

Теперь шаг индукции завершается очевидным образом.

Задача решена. Аналогичные индуктивные рассуждения показывают, что в условиях задачи числа $a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_k+b_k$ мажорируют числа $c_1+d_1,c_2+d_2,\ldots,c_k+d_k$, что интересно само по себе.

Далее следуют примеры на применение данных результатов.

Упражнения

39. {M.1971} Даны два набора чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $b_1,b_2,\ldots,b_k$. Расположим числа a_i в возрастающем порядке, а числа b_i – в убывающем порядке. Получатся наборы $a_{(1)}\le a_{(2)}\le\ldots\le a_{(k)}$, $b_{[1]}\ge b_{[2]}\ge\ldots\ge b_{[k]}$. Докажите, что

$$\max\left\{a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_k+b_k\right\}\ge\max\left\{a_{(1)}+b_{[1]},a_{(2)}+b_{[2]},...,a_{(k)}+b_{[k]}\right\}.$$

40. {Л.1991} Даны неотрицательные числа a,b,c и d. Докажите неравенство $\max\{a^2–b,\ b^2–c,\ c^2–d,\ d^2–a\}\ge\max\{a^2–a,\ b^2–b,\ c^2–c,\ d^2–d\}$.

41. {W.1975} Пусть a_i, b_i $(i=1,\ldots,k)$ – действительные числа, такие, что $a_1\ge a_2\ge...\ge a_k$ и $b_1\ge b_2\ge...\ge b_k$. Докажите, что если $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – любая перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$, то

$$\sum_{i=1}^{k}\left(a_i-b_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{k}\left(a_i-d_i\right)^2.$$

42. Пусть a_i, b_i $(i=1,\ldots,k)$ – действительные числа, такие, что $a_1\ge a_2\ge...\ge a_k$ и $b_1\ge b_2\ge...\ge b_k$. Докажите, что если $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – любая перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$, то

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k\ge a_1d_1+a_2d_2+\ldots+a_kd_k.$$

43. Пусть a_i, b_i $(i=1,\ldots,k)$ – действительные числа, такие, что $a_1\ge a_2\ge...\ge a_k$ и $b_1\le b_2\le...\le b_k$. Докажите, что если $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – любая перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$, то

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k\le a_1d_1+a_2d_2+\ldots+a_kd_k.$$

44. Даны неотрицательные числа a,b,c. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}.$$

45. {М.1950} Пусть a,b,c - длины сторон треугольника, A,B,C - величины противоположных углов. Доказать, что $Aa+Bb+Cc\geq(Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb)/2$.

46. {Р.1998} Докажите, что если $1<a<b<c$, то

$$\log_a(\log_a b)+\log_b(\log_b c)+\log_c(\log_c a)>0.$$

47. Есть две группы чисел $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k > 0$ и $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_k > 0$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k\geq a_1b_k+a_2b_{k-1}+\ldots+a_kb_1.$$

48. {М.1959} Имеется два набора чисел: $a_1 > a_2 > ... > a_k$ и $b_1 > b_2 > ... > b_k$. Докажите, что $a_1b_1+\ldots+a_kb_k>a_1b_k+\ldots+a_kb_1$.

49. {Н.1935} Пусть $c_1,c_2,\ldots,c_k$ – некоторая перестановка положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Докажите, что $\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+...+\frac{a_k}{c_k}\geq k$.

50. {Р.1998} Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c}=\sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c}=$$
$$=\sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x=y=z$ или $a=b=c$.

51. {Л.1997} Докажите, что при $a\geq2$, $b\geq2$, $c\geq2$ выполняется неравенство $(b^3+a)(c^3+b)(a^3+c)\geq125abc$.

52. Пусть a и b – неотрицательные числа. Докажите, что

$$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\geq\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right).$$

53. {Румыния.1979}Даны положительные числа $a_1<a_2<...<a_k$. Для какой перестановки $b_1,b_2,...,b_k$ этих чисел произведение $(a_1+1/b_1)(a_2+1/b_2)...(a_k+1/b_k)$ максимально?

54. {W.1978}Пусть $\{a_k\}$ – последовательность различных натуральных чисел. Доказать, что для каждого натурального n выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{i^2}\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$.

55. {h1177.1989} Докажите, что для положительных чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$, не превосходящих 1, выполняется неравенство $(1+a_1)^{1/a_2}(1+a_2)^{1/a_3}(1+a_3)^{1/a_4}...(1+a_k)^{1/a_1}\geq 2^k$.

5. Монгольское неравенство

Рассмотрим пример, в котором развитая теория применяется в полном объеме.

Задача 9. (Монгольская олимпиада, 1996 г.) Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$), удовлетворяющих условию $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k$, имеет место неравенство

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k+a_1}{2}\leq\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k+a_1+a_2}{3}.$$

Решение. В силу полученных выше результатов достаточно доказать, что последовательность $t_1=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$, $t_2=\dfrac{a_2+a_3+a_4}{3},\ldots$ $\ldots,t_k=\dfrac{a_k+a_1+a_2}{3}$ мажорирует последовательность $d_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}$, $d_2=\dfrac{a_2+a_3}{2},\ldots,d_k=\dfrac{a_k+a_1}{2}$.

Непосредственно проверяется, что

$$d_1\geq t_1\geq d_2\geq t_2\geq\ldots\geq d_{k-2}\geq t_{k-2}\geq d_{k-1},\ d_1\geq d_k\geq d_{k-1},\ t_1\geq t_k\geq t_{k-1}\geq t_{k-2},$$

и это, пожалуй, все, что можно сказать в общем случае о взаимном расположении чисел t_i и d_j.

Выберем индексы l, m, и n из множества $\{1,2,\ldots,k-1\}$ так, что

$$d_l\geq t_{k-1}\geq d_{l+1},\ d_n\geq t_k\geq d_{n+1},\ d_m\geq d_k\geq d_{m+1}.$$

Последнее неравенство означает, в частности, что

$$a_m+a_{m+1}\geq a_k+a_1\geq a_{m+1}+a_{m+2}.$$

Пусть $t_{[1]},t_{[2]},\ldots,t_{[k]}$ обозначают числа $t_1,t_2,\ldots,t_k$, перенумерованные в невозрастающем порядке, а $d_{[1]},d_{[2]},\ldots,d_{[k]}$ – числа $d_1,d_2,\ldots,d_k$, перенумерованные в порядке невозрастания. В частности,

$$d_{[1]}=d_1,\ldots,d_{[m]}=d_m,\ d_{[m+1]}=d_k,\ d_{[m+2]}=d_{m+3},\ldots,d_{[k]}=d_{k-1}.$$

Определим последовательность S_i рекуррентными соотношениями

$$S_0=0,\ S_i=S_{i-1}+d_{[i]}-t_{[i]},\ i=1,\ldots,k.$$

Нам нужно доказать, что $S_i\geq 0$ для $i=1,\ldots,k$.

Рассмотрим три случая.

1. Если $t_{k-1}\geq d_k$, то последовательность $S_0,S_1,\ldots,S_l$ не убывает, так как на каждом шаге добавляется неотрицательное число. А так как $S_0=0$, все ее члены неотрицательны. А последовательность

$S_{l+1},S_{l+2},\ldots,S_k$ не возрастает и $S_k=0$, поэтому и ее члены неотрицательны. Итак, в этом случае задача решена.

2. Случай $d_k \geq t_k$ рассматривается аналогично.

3. Остается рассмотреть случай $t_k > d_k > t_{k-1}$. Последовательность $S_0,S_1,\ldots,S_n$ не убывает и начинается с нуля, поэтому все ее члены неотрицательны.

Последовательность $S_{l+1},S_{l+2},\ldots,S_k$ не возрастает и оканчивается нулем, поэтому тоже состоит из неотрицательных чисел.

Последовательность $S_{n+1},S_{n+2},\ldots,S_m$ не возрастает, а последовательность $S_{m+1},S_{m+2},\ldots,S_l$ не убывает. Чтобы доказать, что все их члены неотрицательны, достаточно доказать неравенство $S_m \geq 0$ и $S_{m+1} \geq 0$.

Первое из них перепишется в виде

$$t_{[1]}+t_{[2]}+\ldots+t_{[m]} \leq d_{[1]}+d_{[2]}+\ldots+d_{[m]}$$

или

$$t_1+t_2+\ldots+t_{m-1}+t_k \leq d_1+d_2+\ldots+d_m.$$

В исходных обозначениях будем иметь

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\ldots+(a_{m-1}+a_m+a_{m+1})+(a_k+a_1+a_2)}{3} \leq$$

$$\leq \frac{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_m+a_{m+1})}{2}$$

или

$$\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+a_3+\ldots+a_{m-1}+\frac{2}{3}a_m+\frac{1}{3}a_{m+1}+\frac{1}{3}a_k+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}a_1+a_2+\ldots+a_m+\frac{1}{2}a_{m+1}.$$

После сокращения получим $\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{3}a_k \leq \frac{1}{3}a_m+\frac{1}{6}a_{m+1}$ и

$$\frac{1}{6}\left(a_1+a_k\right)+\frac{1}{6}a_k \leq \frac{1}{6}\left(a_m+a_{m+1}\right)+\frac{1}{6}a_{m+1}.$$

Но $a_1+a_k \leq a_m+a_{m+1}$ в силу определения индекса m, а $a_k \leq a_{m+1}$ в силу упорядоченности чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Неравенство доказано.

Докажем неравенство $S_{m+1} \geq 0$, то есть

$$t_{[1]}+t_{[2]}+\ldots+t_{[m+1]} \leq d_{[1]}+d_{[2]}+\ldots+d_{[m+1]}$$

или

$$t_1+t_2+\ldots+t_m+t_k\le d_1+d_2+\ldots+d_m+d_k.$$

В исходных обозначениях получим

$$\frac{(a_1+a_2+a_3)+(a_2+a_3+a_4)+\ldots+(a_m+a_{m+1}+a_{m+2})+(a_k+a_1+a_2)}{3}\le$$

$$\le\frac{(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots+(a_m+a_{m+1})+(a_k+a_1)}{2}$$

или

$$\frac{1}{3}a_1+\frac{2}{3}a_2+a_3+\ldots+a_m+\frac{2}{3}a_{m+1}+\frac{1}{3}a_{m+2}+\frac{1}{3}a_k+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}a_2\le$$

$$\le\frac{1}{2}a_1+a_2+\ldots+a_m+\frac{1}{2}a_{m+1}+\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}a_1.$$

После сокращения будем иметь $\frac{1}{6}a_{m+1}+\frac{1}{3}a_{m+2}\le\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{6}a_k$ и

$$\frac{1}{6}\left(a_{m+1}+a_{m+2}\right)+\frac{1}{6}a_{m+2}\le\frac{1}{6}\left(a_1+a_k\right)+\frac{1}{6}a_1,$$

что также справедливо в силу определения индекса m и упорядоченности чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$.

Все случаи рассмотрены и задача решена.

В следующих упражнениях обсуждается связь монгольского неравенства с другой известной задачей – неравенством Шапиро. Об истории монгольского неравенства можно прочесть в [8], а не менее увлекательная история неравенства Шапиро изложена в [9].

Упражнения

56. {h1250 в).1990} Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\ge3$), удовлетворяющих условию $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k$, имеет место неравенство $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_k+a_1}+\frac{a_k}{a_1+a_2}\ge\frac{k}{2}$.

57. {h1250 в).1990} Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\ge3$), удовлетворяющих условию $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k$, имеет место неравенство

$$\frac{a_1}{a_{k-1}+a_k}+\frac{a_2}{a_k+a_1}+\frac{a_3}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_{k-3}+a_{k-2}}+\frac{a_k}{a_{k-2}+a_k}\ge\frac{k}{2}.$$

58. Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$), удовлетворяющих условию $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k$, имеет место неравенство

$$\frac{a_1}{a_k+a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_3}+\frac{a_3}{a_2+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}+a_k}+\frac{a_k}{a_{k-1}+a_1}\geq\frac{k}{2}.$$

59. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 4$) – положительные числа. Положим $a_{i+k}=a_i$ для любого i. Докажите неравенство

$$\left[(a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_k+a_{k+1})\right]\times$$
$$\times\left[(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_2+a_3+a_4+a_5)\ldots(a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})\right]\leq$$
$$\leq\left[(a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\ldots(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\right]^2.$$

60. {Л.2000} Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$) имеет место неравенство

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_2+a_3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k+a_1}{2}\leq\frac{a_1+a_2+a_3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{a_2+a_3+a_4}{2\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k+a_1+a_2}{2\sqrt{2}}.$$

61. {h1250 a).1990} Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$) имеет место неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_k+a_1}+\frac{a_k}{a_1+a_2}\geq\left(\sqrt{2}-1\right)k.$$

62. Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$) имеет место неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_k+a_1}+\frac{a_k}{a_1+a_2}\geq$$
$$\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3\ldots+a_{k-1}a_k+a_{k-1}a_1+a_ka_1+a_ka_2)}.$$

63. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – неотрицательные числа. Докажите, что имеет место неравенство
$2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2\geq a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+a_3(a_4+a_4)+a_4(a_5+a_1)+a_5(a_1+a_2)$.

64. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – неотрицательные числа. Докажете неравенство $\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\frac{a_3}{a_4+a_5}+\frac{a_4}{a_5+a_1}+\frac{a_5}{a_1+a_2}\geq\frac{5}{2}$.

65. {h1150.1989} Докажите, что для положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ ($k\geq 3$) имеет место неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{a_k+a_1}+\frac{a_k}{a_1+a_2}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2}{2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)}.$$

6. Мультипликативные аналоги

В качестве мультипликативного аналога неравенства Чезаро можно рассматривать следующий результат.

Задача 10. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c выполняется неравенство $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$.

Решение. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=a^t+b^t+c^t-\left(\sqrt{ab}\right)^t-\left(\sqrt{ac}\right)^t-\left(\sqrt{bc}\right)^t=$$

$$=\left[\frac{1}{2}a^t-\left(\sqrt{ab}\right)^t+\frac{1}{2}b^t\right]+\left[\frac{1}{2}a^t-\left(\sqrt{ac}\right)^t+\frac{1}{2}c^t\right]+\left[\frac{1}{2}b^t-\left(\sqrt{bc}\right)^t+\frac{1}{2}c^t\right].$$

В силу правила Декарта каждый из квазимногочленов в квадратных скобках имеет не более двух корней с учетом их кратности. Но непосредственно проверяется, что у каждого из них имеется корень t=0 кратности 2. Значит, других корней у этих квазимногочленов нет и каждый из них принимает лишь неотрицательные значения. Но тогда и квазимногочлен $f(t)$ неотрицателен. Неравенство $f(1)\geq 0$ искомое.

Естественное обобщение этого решения выглядит следующим образом.

Задача 11. Пусть множества положительных чисел $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ и $\{b_1,b_2,\ldots,b_k\}$ не совпадают, а сами числа удовлетворяют условию

$$\ln b_i=x_{i1}\ln a_1+x_{i2}\ln a_2+\ldots+x_{ik}\ln a_k,\ i=1,\ldots,k,$$

где x_{ij} – неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ik}=1,\ i=1,\ldots,k \text{ и } x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{kj}=1,\ j=1,\ldots,k,$$

Тогда квазимногочлен $f(t)=a_1^t+a_2^t+\ldots+a_k^t-b_1^t-b_2^t-\ldots-b_k^t$ имеет единственный корень t=0 кратности 2.

Решение. Третье из данных условий гарантирует, что квазимногочлен $f(t)$ может быть представлен как сумма квазимногочленов $f_i(t) = x_{i1}a_1^t + x_{i2}a_2^t + ... + x_{in}a_n^t - b_i^t$, $i=1,\dots,k$. Второе условие говорит о том, что при $t=0$ эти квазимногочлены обращаются в нуль, а из первого условия следует, что для каждого квазимногочлена этот корень кратный. В силу правила Декарта других корней нет и квазимногочлены $f_i(t)$ положительны при $t\neq 0$. Значит то же справедливо и для квазимногочлена $f(t)$.

Нетрудно получить и следующий факт.

Задача 12. Пусть $k \geq 2$ и числа $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_k > 0$ и $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_k > 0$ таковы, что для всех $i = 1,...,k-1$ выполняются неравенства

$$\ln a_1 + ... + \ln a_i \geq \ln b_1 + ... + \ln b_i \tag{12}$$

и имеет место равенство

$$\ln a_1 + ... + \ln a_k = \ln b_1 + ... + \ln b_k \,. \tag{13}$$

Докажите, что тогда квазимногочлен

$$f(t) = a_1^t + a_2^t + ... + a_k^t - b_1^t - b_2^t - ... - b_k^t$$

принимает лишь неотрицательные значения.

Решение. Используя задачу 6 с заменой переменных $a_i \to \ln a_i$, $b_i \to \ln b_i$, придем к выводу, что выполняются условия предыдущей задачи. Откуда моментально получается нужное утверждение.

Понятно, что условия (12) и (13) эквивалентны условиям

$$a_1 a_2 \dots a_i \geq b_1 b_2 \dots b_i \tag{14}$$

и

$$a_1 a_2 \dots a_k = b_1 b_2 \dots b_k \tag{15}$$

соответственно. Также полезно иметь в виду, что в силу равенства (15) неравенство (14) эквивалентно неравенству

$$a_{i+1} \dots a_k \leq b_{i+1} \dots b_k. \tag{16}$$

Приведем примеры использования полученных результатов.

Задача 13. {Л.1972} Числа a, b, c заключены между 0 и 1. Докажите, что $a + b + c - 2\sqrt{abc} \geq ab + bc + ac - 2abc$.

Решение. Рассмотрим два набора из пяти чисел a,b,c,abc,abc и $ab,bc,ac,\sqrt{abc}$, $\sqrt{abc}$. Для того, чтобы воспользоваться результатом предыдущей задачи, нужно проверить одно равенство и четыре неравенства. Равенство проверяется непосредственно. Два первых неравенства следуют из того, что два самых больших из трех чисел a,b,c не могут быть меньше какого-то из чисел набора $ab,bc,ac,\sqrt{abc}\,,\sqrt{abc}$. Два других неравенства следуют из того, что число abc не превосходит любого из чисел этого набора.

Итак, в силу результата предыдущей задачи квазимногочлен $f(t)=a^t+b^t+c^t+2(abc)^t-(ab)^t-(bc)^t-(ac)^t-2\left(\sqrt{abc}\right)^t$ принимает лишь неотрицательные значения. Поэтому $f(1)\geq 0$. Задача решена.

Упражнения

66. {У.1997} Найдите все значения t, для которых выполняется равенство $9^t+4^t+1=6^t+3^t+2^t$.

67. Пусть P – периметр, R – радиус описанной окружности, h_1, h_2, h_3 – длины высот произвольного треугольника. Докажите неравенство $P\geq\sqrt{2R}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{h_3}\right)$.

68. {h994.1986} При каком наибольшем значении k неравенство $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geq k(ab+bc+ca)^2$ выполняется при всех значениях a, b и c.

69. {У.2000} Пусть a, b, c – неотрицательные числа, такие что $a+b+c=3$. Докажите, что $2(a^3b+b^3c+c^3a)\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a-1)$.

70. {h840 б).1983} Докажите, что для любых положительных чисел a,b,c выполняется неравенство $a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$.

71. {У.1995} Докажите, что для произвольных действительных чисел x и y выполняется неравенство $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{3}\geq\dfrac{x^3y+xy^3}{2}$.

72. {h1364 а).1992} Пусть $a+b+c=1$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$. Докажите неравенство $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geq 1$.

73. {h1364 б).1992} Пусть $a+b+c=1$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$. Докажите неравенство $a^3+b^3+c^3+abcd\geq\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{9}+\dfrac{d}{27}\right\}$.

74. {М.1982} Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+a^2bc+b^2ac+c^2ab\geq 0.$$

75. {h506.1978} Докажите, что для положительных a, b, c и d справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geq a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2.$$

76. {S.1996} Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство $\sqrt{\frac{ab}{c^2}}+\sqrt{\frac{ac}{b^2}}+\sqrt{\frac{bc}{a^2}} \geq \frac{ab}{c^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{bc}{a^2}$.

77. Докажите, что если a, b, c – положительные числа, то

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

78. {Нью-Йорк.1975} Верно ли, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $a_{k+1}=a_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^k \geq \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)?$$

79. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $a_{k+1}=a_1$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\frac{k-1}{2}} \geq \left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\prod_{i=1}^{k}a_i^{\frac{1}{k}}$.

80. {A11193.2005} Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и $a_{k+1}=a_1$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{k-1} \geq -n+\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\prod_{i=1}^{k}a_i^{\frac{1}{k}} /$$

81. {Л.2000} Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, удовлетворяющих условию $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ справедливо неравенство $\frac{a_1a_2}{a_3}+\frac{a_2a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}a_k}{a_1}+\frac{a_ka_1}{a_2} \geq a_1+a_2+\ldots+a_k$.

82. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, удовлетворяющих условию $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1a_2}{a_k}+\frac{a_2a_3}{a_1}+\ldots+\frac{a_{k-1}a_k}{a_{k-2}}+\frac{a_ka_1}{a_{k-1}} \geq a_1+a_2+\ldots+a_k.$$

83. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, удовлетворяющих условию $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1a_3}{a_2}+\frac{a_2a_4}{a_3}+\ldots+\frac{a_{k-1}a_1}{a_k}+\frac{a_ka_2}{a_1}\geq a_1+a_2+\ldots+a_k\,.$$

84. Докажите, что если фиксированы два положительных числа $m<M$, то для любых чисел $a,b,c\in[m,M]$ справедливо неравенство $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq 2\frac{M}{m}+2\frac{m}{M}+5$.

85. {США.1977} Докажите, что если фиксированы два положительных числа $m<M$, то для любых чисел $a,b,c,d,e\in[m,M]$ справедливо неравенство

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leq 25+6\left(\sqrt{\frac{M}{m}}-\sqrt{\frac{m}{M}}\right)^2.$$

86. Пусть k – нечетное число, m и M – положительные числа, а числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$ удовлетворяют условиям $m<a_i<M$ ($i=1,2,\ldots,k$). Докажите, что тогда

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)\leq\frac{(M+m)^2}{4Mm}k^2-\frac{(M-m)^2}{4Mm}.$$

87. {В.1978} Пусть m и M – положительные числа, а числа $a_1,a_2,\ldots,a_k$ удовлетворяют условиям $m<a_i<M$ ($i=1,2,\ldots,k$). Докажите, что тогда

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)\leq\frac{(M+m)^2}{4Mm}k^2.$$

7. Трехчленные последовательности.

Результат задачи 2 может быть усилен.

Задача 14. Пусть числа $a_1\geq a_2\geq a_3>0$ и $b_1\geq b_2\geq b_3>0$ удовлетворяют условиям $a_1>b_1$, $a_3<b_3$. Докажите, что тогда квазимногочлен $f(t)=a_1^t+a_2^t+a_3^t-b_1^t-b_2^t-b_3^t$ имеет два корня.

Решение. Если $a_1a_2a_3=b_1b_2b_3$, то нужное утверждение является частным случаем результата задачи 12.

Если $a_1a_2a_3<b_1b_2b_3$, то производная квазимногочлена $f(t)$ при $t=0$ отрицательна, а поскольку $f(0)=0$, значения $f(t)$ при достаточно

малых $t>0$ отрицательны. А при $t\to\infty$ знак значения квазимногочлена определяется знаком экспоненты с наибольшим основанием, то есть $f(t)>0$. следовательно, при некотором положительном s выполняется равенство $f(s)=0$, то есть

$$a_1^s+a_2^s+a_3^s=b_1^s+b_2^s+b_3^s. \qquad (17)$$

Кроме того, выполняются неравенства $a_1^s\ge a_2^s\ge a_3^s>0$, $b_1^s\ge b_2^s\ge b_3^s>0$, $a_1^s\ge b_1^s$ и $a_3^s\le b_3^s$. Но тогда в силу результата задачи 2, квазимногочлен $g(t)=\left(a_1^s\right)^t+\left(a_2^s\right)^t+\left(a_3^s\right)^t-\left(b_1^s\right)^t-\left(b_2^s\right)^t-\left(b_3^s\right)^t$ имеет два корня 0 и 1. Но $g(t)=f(st)$, поэтому квазимногочлен $f(t)$ имеет два корня 0 и $\dfrac{1}{s}$.

Случай $a_1a_2a_3>b_1b_2b_3$ рассматривается аналогично. Теперь производная $f(t)$ при $t=0$ положительна, поэтому $f(t)<0$ при достаточно больших $t<0$, и $f(t)>0$ при $t\to-\infty$, так как положителен коэффициент при экспоненте с самым маленьким основанием a_3. Поэтому при некотором отрицательном s имеет место равенство (17).

А так как $s<0$, выполняются неравенства $a_3^s\ge a_2^s\ge a_1^s>0$, $b_3^s\ge b_2^s\ge b_1^s>0$, $a_3^s\ge b_3^s$ и $a_1^s\le b_1^s$. И опять из результата задачи 2 следует, что квазимногочлен $g(t)$ имеет корни 0 и 1, а квазимногочлен $f(t)$ – корни 0 и $\dfrac{1}{s}$.

Все случаи разобраны, и задача решена.

Доказанное утверждение тоже имеет ряд приложений.

Задача 15. Пусть a, b, c – стороны треугольника, а r_a, r_b, r_c – радиусы его вневписанных окружностей. Докажите, что тогда $r_a^t+r_b^t+r_c^t\ge\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)^t+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)^t$ при $t\ge1$ и при $t\le0$.

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\ge b\ge c$. Поскольку площадь треугольника $S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$, выполняются неравенства $r_a\ge r_b\ge r_c$.

Докажем, что последовательности $r_a \ge r_b \ge r_c$ и $a \ge b \ge c$ удовлетворяют условию предыдущей задачи. Для этого удобно выразить стороны через радиусы вневписанных окружностей.

Из приведенных формул и формулы Герона следует, что

$$r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{S^2}{(p-a)(p-c)} + \frac{S^2}{(p-b)(p-c)} =$$

$$= p(p-c) + p(p-b) + p(p-a) = p^2.$$

Из тех же формул и формулы Герона имеем

$$pS^3 = r_a r_b r_c p(p-a)(p-b)(p-c) = r_a r_b r_c S^2,$$

откуда $S = \dfrac{r_a r_b r_c}{p}$, $p-a = \dfrac{r_b r_c}{p}$ и $a = \dfrac{r_a r_b + r_a r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$. Аналогично $b = \dfrac{r_b r_a + r_b r_c}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$ и $c = \dfrac{r_c r_a + r_c r_b}{\sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c}}$.

Так как $r_a \ge r_b \ge r_c$, имеем $4r_a r_b + 4r_a r_c \ge 3r_b^2 + 2r_b r_c + 3r_c^2$, откуда $4(r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c) \ge 3r_b^2 + 6r_b r_c + 3r_c^2 = 3(r_b + r_c)^2$ и $r_a \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Аналогично $r_c \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$.

Поэтому квазимногочлен

$$f(t) = r_a^t + r_b^t + r_c^t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^t$$

имеет два корня. Один из них равен 0. В силу упр. 24 его производная при $t=0$ неположительна, значит, второй корень неотрицателен.

Кроме того, $a + b + c = \sqrt{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} \le \dfrac{\sqrt{3}}{3}(r_a + r_b + r_c)$, поэтому $f(1) \ge 0$. Следовательно, второй корень находится на отрезке $[0,1]$, а вне этого отрезка $f(t) \ge 0$.

Упражнение

88. {Австрия, 1971} Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^2(b+c-a) + b^2(a+c-b) + c^2(a+b-c) \le 3abc.$$

8. Неравенство Мюрхеда

В заключение докажем одну весьма общую теорему, касающуюся симметрических неравенств. Но прежде получим одно вспомогательное утверждение, по сути, уточняющее решение задачи 3.

Будем говорить, что последовательность $d_1,d_2,\ldots,d_k$ получается из последовательности $c_1,c_2,\ldots,c_k$ с помощью трансформации, если найдутся два индекса i и j такие, что $d_l=c_l$ при $l\neq i,j$ и, кроме того, $c_i<d_i<c_j$, $c_i<d_j<c_j$ и $d_i+d_j=c_i+c_j$.

Задача 16. Докажите, что если последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ мажорирует последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_k$, то последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ получается из последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k$ с помощью конечного числа последовательно применяемых трансформаций.

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k$ и $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_k$. Доказательство проведем индукцией по числу таких индексов i, для которых $a_i\neq b_i$. Если таких индексов нет, то утверждение очевидно. Если их два, то непосредственно из определения мажоризации следует, что последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ получается из последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k$ с помощью одной операции трансформации. Это дает базис индукции.

Пусть последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ мажорирует последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и не совпадает с ней. Тогда для самого маленького индекса i, для которого $a_i\neq b_i$ выполняется неравенство $a_i>b_i$, а для самого большого индекса j, для которого $a_j\neq b_j$ имеет место отношение $a_j<b_j$. А тогда найдутся такие индексы l и m, что $a_l>b_l$, $a_{l+1}=b_{l+1},\ldots,a_{m-1}=b_{m-1}$, $a_m<b_m$. Пусть $\delta=\min\{a_l-b_l,b_m-a_m\}$. Положим $c_l=a_l-\delta$, $d_m=c_m+\delta$ и $c_i=a_i$ при $i\neq l,m$. Числа $c_1,c_2,\ldots,c_k$, перенумерованные в невозрастающем порядке, обозначим $c_{[1]},c_{[2]},\ldots,c_{[k]}$. Последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_k$ получена из последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k$ с помощью одной трансформации, а пара последовательностей $b_1,b_2,\ldots,b_k$ и $c_1,c_2,\ldots,c_k$ содержит меньше несовпадений, чем пара $b_1,b_2,\ldots,b_k$ и $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Кроме того, в силу выбора величины δ $b_1,b_2,\ldots,b_k$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_k$, поэтому можно применить индукционное предположение. Нужное утверждение доказано.

Пусть $t(c_1,c_2,\ldots,c_k;a_1,a_2,\ldots,a_k)$ обозначает одночлен вида $c_1^{a_1}c_2^{a_2}\ldots c_k^{a_k}$. Обозначим $S_k(c_1,c_2,\ldots,c_k;a_1,a_2,\ldots,a_k)$ сумму одночленов $t(c_{\pi(1)},c_{\pi(2)},\ldots,c_{\pi(k)};a_1,a_2,\ldots,a_k)$ по всем подстановкам π множества индексов $1,2,\ldots,k$.

Задача 17. Докажите, что если последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ мажорирует последовательность $a_1,a_2,\ldots,a_k$, то для всех неотрицательных чисел $c_1,c_2,\ldots,c_k$ выполняется неравенство

$$S(c_1,c_2,\ldots,c_k;\ a_1,a_2,\ldots,a_k)\geq S(c_1,c_2,\ldots,c_k;\ b_1,b_2,\ldots,b_k).$$

Решение. В силу результата предыдущей задачи достаточно доказать утверждение для случая, когда последовательность $b_1,b_2,\ldots,b_k$ получается из последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k$ с помощью одной операции трансформации. Пусть эта трансформация затрагивает индексы с номерами l и m. Сгруппируем слагаемые в разности $S_k(c_1,c_2,\ldots,c_k;a_1,a_2,\ldots,a_k)-S_k(c_1,c_2,\ldots,c_k;b_1,b_2,\ldots,b_k)$ так, что на l-м и m-м местах в слагаемых одной группы будет стоять одна и та же пара переменных, например, c_i и c_j. Тогда каждая группа может быть записана в виде

$$S_{k-2}(c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_{j-1},c_{j+1},\ldots,c_k;a_1,\ldots,a_{l-1},a_{l+1},\ldots,a_{m-1},a_{m+1},\ldots,a_k)\times$$
$$\times\left(c_i^{a_m}c_j^{a_l}+c_j^{a_m}c_i^{a_l}-c_i^{b_m}c_j^{b_l}-c_j^{b_m}c_i^{b_l}\right).$$

Поэтому достаточно доказать, что выражение, стоящее в скобках, принимает неотрицательные значения.

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(c_i^{a_m}c_j^{a_l}\right)^t+\left(c_j^{a_m}c_i^{a_l}\right)^t-\left(c_i^{b_m}c_j^{b_l}\right)^t-\left(c_j^{b_m}c_i^{b_l}\right)^t.$$

Он имеет двукратный корень $t=0$. При этом, если $c_i>c_j$, то $c_i^{a_m}c_j^{a_l}>c_i^{b_m}c_j^{b_l}>c_j^{a_m}c_i^{a_l}$ и $c_i^{a_m}c_j^{a_l}>c_j^{b_m}c_i^{b_l}>c_j^{a_m}c_i^{a_l}$, а если $c_i<c_j$, то имеют место обратные неравенства. Следовательно, в силу правила Декарта других корней нет, и квазимногочлен принимает лишь неотрицательные значения. Откуда получается неравенство $f(1)\geq 0$, которое завершает доказательство.

9. Указания и решения

1. Значение квазимногочлена, рассмотренного в решении задачи 1, при $t=-1$ неотрицательно, что и дает нужное неравенство.

2. Функция $f(t)=a^t+b^t+c^t-\left(\frac{a+b}{2}\right)^t-\left(\frac{a+c}{2}\right)^t-\left(\frac{b+c}{2}\right)^t$ при $t=1$ меняет знак с минуса на плюс, значит, в этой точке она возрастает, а ее производная неотрицательна. Это дает нужное неравенство.

3. С учетом условия неравенство переписывается в виде

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{2}{2a+b+c}+\frac{2}{2b+a+c}+\frac{2}{2c+a+b}.$$

Квазимногочлен

$$f(t)=\left(b+c\right)^t+\left(a+c\right)^t+\left(a+b\right)^t-$$

$$-\left(\frac{(a+b)+(a+c)}{2}\right)^t-\left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^t-\left(\frac{(a+c)+(b+c)}{2}\right)^t$$

имеет два корня 0 и 1 и положителен при отрицательных значениях t. Неравенство $f(-1)\geq0$ и нужно доказать.

4. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\geq b\geq c$. Тогда выполняются равенство $(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)=a+b+c$ и неравенства $b+c-a\leq c+a-b\leq a+b-c$, $a+b-c\geq a$, $b+c-a\leq c$. Следовательно, в силу полученного результата квазимногочлен

$$f(t)=\left(a+b-c\right)^t+\left(b+c-a\right)^t+\left(c+a-b\right)^t-a^t-b^t-c^t$$

имеет два корня 0 и 1 и отрицателен на интервале (0,1). Неравенство $f\left(\frac{1}{2}\right)\leq0$ и нужно было доказать.

5. Из решения упражнения 4 следует, что производная квазимногочлена $f(t)=\left(a+b-c\right)^t+\left(b+c-a\right)^t+\left(c+a-b\right)^t-a^t-b^t-c^t$ при $t=0$ неположительна, то есть $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)\leq abc$. Рассмотрим квазимногочлен

$$g(t)=\left(\frac{a}{b+c-a}\right)^t+\left(\frac{b}{c+a-b}\right)^t+\left(\frac{c}{a+b-c}\right)^t-3.$$

В силу правила Декарта он имеет два корня, один из которых равен нулю. Но его производная при $t=0$ неотрицательна, следовательно второй корень отрицателен, а сам квазимногочлен неотрицателен при $t>0$. Неравенство $g(1)\geq0$ искомое.

6. Пусть a,b,c – стороны рассматриваемого треугольника, а S – его площадь. С помощью формул $2S=ah_a=bh_b=ch_c=(a+b-c)r_c=$ $=(b+c-a)r_a=(c+a-b)r_b$ неравенство переписывается в виде
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}.$$
Это неравенство следует из того, что $f(-1)\ge 0$, где f – квазимногочлен рассмотренный в решении предыдущего упражнения.

7. Пусть S_a, S_b, S_c и S – площади треугольников MBC, MAC, MAB и ABC соответственно. Тогда $S_a+S_b+S_c=S$. Умножим доказываемое неравенство на произведение abc сторон треугольника. Получим $(S-S_a)(S-S_b)(S-S_c)\ge 8S_aS_bS_c$ или $(S_b+S_c)(S_a+S_c)(S_a+S_b)\ge 8S_aS_bS_c$. Это неравенство Чезаро.

8. Перепишем неравенство в виде
$$h_ah_bh_c\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\le r_ar_br_c\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right).$$
Выражая высоты и радиусы вневписанных окружностей через стороны треугольника и его площадь, убедимся, что выражения в скобках равны и неравенство переписывается в виде[10]
$$abc\ge(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$
Это неравенство следует из того, что производная квазимногочлена f из решения упражнения 5, при $t=0$ неположительна.

9. Чтобы доказать данное неравенство, достаточно возвести в квадрат неравенство упражнения 4, раскрыть скобки и произвести сокращение.

10. Рассмотрим два множества чисел $a+2^a$, $b+2^b$, $c+2^c$ и $b+2^a$, $c+2^b$, $a+2^c$. Если мы расставим числа в них в невозрастающем порядке, то получим две последовательности, удовлетворяющих условию задачи 2. В самом деле, суммы чисел в них очевидно равны. Далее, функция $y=x+2^x$ возрастает, поэтому большему из чисел первого множества соответствует большее значение аргумента. А поэтому каждое из слагаемых в записи этого числа не меньше соответствующего слагаемого *любого* числа второго множества. Отсюда

[10] Это неравенство тоже предлагалась в журнале American Mathematical Monthly (задача E2284, 1971 г.)

следует первое из нужных неравенств. Второе доказывается аналогично. Поэтому в силу задачи 2 квазимногочлен

$$f(t)=\left(a+2^a\right)^t+\left(b+2^b\right)^t+\left(c+2^c\right)^t-\left(b+2^a\right)^t-\left(c+2^b\right)^t-\left(a+2^c\right)^t$$

имеет два корня 0 и 1 и отрицателен на интервале (0,1). В частности, он отрицателен при $t=\dfrac{1}{2}$, что и дает нужное неравенство.

11. Не более одного сомножителя в левой части данного равенства может быть отрицательно. Но правая часть положительна, значит, и все сомножители в левой части положительны. Тогда квазимногочлен $f(t)=\left(a+b-c\right)^t+\left(b+c-a\right)^t+\left(c+a-b\right)^t-a^t-b^t-c^t$ либо тождественно равен нулю, либо имеет два корня. Последний случай не может реализоваться, так как он имеет два корня 1 и 0, причем по условию второй из них имеет кратность два.

12. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\le b\le c$. Если $a+b-c\ge 0$, то квазимногочлен

$$f(t)=\left(a+b-c\right)^t+\left(b+c-a\right)^t+\left(c+a-b\right)^t-a^t-b^t-c^t$$

по условию имеет корень 3, а, кроме того, два очевидных корня 0 и 1. Значит, как установлено выше, он должен быть тождественно равен нулю. В частности, $a+b-c=a$, откуда $b=c$ и т. д.

Если же $a+b-c<0$, то рассмотрим квазимногочлен

$$g(t)=(a+b-c)\left[(a+b-c)^2\right]^t+(a+c-b)\left[(a+c-b)^2\right]^t+$$

$$+(b+c-a)\left[(b+c-a)^2\right]^t-\left[(a)^2\right]^t-\left[(b)^2\right]^t-\left[(c)^2\right]^t.$$

Он представляется как полусумма трех многочленов

$$g_1(t)=(a+b-c)\left[(a+b-c)^2\right]^t+(a+c-b)\left[(a+c-b)^2\right]^t-2a\left[(a)^2\right]^t,$$

$$g_2(t)=(a+b-c)\left[(a+b-c)^2\right]^t+(b+c-a)\left[(b+c-a)^2\right]^t-2b\left[(b)^2\right]^t,$$

$$g_3(t)=(a+c-b)\left[(a+c-b)^2\right]^t+(b+c-a)\left[(b+c-a)^2\right]^t-2c\left[(c)^2\right]^t.$$

Первые два из них имеют по одной перемене знаков в последовательности их коэффициентов и по одному корню $t=0$. А третий – две перемены знаков и два корня 0 и $-\frac{1}{2}$. Поэтому все три положительны при t=1, если только отличны от тождественного нуля. Дальнейшие рассуждения такие же, как и в предыдущем случае.

13. Квазимногочлен

$f(t) = 2003^t - 2\cdot 2002^t + 2\cdot 2001^t - 2\cdot 2000^t + 2\cdot 1999^t - 2\cdot 1998^t + 1997^t$

имеет шесть перемен знаков в последовательности своих коэффициентов. Но он представим в виде суммы трех квазимногочленов $f_1(t) = 2003^t - 2\cdot 2002^t + 2001^t$, $f_2(t) = 2001^t - 2\cdot 2000^t + 1999^t$ и $f_3(t) = 1999^t - 2\cdot 1998^t + 1997^t$. Каждый из этих трех квазимногочленов имеет в силу правила Декарта по два корня 0 и 1. Значит, каждый из них отрицателен на интервале (0,1), а потому и их сумма отрицательна на этом интервале. Поэтому $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, то есть первое из рассматриваемых чисел меньше второго.

14. Это частный случай задачи 4.

15. Возведем левое неравенство в квадрат и сократим на $\frac{1}{4k}$: $1 < \frac{3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2}{2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2k-2)^2\cdot 2k}$. Для его доказательства рассмотрим квазимногочлен

$$f(t) = 2^t - 2\cdot 3^t + 2\cdot 4^t - \ldots - 2(2k-1)^t + (2k)^t =$$

$$= (2^t - 2\cdot 3^t + 4^t) + (4^t - 2\cdot 5^t + 6^t) + \ldots + ((2k-2)^t - 2(2k-1)^t + (2k)^t).$$

В каждой из скобок стоит квазимногочлен, положительный при отрицательных t и отрицательный на интервале (0,1). Значит, тем же свойством обладает и весь квазимногочлен, а потому его производная при t=0 отрицательна, откуда следует нужное неравенство. Для доказательства правого неравенства заметим, что $\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2k-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2k-2)^2\cdot(2k)^2} = \frac{3\cdot 5^2\cdot 7^2\ldots\cdot(2k-3)^2\cdot(2k-1)}{4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2k-2)^2}\frac{3(2k-1)}{4(2k)^2}$.

Так как $\dfrac{3(2k-1)}{4(2k)^2}<\dfrac{3}{4(2k)}$, достаточно доказать, что $\dfrac{3\cdot 5^2\cdot 7^2 ...\cdot(2k-3)^2\cdot(2k-1)}{4^2\cdot 6^2\cdot ...\cdot(2k-2)^2}<1$. Это делается так же, как и выше.

16. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{a_1+a_2}{2a_3}\right)^t+\left(\frac{a_2+a_3}{2a_4}\right)^t+...+\left(\frac{a_{k-1}+a_k}{2a_1}\right)^t+\left(\frac{a_k+a_1}{a_2}\right)^t-k\,.$$

В силу правила Декарта он имеет два корня. Один из них – это t=0. Второй из них найти не удается, но в силу результата упражнения 14 производная этого квазимногочлена при t=0 неотрицательна, поэтому, если t<0 но достаточно близко к 0, то $f(t)$<0 и, значит, второй корень отрицателен. Следовательно, $f(t)\geq 0$ при t>0, а следовательно, и при t=1/2. Это и дает нужное неравенство.

17. Данное неравенство переписывается в виде

$$\frac{a_2+a_3+a_4+a_5}{4}\cdot\frac{a_1+a_3+a_4+a_5}{4}\cdot ...\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geq a_1a_2...a_5.$$

Теперь результат следует из задачи 4.

18. С учетом условия неравенство перепишется в виде

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+...+\sqrt{a_k}\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{a_2+a_3+...+a_k}{k-1}}+\sqrt{\frac{a_1+a_3+...+a_k}{k-1}}+...+\sqrt{\frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}}.$$

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=a_1^t+a_2^t+...+a_k^t-$$

$$-\left(\frac{a_2+a_3+...+a_k}{k-1}\right)^t-\left(\frac{a_1+a_3+...+a_k}{k-1}\right)^t-...-\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}\right)^t.$$

Он имеет два корня 0 и 1 и отрицателен на интервале (0,1), в частности при $t=\dfrac{1}{2}$, что и требуется доказать (здесь удобнее пользоваться задачей 5).

19. Введем обозначения $a_1 = \sin^2 x_1$, $a_2 = \sin^2 x_2, \ldots, a_{10} = \sin^2 x_{10}$. Тогда нужное неравенство превратится в частный случай неравенства предыдущей задачи при $k=10$.

20. Перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1-a_1}{k-1}\cdot\frac{1+a_1}{k+1}\right)\left(\frac{1-a_2}{k-1}\cdot\frac{1+a_2}{k+1}\right)\ldots\left(\frac{1-a_k}{k-1}\cdot\frac{1+a_k}{k+1}\right)\geq\left(a_1a_2\ldots a_k\right)^2,$$

или с учетом условия

$$\left(\frac{a_2+a_3+\ldots+a_k}{k-1}\cdot\frac{a_1+a_3+\ldots+a_k}{k-1}\cdot\ldots\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{k+1}\cdot\frac{a_1+2a_2+a_3+\ldots+a_k}{k+1}\cdot\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+2a_k}{k+1}\right)\geq\left(a_1a_2\ldots a_k\right)^2.$$

Каждый из наборов чисел

$$\frac{a_2+a_3+\ldots+a_k}{k-1},\frac{a_1+a_3+\ldots+a_k}{k-1},\ldots,\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$$

и

$$\frac{2a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k}{k+1},\frac{a_1+2a_2+a_3+\ldots+a_k}{k+1},\ldots,\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+2a_k}{k+1}$$

мажорирует набор $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поэтому квазимногочлены

$$f(t)=\left(\frac{a_2+a_3+\ldots+a_k}{k-1}\right)^t+\left(\frac{a_1+a_3+\ldots+a_k}{k-1}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$$

и

$$g(t)=\left(\frac{2a_1+a_2+\ldots+a_k}{k+1}\right)^t+\left(\frac{a_1+2a_2+\ldots+a_k}{k+1}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+2a_k}{k+1}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$$

положительны на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицательны на интервале $(0,1)$. Поэтому их производные при $t=0$ отрицательны, откуда следуют неравенства

$$\frac{a_2+a_3+...+a_k}{k-1}\cdot\frac{a_1+a_3+...+a_k}{k-1}\cdot...\cdot\frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1}\ge a_1a_2...a_k$$

и

$$\frac{2a_1+a_2+a_3+...+a_k}{k+1}\cdot\frac{a_1+2a_2+a_3+...+a_k}{k+1}\cdot...\cdot\frac{a_1+a_2+a_3+...+2a_k}{k+1}\ge$$
$$\ge a_1a_2...a_k,$$

перемножая которые получим требуемое. Заметим, что набор из $2k$ чисел

$$\frac{a_2+a_3+...+a_k}{k-1},\frac{a_1+a_3+...+a_k}{k-1},...,\frac{a_1+a_2+...+a_{k-1}}{k-1},$$
$$\frac{2a_1+a_2+a_3+...+a_k}{k+1},\frac{a_1+2a_2+a_3+...+a_k}{k+1},...,\frac{a_1+a_2+a_3+...+2a_k}{k+1}$$

мажорирует набор чисел a_1, a_1, a_2, a_2, a_3,…,a_k, a_k, и поэтому нужное неравенство можно получить и сразу.

21. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k$. Тогда имеем $\frac{a_1}{a_1+a_2+...+a_k}\ge\frac{a_2}{a_1+a_2+...+a_k}\ge...\ge\frac{a_k}{a_1+a_2+...+a_k}$ и

$$\frac{1+a_1}{k+a_1+a_2+...+a_k}\ge\frac{1+a_2}{k+a_1+a_2+...+a_k}\ge...\ge\frac{1+a_k}{k+a_1+a_2+...+a_k}.$$

Кроме того, выполняется неравенство $\frac{a_1+a_2+...+a_i}{a_1+a_2+...+a_k}\ge\frac{(1+a_1)+(1+a_2)+...(1+a_i)}{k+a_1+a_2+...+a_k}$, так как оно эквивалентно неравенствам

$$k(a_1+\ldots+a_i)+(a_1+\ldots+a_i)(a_1+\ldots+a_k)\ge i(a_1+\ldots+a_k)+(a_1+\ldots+a_i)(a_1+\ldots+a_k)$$

и $k(a_1+\ldots+a_i)\ge i(a_1+\ldots+a_k)$, а последнее немедленно следует из условия $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k$. При $i=k$ доказанное неравенство очевидно обращается в равенство. Остается воспользоваться результатами задач 3, 4 и 6.

22. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{1+a_1}{a_1}\right)^t+\left(\frac{1+a_2}{a_2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1+a_k}{a_k}\right)^t-k(k+1)^t.$$

В силу правила Декарта, он имеет не более двух корней. Один из них $t=0$. В силу результата предыдущей задачи, производная этого квазимногочлена при $t=0$ неотрицательна. Поэтому второй корень отрицателен, а при $t>0$ квазимногочлен принимает положительные значения. При $t=\frac{1}{2}$ получаем нужное неравенство.

23. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\geq b\geq c$. Рассмотрим случай, когда $b\geq\frac{a+b+c}{3}$. Тогда выполняются неравенства $a\geq\frac{a+b}{2}\geq b\geq\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{a+c}{2}\geq\frac{b+c}{2}\geq c$, откуда легко следует, что последовательность $\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},\frac{a+c}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}$ мажорирует последовательность $a,b,\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},\frac{a+b+c}{3},c$, откуда следует нужное неравенство. Случай $b\leq\frac{a+b+c}{3}$ рассматривается аналогично.

24. Пусть p – полупериметр треугольника, $u=p-a$, $v=p-b$, $w=p-c$. Тогда по формуле Герона $S=\sqrt{(u+v+w)uvw}$, $r_a=S/u$, $r_b=S/v$, $r_c=S/w$, $a=v+w$, $b=u+w$, $c=u+v$. Теперь нужное утверждение следует из результата предыдущего упражнения.

25. Получается из результата упражнения 23 заменой a, b, c на bc, ac, ab соответственно. Разумеется, можно доказать неравенство и непосредственно по той же схеме, что и в упражнении 23.

26. Обозначим $A=\frac{b+2c}{3},B=\frac{c+2a}{3},C=\frac{a+2b}{3}$. Тогда $A+B+C=a+b+c$ и

$$A+\frac{A+B+C}{3}=\frac{b+2c}{3}+\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+2b}{3}+c=C+c,$$

откуда $c=\dfrac{4A+B-2C}{3}$ и

$$\frac{a+b+2c}{4}=\frac{a+b+c+c}{4}=\frac{A+B+C+\dfrac{4A+B-2C}{3}}{4}=\frac{7A+4B+C}{12}.$$

Аналогично $\dfrac{2a+b+c}{4}=\dfrac{7B+4C+A}{12}$ и $\dfrac{a+2b+c}{4}=\dfrac{7C+4A+B}{12}$.

Следовательно, в силу результата задачи 5 квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{b+2c}{3}\right)^t+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^t+\left(\frac{a+2b}{3}\right)^t-$$

$$-\left(\frac{a+b+2c}{4}\right)^t-\left(\frac{2a+b+c}{4}\right)^t-\left(\frac{a+2b+c}{4}\right)^t$$

положителен на интервалах $(-\infty,0)$ и $(1,+\infty)$ и отрицателен на интервале $(0,1)$. Поэтому его производная при t=0 отрицательна, что и дает нужное неравенство.

27. Добавив единицу к каждому слагаемому в левой части, перепишем неравенство в эквивалентной форме

$$\frac{a+b+2c}{b+2c}+\frac{2a+b+c}{c+2a}+\frac{a+2b+c}{a+2b}\geq 4$$

или

$$\frac{3(a+b+2c)}{4(b+2c)}+\frac{3(2a+b+c)}{4(c+2a)}+\frac{3(a+2b+c)}{4(a+2b)}\geq 3.$$

Докажем последнее неравенство. Рассмотрим квазимногочлен $f(t)=\left(\dfrac{3(a+b+2c)}{4(b+2c)}\right)^t+\left(\dfrac{3(2a+b+c)}{4(c+2a)}\right)^t+\left(\dfrac{3(a+2b+c)}{4(a+2b)}\right)^t-3\cdot 1^t$. Из решения предыдущей задачи следует, что одна из дробей в предыдущем выражении меньше 1, а одна – больше. Значит, в силу правила Декарта рассматриваемый квазимногочлен имеет четное число корней, но не больше двух. Один корень t=0 очевиден. Второй корень найти не удается. Но, в силу результата предыдущей задачи, производная рассматриваемого квазимногочлена при t=0 положительна. Поэтому второй корень квазимногочлена $f(t)$ отрицателен, а сам квазимногочлен положителен при $t>0$. В частности, он положителен при $t=1$, что и дает нужное неравенство.

28. Введем новые переменные $u=a+b-c$, $v=a+c-b$, $w=b+c-a$. Числа u,v,w неотрицательны, и сумма их равна 1. В новых переменных нужное неравенство перепишется в виде

$$\frac{3u+3v+2w}{2w}+\frac{3u+2v+3w}{2v}+\frac{2u+3v+3w}{2u}>6.$$

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=u^t+v^t+w^t-\left(\frac{3u+3v+2w}{8}\right)^t-\left(\frac{3u+3w+2v}{8}\right)^t-\left(\frac{3w+3w+2u}{8}\right)^t.$$

Он имеет два корня 0 и 1 и положителен при отрицательных t, поэтому его производная при $t=0$ неположительна, то есть $(3u+3v+2w)(3u+3w+2v)(3v+3w+2u)\geq 8^3uvw$. Значит, производная квазимногочлена

$$g(t)=\left(\frac{3u+3v+2w}{8w}\right)^t+\left(\frac{3u+2v+3w}{8v}\right)^t+\left(\frac{2u+3v+3w}{8u}\right)^t-3$$

при $t=0$ неотрицательна. Но этот квазимногочлен имеет два корня, один из которых равен 0. Следовательно, он положителен при $t>0$. При $t=1$ получим $\frac{3u+3v+2w}{8w}+\frac{3u+2v+3w}{8v}+\frac{2u+3v+3w}{8u}\geq 3$, что значительно сильнее, чем нужно.

29. Обозначим $A_i=a_{i+1}+2a_{i+2}+\ldots+(k-1)a_{k+i-1}$ и перепишем неравенство в виде $\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_2}{A_2}+\ldots+\frac{a_k}{A_k}\geq\frac{2}{k-1}$. Добавляя 1 к каждому слагаемому в левой части, получим эквивалентное неравенство $\frac{a_1+A_1}{A_1}+\frac{a_2+A_2}{A_2}+\ldots+\frac{a_k+A_k}{A_k}\geq k+\frac{2}{k-1}$ или

$$\frac{a_1+A_1}{A_1}+\frac{a_2+A_2}{A_2}+\ldots+\frac{a_k+A_k}{A_k}\geq k\left(\frac{\frac{k(k-1)}{2}+1}{\frac{k(k-1)}{2}}\right).$$

Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{k(k-1)(a_1+A_1)}{(k(k-1)+2)A_1}\right)^t+\left(\frac{k(k-1)(a_2+A_2)}{(k(k-1)+2)A_2}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{k(k-1)(a_k+A_k)}{(k(k-1)+2)A_k}\right)^t-k.$$

В силу правила Декарта он имеет два корня, один из которых есть t=0. Нужно доказать, что $f(1)\geq 0$. Для этого достаточно доказать, что его производная при t=0 неотрицательна, то есть

$$\left(\frac{a_1+A_1}{k(k-1)+2}\right)\left(\frac{a_2+A_2}{k(k-1)+2}\right)\ldots\left(\frac{a_k+A_k}{k(k-1)+2}\right)\geq$$

$$\geq\left(\frac{A_1}{k(k-1)}\right)\left(\frac{A_2}{k(k-1)}\right)\ldots\left(\frac{A_k}{k(k-1)}\right).$$

По определению $A_1+A_2+\ldots+A_k=\frac{k(k-1)}{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)$. Поэтому

$$A_i+\frac{A_1+A_2+\ldots+A_k}{\frac{k(k-1)}{2}}=A_i+a_1+a_2+\ldots+a_k=$$

$$=a_i+2a_{i+1}+\ldots+(k-1)a_{k+i-2}+ka_{k+i-1}=A_{k+i-1}+ka_{k+i-1}.$$

Отсюда $A_i+\frac{A_1+A_2+\ldots+A_k}{\frac{k(k-1)}{2}}+(k-1)A_{k+i-1}=k(A_{k+i-1}+a_{k+i-1})$. Итак, каждый сомножитель в левой части неравенства выражается через сомножители в его правой части с положительными коэффициентами. Следовательно, выполняются условия задачи 4. Поэтому его производная при t=0 положительна, что и требовалось доказать.

30. Квазимногочлен

$$f(t)=a^t+b^t+c^t-\left(\frac{a+2b}{3}\right)^t-\left(\frac{b+2c}{3}\right)^t-\left(\frac{c+2a}{3}\right)^t$$

имеет два корня 0 и 1 и стремится к $+\infty$, когда t неограниченно возрастает. Поэтому его производная при t=0 неположительна, то есть

$\left(\frac{a+2b}{3}\right)\left(\frac{b+2c}{3}\right)\left(\frac{c+2a}{3}\right) \ge abc$. Поэтому производная квазимногочлена $g(t) = \left(\frac{a+2b}{3c}\right)^t + \left(\frac{b+2c}{3a}\right)^t + \left(\frac{c+2a}{3b}\right)^t - 3$ при t=0 неотрицательна. Но этот квазимногочлен имеет два корня, один из которых равен 0, поэтому квазимногочлен положителен при t≥0, в частности при t=2, что и дает нужное неравенство.

31. Квазимногочлены $g(t) = (a+b)^t + (c+d)^t - 2\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^t$ и $h(t) = (b+c)^t + (d+a)^t - 2\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^t$ положительны на интервалах (–∞,0) и (1,+∞) и отрицательны на интервале (0,1). Значит, тем же свойством обладает и квазимногочлен $f(t)=(a+c)g(t)+(b+d)h(t)$. Неравенство $f(-1)\ge 0$ искомое.

32. Перепишем данное неравенство в эквивалентной форме, умножив его на 2 и прибавив к каждому слагаемому единицу:

$$\frac{2a+b+2c+d}{b+2c+d} + \frac{2b+c+2d+a}{c+2d+a} + \frac{2c+d+2a+b}{d+2a+b} + \frac{2d+a+2b+c}{a+2b+c} \ge 6.$$

Квазимногочлены $g(t) = (b+2c+d)^t + (d+2a+b)^t - 2(a+b+c+d)^t$ и $h(t) = (c+2d+a)^t + (a+2b+c)^t - 2(a+b+c+d)^t$ положительны на интервалах (–∞,0) и (1,+∞) и отрицательны на интервале (0,1). Значит, тем же свойством обладает и квазимногочлен $f(t)=(2a+b+2c+d)g(t)+(2b+c+2d+a)h(t)$. Неравенство $f(-1)\ge 0$ – искомое.

33. По условию сумма k самых больших из чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ не превосходит суммы k самых больших из чисел $b_1,b_2,\ldots,b_n$, а эта сумма в свою очередь не превосходит суммы такого же числа самых больших из чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$. Остается воспользоваться транзитивностью отношения «больше или равно».

34. Если одна из скобок в правой части отрицательна, неравенство очевидно. В противном случае рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=(a+b-c)^t+(a+c-b)^t+(b+c-a)^t-$$
$$-(pa+qb+rc)^t-(qa+rb+pc)^t-(ra+pb+qc)^t.$$

Последовательность $(pa+qb+rc)$, $(qa+rb+pc)$, $(ra+pb+qc)$ мажорирует последовательность a, b, c, а последняя в свою очередь мажорирует последовательность $(a+b-c)$, $(a+c-b)$, $(b+c-a)$. Поэтому в силу результата предыдущей задачи квазимногочлен имеет два корня 0 и 1, и его производная при $t=0$ неположительна, откуда и следует нужное неравенство.

35. Так как $a_1 \geq a_1-a_2+a_3 \geq a_3$, то в силу правила Декарта квазимногочлен $f(t)=a_1^t-a_2^t-(a_1-a_2+a_3)^t+a_3^t$ имеет два корня 0 и 1 и неотрицателен при $t=2$, что и требуется доказать.

36. В силу результата предыдущей задачи

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2 \geq (a_1-a_2+a_3)^2-a_4^2=$$
$$=(a_1-a_2+a_3-a_4)(a_1-a_2+a_3+a_4) \geq (a_1-a_2+a_3-a_4)^2.$$

37. Докажем неравенство для нечетных $k=2n-1$. Достаточно установить, что набор чисел $a_2, a_4, \ldots, a_{k-1}, (a_1-a_2+\ldots+(-1)^k a_k)$ мажорирует последовательность $a_1, a_3, \ldots, a_k$. Так как $a_1 \leq a_1-a_2+\ldots+(-1)^k a_k \leq a_k$, найдется такой индекс m, что $a_m \leq a_1-a_2+\ldots+(-1)^k a_k \leq a_{m+1}$. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – числа $a_2, a_4, \ldots, a_{k-1}, (a_1-a_2+\ldots+(-1)^k a_k)$, расположенные в невозрастающем порядке. Определим последовательность S_i рекуррентными соотношениями $S_0=0$, $S_{i+1}=S_i+a_{2i-1}-b_i$. Для $i=1,\ldots,m-1$ последовательность S_i не убывает, так как на каждом шаге добавляется неотрицательная величина $a_{2i-1}-b_i=a_{2i-1}-a_{2i}$, а при $i=m,\ldots,k$ она не возрастает. Поскольку $S_0=S_k=0$, все члены последовательности неотрицательны, откуда следует нужное утверждение. Для четных k неравенство сводится к рассмотренному случаю, как в решении предыдущего упражнения.

38. Пусть $f(t)=a_1^t+a_2^t+\ldots+a_k^t-b_1^t-b_2^t-\ldots-b_k^t$. Покажем, что $f(t)$ не имеет корней на интервале $[0,+\infty)$. Положим $\Delta=\min\{a_1-b_1, a_1+a_2-(b_1+b_2), \ldots, a_1+a_2+\ldots+a_k-(b_1+b_2+\ldots+b_k)\}$. Выберем наибольший индекс l, для которого $\Delta=a_1+a_2+\ldots+a_l-(b_1+b_2+\ldots+b_l)$. Пусть $f(t)=g(t)+h(t)+p(t)$, где $g(t)=(a_1-\Delta)^t+a_2^t+\ldots+a_l^t-b_1^t-b_2^t-\ldots-b_l^t$, $h(t)=a_{l+1}^t+a_{l+2}^t+\ldots+a_k^t-b_{l+1}^t-b_{l+2}^t-\ldots-b_k^t$ и $p(t)=a_1^t-(a_1-\Delta)^t$. Тогда последовательности $a_1-\Delta,a_2,\ldots,a_l$ и $b_1,b_2,\ldots,b_l$ удовлетворяют условию задачи 3, следовательно, квазимногочлен $g(t)$ неотрицателен на интервале $[0,+\infty)$. А квазимногочлен $p(t)$ имеет один корень $t=0$ и строго положителен на $[0,+\infty)$. Задача будет решена, если удастся доказать, что квазимногочлен $h(t)$ неотрицателен на $[0,+\infty)$. Но $h(t)$ обладает всеми свойствами квазимногочлена $f(t)$, но «короче» его. Поэтому можно применить те же рассуждения до тех пор, пока количество слагаемых в остающемся квазимногочлене не станет равной нулю.

39. Неравенство не изменится, если ко всем числам добавить одно и то же число. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что все данные числа положительны. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(a_{(1)}+b_{[1]}\right)^t+\left(a_{(2)}+b_{[2]}\right)^t+\ldots+\left(a_{(k)}+b_{[k]}\right)^t-$$
$$-\left(a_1+b_1\right)^t-\left(a_2+b_2\right)^t-\ldots-\left(a_k+b_k\right)^t.$$

В силу результата предыдущей задачи этот квазимногочлен отрицателен на интервале $(0,+\infty)$. Поэтому первый член при его стандартной записи будет иметь отрицательный коэффициент. Это и есть нужное утверждение.

40. Это частный случай предыдущей задачи для последовательностей $a_1=a^2$, $a_2=b^2$, $a_3=c^2$, $a_4=d^2$, $b_1=-b$, $b_2=-c$, $b_3=-d$, $b_4=-a$.

41. Если мы увеличим все числа a_i на a, левая часть неравенства изменится на $2a(b_1+b_2+\ldots+b_k)+ka^2$, а правая – на $2a(d_1+d_2+\ldots+d_k)+ka^2$. Эти величины равны, так как $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – перестановка чисел $b_1,b_2,\ldots,b_k$. Поэтому получится эквивалентное неравенство. Значит, как и в решении упражнения 39, можно считать, что все данные числа положительны. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(a_1+b_1\right)^t+\left(a_2+b_2\right)^t+\ldots+\left(a_k+b_k\right)^t-$$
$$-\left(a_1+d_1\right)^t-\left(a_2+d_2\right)^t-\ldots-\left(a_k+d_k\right)^t.$$

В силу решения задачи 7 справедливо неравенство $f(2)\geq 0$, что и требуется доказать.

42. Достаточно в неравенстве предыдущей задачи раскрыть скобки и произвести очевидные сокращения.

43. Можно применить результат предыдущей задачи к последовательностям $a_1,a_2,\dots,a_k$ и $-b_1,-b_2,\dots,-b_k$.

44. Обозначим A, B, C числа a, b, c, переставленные в невозрастающем порядке. Тогда $\frac{1}{1+A^2}\le\frac{1}{1+B^2}\le\frac{1}{1+C^2}$, а левая часть доказываемого неравенства равна $\frac{A}{1+A^2}+\frac{B}{1+B^2}+\frac{C}{1+C^2}$. Его правая часть равна $\frac{A}{1+D^2}+\frac{B}{1+E^2}+\frac{C}{1+F^2}$, где D, E, F – какая-то перестановка чисел A, B, C. Поэтому доказываемое неравенство – частный случай результата предыдущей задачи.

45. Перепишем неравенство в виде

$$Aa+Bb+Cc\ge\frac{B+C}{2}a+\frac{A+C}{2}b+\frac{A+B}{2}c.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a\ge b\ge c$. Тогда, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол и так как $\frac{A+B}{2}=\frac{(A+B+C)-C}{2},\dots$, имеем $\frac{B+C}{2}\le\frac{A+C}{2}\le\frac{A+B}{2}$. Остается воспользоваться полученным выше результатом.

46. Многократно используя тождество $\log_x y=\frac{\ln y}{\ln x}$, приведем неравенство к виду $\frac{\ln\ln b}{\ln a}+\frac{\ln\ln c}{\ln b}+\frac{\ln\ln a}{\ln c}>\frac{\ln\ln a}{\ln a}+\frac{\ln\ln b}{\ln b}+\frac{\ln\ln c}{\ln c}$. В силу монотонности логарифма последовательности $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ и $\frac{1}{\ln\ln a},\frac{1}{\ln\ln b},\frac{1}{\ln\ln c}$ противоположно упорядочены, поэтому неравенство $\frac{\ln\ln b}{\ln a}+\frac{\ln\ln c}{\ln b}+\frac{\ln\ln a}{\ln c}\ge\frac{\ln\ln a}{\ln a}+\frac{\ln\ln b}{\ln b}+\frac{\ln\ln c}{\ln c}$ выполняется при всех значениях переменных, больших 1. Равенство в нем может достигаться, только если все числа равны.

47. Это частный случай упражнения 42.

48. Проанализировав решение предыдущей задачи несложно убедиться, что в данном случае неравенство не может обратиться в равенство.

49. Не ограничивая общности можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$ (в противном случае можно просто переставить слагаемые). Тогда для чисел $b_i = \dfrac{1}{a_i}$ выполняются условия $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k$. Поэтому можно применить результат упражнения 43, что и дает нужное неравенство.

50. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \leq b \leq c$. Выберем ту часть равенства, в которой под одним корнем с b стоит среднее из чисел x,y,z. Пусть это будет левая часть (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда последовательности a, b, c и x, y, z упорядочены либо одинаково, либо противоположно. В обоих случаях квазимногочлены

$$f(t) = (x+a)^t + (y+b)^t + (z+c)^t - (y+a)^t - (z+b)^t - (x+c)^t$$

и

$$g(t) = (x+a)^t + (y+b)^t + (z+c)^t - (z+a)^t - (x+b)^t - (y+c)^t$$

либо тождественно равны нулю, либо имеют не более двух корней. Вторая возможность исключается, так как очевидно $f(0)=f(1)=g(0)=g(1)=0$ и по условию $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Значит, оба квазимногочлена тождественно равны нулю. Рассмотрим основание экспоненты, в которой наименьшее из чисел a, b, c складывается с наименьшим из чисел x, y, z. Она не может с чем-то сократиться, если все числа a, b, c и все числа x, y, z попарно различны. Если это не так, то после сокращений достаточно рассмотреть то из оставшихся оснований экспонент, в котором складываются наименьшие из оставшихся чисел.

51. Последовательности a,b,c и a^3,b^3,c^3 упорядочены одинаково, поэтому выполняется неравенство

$$(b^3+a)(c^3+b)(a^3+c) \geq (b^3+b)(c^3+c)(a^3+a).$$

Остается заметить, что при данных условиях $a^3 \geq 4a$….

52. Последовательности a, b и a^2, b^2 упорядочены одинаково, поэтому $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\geq\left(a^2+a+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+b+\frac{3}{4}\right)$. Следовательно, достаточно доказать, что $\left(a^2+a+\frac{3}{4}\right)\geq 2a+\frac{1}{2}$, то есть $a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$.

53. Последовательности $a_1, a_2,\ldots,a_k$ и $1/a_1, 1/a_2,\ldots,1/a_k$ удовлетворяют условию задачи 8, поэтому при любой перестановке $b_1, b_2,\ldots,b_k$ чисел $a_1, a_2,\ldots,a_k$ квазимногочлен

$$f(t)=(a_1+1/a_1)^t+(a_2+1/a_2)^t+\ldots+(a_k+1/a_k)^t-$$
$$-(a_1+1/b_1)^t-(a_2+1/b_2)^t-\ldots-(a_k+1/b_k)^t$$

неположителен на интервале $(-\infty,0)$ и неотрицателен на интервале $(0,1)$. Поэтому его производная при $t=0$ неотрицательна, то есть

$$(a_1+1/a_1)(a_2+1/a_2)\ldots(a_k+1/a_k)\geq(a_1+1/b_1)(a_2+1/b_2)\ldots(a_k+1/b_k).$$

54. Пусть $b_1, b_2,\ldots,b_k$ – числа $a_1, a_2,\ldots,a_k$, расставленные в возрастающем порядке. Тогда в силу результата задачи 8 выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{i^2}\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{i^2}$. Кроме того, в силу различности чисел b_i выполняются неравенства $b_i\geq i$. Поэтому $\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i}{i^2}\geq\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{i^2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$. Из двух доказанных неравенств следует нужный результат.

55. Удобнее доказать два неравенства

$$(1+a_1)^{1/a_2}(1+a_2)^{1/a_3}\ldots(1+a_k)^{1/a_1}\geq(1+a_1)^{1/a_1}(1+a_2)^{1/a_2}\ldots(1+a_k)^{1/a_k}\geq 2^k.$$

Первое из них логарифмированием сводится к частному случаю упражнения 43. Второе выполняется тогда (и только тогда), когда для любых $a\in[0,1]$ выполняется неравенство $(1+a)^{1/a}\geq 2$. Для указанных значений a это следует, например, из неравенства Бернулли $(1+a)^b\geq 1+ab$. Но, пользуясь результатом задачи 3 из [1], можно доказать монотонность функции $(1+a)^{1/a}$ при всех положительных a.

56. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{2(a_1+a_2+a_3)}{3(a_2+a_3)}\right)^t+\left(\frac{2(a_2+a_3+a_4)}{3(a_3+a_4)}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{2(a_{k-1}+a_k+a_1)}{3(a_k+a_1)}\right)^t+\left(\frac{2(a_k+a_1+a_2)}{3(a_1+a_2)}\right)^t-k.$$

В силу правила Декарта число его корней равно 0 или 2. Но очевидно, t=0 – корень, значит корней два. Из монгольского неравенства следует, что производная этого квазимногочлена при t=0 положительна, следовательно, второй корень отрицателен и квазимногочлен положителен при t>0. При t=1 будем иметь

$$\frac{2(a_1+a_2+a_3)}{3(a_2+a_3)}+\frac{2(a_2+a_3+a_4)}{3(a_3+a_4)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{2(a_{k-1}+a_k+a_1)}{3(a_k+a_1)}+\frac{2(a_k+a_1+a_2)}{3(a_1+a_2)}\geq k,$$

откуда после сокращений получается нужное неравенство.

57. Решение полностью аналогично решению предыдущего упражнения.

58. Упражнение решается так же, как два предыдущих.

59. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left[(a_1+a_2)^t+(a_2+a_3)^t+\ldots+(a_k+a_{k+1})^t\right]+$$

$$+\left[(a_1+a_2+a_3+a_4)^t+(a_2+a_3+a_4+a_5)^t+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})^t\right]-$$

$$-2\left[(a_1+a_2+a_3)^t+(a_2+a_3+a_4)^t+\ldots+(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})^t\right]=$$

$$=\left[(a_2+a_3)^t+(a_1+a_2+a_3+a_4)^t-(a_1+a_2+a_3)^t-(a_2+a_3+a_4)^t\right]+$$

$$+\left[(a_3+a_4)^t+(a_2+a_3+a_4+a_5)^t-(a_2+a_3+a_4)^t-(a_3+a_4+a_5)^t\right]+\ldots$$

$$\ldots+\left[(a_{k+1}+a_{k+2})^t+(a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})^t-\right.$$

$$\left.-(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})^t-(a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})^t\right].$$

Он имеет два корня 0 и 1, поэтому его производная при t=0 не положительна, что и дает нужное неравенство.

60. В силу неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим $(a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+a_{i+3})^2 \geq 4(a_i+a_{i+1})(a_{i+2}+a_{i+2})$, поэтому нужное неравенство следует из результата предыдущего упражнения.

61. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{\sqrt{2}(a_2+a_3)}\right)^t+\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{\sqrt{2}(a_3+a_4)}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_k+a_1+a_2}{\sqrt{2}(a_1+a_2)}\right)^t-k\ .$$

В силу правила Декарта он имеет четное число корней, но не более двух. Один из них – t=0, причем в силу результата предыдущего упражнения производная квазимногочлена при t=0 неотрицательна. Значит, второй корень отрицателен, а на интервале $(0,+\infty)$ квазимногочлен положителен. Неравенство $f(1)\geq 0$ дает

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_2+a_3}+\frac{a_2+a_3+a_4}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_{k-1}+a_k+a_1}{a_k+a_1}+\frac{a_k+a_1+a_2}{a_1+a_2}\geq\sqrt{2}k\ .$$

Вычитая 1 из каждой дроби в левой части, получим требуемое.

62. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=(a_1a_2+a_1a_3)\left(\frac{a_1}{a_1a_2+a_1a_3}\right)^t+(a_2a_3+a_2a_4)\left(\frac{a_2}{a_2a_3+a_2a_4}\right)^t+\ldots$$

$$\ldots+(a_{k-1}a_k+a_{k-1}a_1)\left(\frac{a_{k-1}}{a_{k-1}a_k+a_{k-1}a_1}\right)^t+(a_ka_1+a_ka_2)\left(\frac{a_k}{a_ka_1+a_ka_2}\right)^t-$$

$$-(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_ka_1+a_ka_2)\left(\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_ka_1+a_ka_2}\right)^t.$$

Он имеет два корня 0 и 1 и положителен на интервале $(1,+\infty)$. Неравенство $f(2)\geq 0$ искомое.

63. Коэффициент при a_1 в правой части неравенства равен $a_2+a_3+a_4+a_5$. В силу симметрии эта правая часть равна сумме всевозможных попарных произведений a_ia_j (i,j=1,…,5, $i\neq j$). Поэтому неравенство может быть переписано в виде

$$2(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_5^2)\geq(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_4a_5)\ .$$

Это неравенство естественно доказывается методом следующего раздела, но может быть получено и попроще. Перепишем его в виде

$$a_1^2 + \ldots + a_5^2 \geq a_1 \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{4} + \ldots + a_5 \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

и рассмотрим квазимногочлен

$$f(t) = a_1^t + \ldots + a_5^t - \frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{4} a_t^t + \ldots + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} a_5^t.$$

При стандартной записи последовательность его коэффициентов имеет одну перемену знаков, а сам квазимногочлен имеет один корень t=0. Значит, $f(1)\geq 0$, что и требуется доказать.

64. Неравенство следует из результатов двух предыдущих упражнений.

65. Неравенство следует из результата упражнения 62 и неравенств $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2$.

66. Каждый из квазимногочленов $f_1(t) = \frac{1}{2}9^t - 6^t + \frac{1}{2}4^t$, $f_2(t) = \frac{1}{2}9^t - 3^t + \frac{1}{2}1^t$ и $\frac{1}{2}4^t - 2^t + \frac{1}{2}1^t$ имеет две перемены знака, и, значит, не более двух корней с учетом их кратности. Непосредственно проверяется, что как сами квазимногочлены, так и их производные обращаются в ноль при t=0. Следовательно, значения всех квазимногочленов строго положительны при $t\neq 0$. Поэтому и их сумма обращается в ноль только при t=0.

67. Поскольку $2Rh_i = 2\frac{a_1 a_2 a_3}{4S} h_i = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_i}$, неравенство сводится к уже доказанному (здесь a_1, a_2, a_3 и S – стороны и площадь рассматриваемого треугольника).

68. Поскольку неравенство должно выполняться при a=b=c=1, искомое значение $k \geq \frac{2}{3}$. Докажем неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2.$$

После раскрытия скобок и сокращения оно приводится к виду $3a^4+3b^4+3c^4 \ge 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+a^2bc+ab^2c+abc^2$. Теперь достаточно заметить, что выполняются равенства $\ln(a^2b^2)=\frac{1}{2}\ln a^4+\frac{1}{2}\ln b^4$ и $\ln a^2bc=\frac{1}{2}\ln a^4+\frac{1}{4}\ln b^4+\frac{1}{4}\ln c^4$ и четыре аналогичных.

69. Рассмотрим квазимногочлен

$$f(t)=2(a^3b)^t+2(b^3c)^t+2(c^3a)^t-3(a^2b)^t-3(b^2c)^t-3(c^2a)^t+a^t+b^t+c^t=$$
$$=[2(a^3b)^t-3(a^2b)^t+b^t]+[\,2(b^3c)^t-3(b^2c)^t+c^t]+[\,2(c^3a)^t-3(c^2a)^t+a^t].$$

Каждый из квазимногочленов, заключенных в квадратные скобки имеет единственный двукратный корень $t=0$, значит, $f(t)$ неотрицателен при всех t. При $t=1$ получаем нужное неравенство.

70. Равенство $a^2bc=(a^3b)^\alpha(b^3c)^\beta(c^3a)^\gamma$ выполняется, если $3\alpha+\gamma=2$, $\alpha+3\beta=1$, $\beta+3\gamma=1$. Решая эту систему, находим $\alpha=\frac{4}{7}$, $\beta=\frac{1}{7}$, $\gamma=\frac{2}{7}$. Аналогично представляются два других слагаемых из правой части. Остается воспользоваться полученными ранее результатами.

71. При замене чисел их модулями левая часть неравенства не меняется, а правая может только увеличиться. Поэтому можно считать числа x и y положительными. Если $x\ge y$, то $x^4\ge x^2y^2\ge y^4$ и $x^3y\ge xy^3$. Тогда непосредственно проверяются неравенства, доказывающие, что последовательность из шести чисел $\ln x^3y, \ln x^3y, \ln x^3y, \ln x^3y$, $\ln xy^3, \ln xy^3$ мажорирует последовательность $\ln x^4, \ln x^4, \ln x^2y^2$, $\ln x^2y^2, \ln y^4, \ln y^4$, откуда получается нужное неравенство.

72. Рассмотрим случай, когда $b^2\ge ac$ (противоположный случай рассматривается аналогично, «начиная с другого конца»). Достаточно доказать, что набор из логарифмов шести чисел $a^3\ge b^3\ge abc\ge abc\ge abc\ge c^3$ мажорируется набором из логарифмов шести чисел $a^2b\ge ab^2\ge a^2c\ge b^2c\ge ac^2\ge bc^2$. Удобно воспользоваться определением мажорирования в терминах неравенств. Необходимые неравенства и равенство проверяются непосредственно.

73. Если $d\ge\frac{15}{4}$, левая часть неравенства возрастает с ростом d, а правая не меняется, поэтому неравенство следует из результата предыдущей задачи. Если же $d \le \frac{15}{4}$, то разность левой и правой частей доказываемого неравенства возрастает с ростом d в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим чисел a, b, c. И снова все сводится к предыдущей задаче.

74. Достаточно доказать, что набор из логарифмов шести чисел a^4, b^4, c^4, a^2bc, b^2ac, c^2ab мажорируется набором логарифмов чисел a^2b^2, a^2b^2, a^2c^2, a^2c^2, b^2c^2, b^2c^2. Удобно воспользоваться определением мажоризации в терминах неравенств. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \ge b \ge c$. Рассмотрим случай, когда $b^2 \ge ac$ (противоположный случай рассматривается аналогично, «начиная с другого конца»). При сделанных предположениях выполняются неравенства $a^4 \ge a^2b^2 \ge b^4 \ge b^2ac \ge a^2c^2 \ge c^2ab \ge b^2c^2 \ge c^4$ и $a^2b^2 \ge a^2bc \ge b^2ac$. Первое неравенство, подлежащее проверке, принимает вид $a^4 \ge a^2b^2$. Второе может иметь разный вид в зависимости от того, выполняется ли неравенство $b^4 \ge a^2bc$ или нет. В первом случае будем иметь неравенство $a^4b^4 \ge (a^2b^2)^2$, очевидно обращающееся в равенство. Во втором оно примет вид $a^4a^2bc \ge (a^2b^2)^2$, что следует из неравенства $b^4 \le a^2bc$. Остальные неравенства и равенство проверяются аналогично.

75. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \ge b \ge c \ge d$. Тогда имеют место неравенства $a^4 \ge abcd \ge d^4$, $a^2b^2 \ge a^2c^2 \ge a^2d^2 \ge b^2d^2 \ge c^2d^2$ и $a^2c^2 \ge b^2c^2 \ge b^2d^2$. Чтобы доказать, что набор из логарифмов шести чисел $a^2b^2, a^2c^2, a^2d^2, b^2c^2, b^2d^2, c^2d^2$ мажорирует набор логарифмов чисел $a^4, b^4, c^4, d^4, abcd$, $abcd$, придется рассмотреть шесть случаев, в зависимости от выполнения неравенств $a^2d^2 \ge b^2c^2$ или $b^2c^2 \ge a^2d^2$ и $abcd \ge b^4$ или $b^4 \ge abcd \ge c^4$, или $c^4 \ge abcd$. Во всех случаях необходимые неравенства проверяются непосредственно.

76. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \ge b \ge c$. Тогда $\sqrt{\frac{ab}{c^2}} \ge \sqrt{\frac{ac}{b^2}} \ge \sqrt{\frac{bc}{a^2}}$ и $\frac{ab}{c^2} \ge \frac{ac}{b^2} \ge \frac{bc}{a^2}$. Произведения чисел в левой и правой частях неравенства равны 1. По этой причине $\frac{ab}{c^2} \ge 1$, а значит, $\frac{ab}{c^2} \ge \sqrt{\frac{ab}{c^2}}$. Аналогично, $\sqrt{\frac{bc}{a^2}} \le \frac{bc}{a^2}$. Итак, выполнено равенство (15), при i=1 выполнено неравенство (14), а при i=2 – неравенство (16). Поэтому можно воспользоваться результатом задачи 12 для квазимногочлена

$$f(t)=\left(\sqrt{\frac{ab}{c^2}}\right)^t+\left(\sqrt{\frac{ac}{b^2}}\right)^t+\left(\sqrt{\frac{bc}{a^2}}\right)^t-\left(\frac{ab}{c^2}\right)^t-\left(\frac{ac}{b^2}\right)^t-\left(\frac{bc}{a^2}\right)^t.$$

Неравенство $f(1)\geq 0$ искомое.

77. Раскрыв скобки и сократив, получим эквивалентное неравенство $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq 2\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Трижды применив в левой части неравенство Коши для двух чисел получим более сильное неравенство $\sqrt{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt{\frac{b^2}{ac}}+\sqrt{\frac{c^2}{ab}}\geq\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}$. Для доказательства этого неравенства почти дословно проходят рассуждения из предыдущего решения.

78. Да. Обозначим $b_1, b_2,\ldots,b_k$ числа $\frac{a_1}{a_2},\frac{a_2}{a_3},\ldots,\frac{a_k}{a_{k+1}}$, расставленные в неубывающем порядке. Произведение этих чисел равно 1, поэтому при некотором l числа $b_1, b_2,\ldots,b_l$ не меньше 1, о остальные – больше 1. Следовательно, для $i\leq l$ выполняются неравенства $b_i^k\geq b_i$, а при $i>l$ имеют место неравенства $b_i^k\leq b_i$. Значит, для $i\leq l$ справедливы неравенства $b_1^k b_2^k\ldots b_i^k\geq b_1 b_2\ldots b_i$, а при $i>l$ – неравенства $b_i^k b_{i+1}^k\ldots b_k^k\leq b_i b_{i+1}\ldots b_k$. Поэтому для квазимногочлена $f(t)=\left(b_1^k\right)^t+\left(b_2^k\right)^t+\ldots+\left(b_k^k\right)^t-\left(b_1\right)^t-\left(b_2\right)^t-\ldots-\left(b_k\right)^t$ выполняются условия задачи 12. Поэтому квазимногочлен принимает неотрицательные значения. Неравенство $f(1)\geq 0$ и нужно было доказать.

79. Имеем $\ln\frac{a_i^k}{a_1a_2\ldots a_k}=k\ln\frac{a_1}{a_2}+(k-1)\ln\frac{a_2}{a_3}+\ldots+2\ln\frac{a_{k-1}}{a_k}+\ln\frac{a_k}{a_1}$ и равенства, получающиеся из этого циклической перестановкой индексов. Поэтому, разделив эти равенства на $\dfrac{k(k-1)}{2}$, можно применить результат задачи 11. Это дает нужное неравенство.

80. Так как $\left(\dfrac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{k-1}+1\geq\left(\dfrac{a_i}{a_{i+1}}\right)^{\frac{k-1}{2}}$ неравенство следует из результата предыдущего упражнения.

81. Докажем, что квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{a_1a_2}{a_3}\right)^t+\left(\frac{a_2a_3}{a_4}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_{k-1}a_k}{a_1}\right)^t+\left(\frac{a_ka_1}{a_2}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$$

принимает только неотрицательные значения. Обозначим $c_1,c_2,\ldots,c_k$ логарифмы чисел $\dfrac{a_1a_2}{a_3},\dfrac{a_2a_3}{a_4},\ldots,\dfrac{a_{k-1}a_k}{a_1},\dfrac{a_ka_1}{a_2}$, перенумерованные в невозрастающем порядке, а $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – логарифмы чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, тоже перенумерованные в невозрастающем порядке. Из условия следует, что $\dfrac{a_1a_2}{a_3}\leq a_1,\dfrac{a_2a_3}{a_4}\leq a_2,\ldots,\dfrac{a_{k-2}a_{k-1}}{a_k}\leq a_{k-2}$ и $\dfrac{a_{k-1}a_k}{a_1}\geq a_k$. Поэтому последовательность, определенная условиями $S_0=0$, $S_{i+1}=S_i+d_i-c_i$, состоит из двух монотонных отрезков («смену тенденции» обеспечивает лишь член $\dfrac{a_ka_1}{a_2}$, расположенный «неправильно»). А поскольку она начинается и оканчивается нулями, все ее члены неотрицательны. Значит, все ее члены неотрицательны. Отсюда следует, что последовательность $d_1,d_2,\ldots,d_k$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_k$, и рассматриваемый квазимногочлен имеет единственный двукратный корень $t=0$.

82. Докажем, что квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{a_1a_2}{a_k}\right)^t+\left(\frac{a_2a_3}{a_1}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_{k-1}a_k}{a_{k-2}}\right)^t+\left(\frac{a_ka_1}{a_{k-1}}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$$

принимает только неотрицательные значения. Обозначим $c_1,c_2,\ldots,c_k$ логарифмы чисел $\frac{a_1a_2}{a_k},\frac{a_2a_3}{a_1},\ldots,\frac{a_{k-1}a_k}{a_{k-2}},\frac{a_ka_1}{a_{k-1}}$, перенумерованные в невозрастающем порядке, а $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – логарифмы чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, тоже перенумерованные в невозрастающем порядке. Из условия следует, что $\frac{a_1a_2}{a_3}\le a_1,\frac{a_2a_3}{a_4}\le a_2,\ldots,\frac{a_{k-2}a_{k-1}}{a_k}\le a_{k-2}$ и $\frac{a_{k-1}a_k}{a_1}\ge a_k$. Поэтому последовательность, определенная условиями S_0=0, $S_{i+1}=S_i+d_i-c_i$, состоит из двух монотонных отрезков. А поскольку она начинается и оканчивается нулями, все ее члены неотрицательны. Отсюда следует, что последовательность $d_1,d_2,\ldots,d_k$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_k$, и рассматриваемый квазимногочлен имеет единственный двукратный корень t=0.

83. Докажем, что квазимногочлен

$$f(t)=\left(\frac{a_1a_3}{a_2}\right)^t+\left(\frac{a_2a_4}{a_3}\right)^t+\ldots+\left(\frac{a_{k-1}a_1}{a_k}\right)^t+\left(\frac{a_ka_2}{a_1}\right)^t-a_1^t-a_2^t-\ldots-a_k^t$$

принимает только неотрицательные значения. Обозначим $c_1,c_2,\ldots,c_k$ логарифмы чисел $\frac{a_1a_3}{a_2},\frac{a_2a_4}{a_3},\ldots,\frac{a_{k-1}a_1}{a_k},\frac{a_ka_2}{a_1}$, перенумерованные в невозрастающем порядке, а $d_1,d_2,\ldots,d_k$ – логарифмы чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, тоже перенумерованные в невозрастающем порядке. Из условия следует, что $\frac{a_1a_3}{a_2}\ge a_1,\frac{a_2a_2}{a_2}\ge a_2,\ldots,\frac{a_{k-2}a_k}{a_{k-1}}\ge a_{k-2}$ и $\frac{a_1a_{k-1}}{a_k}\le a_1$. Поэтому последовательность, определенная условиями S_0=0, $S_{i+1}=S_i+d_i-c_i$, состоит из двух монотонных отрезков. А поскольку она начинается и оканчивается нулями, все ее члены неотрицательны. Значит, все ее члены неотрицательны. Отсюда следует, что последовательность $d_1,d_2,\ldots,d_k$ мажорирует последовательность $c_1,c_2,\ldots,c_k$, и рассматриваемый квазимногочлен имеет единственный двукратный корень t=0.

84. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\ge b\ge c$. После раскрытия скобок и очевидных сокращений неравенство перепишется в виде $\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\le 2\frac{M}{m}+2+2\frac{m}{M}$. Естественно рассмотреть квазимногочлен

$$f(t)=2\left(\frac{M}{m}\right)^t-\left(\frac{a}{c}\right)^t-\underline{\left(\frac{a}{b}\right)^t-\left(\frac{b}{c}\right)^t}+2-\left(\frac{c}{b}\right)^t-\underline{\left(\frac{b}{a}\right)^t-\left(\frac{c}{a}\right)^t}+2\left(\frac{m}{M}\right)^t.$$

Данная запись является «почти стандартной»: в подчеркнутых парах слагаемые могут поменяться местами, но на суть дела это не влияет. Последовательность коэффициентов квазимногочлена имеет четыре перемены знаков. Сам квазимногочлен имеет очевидный корень t=0. Так как функция $f(t)$ четная, этот корень имеет кратность два или четыре. Для решения задачи достаточно доказать, что других корней нет. Для этого воспользуемся результатом задачи 12.

Равенство (15) проверяется непосредственно. Первое неравенство (14) принимает вид $\frac{M}{m}\ge\frac{a}{c}$ и легко следует из условий $a\le M$ и $c\ge m$. Второе неравенство (14) может иметь вид $\left(\frac{M}{m}\right)^2\ge\frac{a^2}{bc}$ или $\left(\frac{M}{m}\right)^2\ge\frac{ab}{c^2}$ в зависимости от конкретных значений a, b и c. Оба эти неравенства справедливы в силу условий задачи. Третье неравенство принимает вид $\left(\frac{M}{m}\right)^2\ge\frac{a^2}{c^2}$ и тоже доказывается без труда. Оставшиеся три неравенства (14) удобно заменить соответствующими неравенствами (16), после чего станет очевидно, что они доказываются аналогично.

85. Не ограничивая общности, можно считать, что $a\ge b\ge c\ge d\ge e$. После раскрытия скобок и очевидных сокращений неравенство перепишется в виде

$$\frac{a}{e}+\frac{a}{d}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{e}+\frac{b}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{e}+\frac{c}{d}+\frac{d}{e}+$$
$$+\frac{e}{d}+\frac{d}{c}+\frac{e}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\frac{e}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{d}{a}+\frac{e}{a}\le 6\frac{M}{m}+8+6\frac{m}{M}.$$

Далее будем действовать так же, как в предыдущем решении. А именно докажем, что последовательность логарифмов двадцати слагаемых в левой части неравенства, расставленных в неубывающем порядке, мажорируется последовательностью из шести чисел $\ln\frac{M}{m}$, восьми единиц и шести чисел $\ln\frac{m}{M}$. Дополнительная трудность связана с тем, что неравенства (14) при i=2,3,…,10 в зависимости от конкретных значений данных чисел a, b, c, d, e могут иметь разный вид, и число вариантов довольно велико. Но нетрудно видеть, что в силу того, что числа a, b, c, d, e лежат между числами m и M, неравенства (14) при i=2,3,…,6 слабее того же неравенства при i=1. А в силу предположения $a \geq b \geq c \geq d \geq e$ неравенства (14) при i=7, 8, 9 слабее того же неравенства при i=10. Поэтому достаточно доказать неравенства (14) при i=1 и i=10.

Первое из них принимает вид $\frac{M}{m} \geq \frac{a}{e}$ и доказывается так же, как в предыдущем решении. Второе после сокращений примет вид $\left(\frac{M}{m}\right)^6 \geq \frac{a^4b^2}{d^2e^4}$ и тоже следует из неравенств $a \leq M$, $b \leq M$, $d \geq m$ и $e \geq m$.

86. В силу симметрии можно считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k$. Раскроем скобки в доказываемом неравенстве и проведем сокращения. Правая часть полученного неравенства будет равна $\frac{M}{m}\cdot\frac{k^2-1}{4}+\frac{k^2-2k+1}{2}+\frac{m}{M}\cdot\frac{k^2-1}{4}$. В левой будет две группы по $\frac{k(k-1)}{2}$ слагаемых. В первую войдут числа вида $\frac{a_i}{a_j}$ ($i>j$), большие единицы, а во вторую – числа $\frac{a_i}{a_j}$ ($i<j$) меньшие единицы. Достаточно доказать, что последовательность логарифмов всех этих чисел, расставленных в неубывающем порядке, мажорируется последовательностью, состоящей из $\frac{k^2-1}{4}$ чисел, равных $\frac{M}{m}$, $\frac{k^2-2k+1}{2}$

единиц и $\frac{k^2-1}{4}$ чисел, равных $\frac{m}{M}$. Как и в решении предыдущего упражнения, можно убедиться, что для этого достаточно доказать неравенства (14) для i=1 и $i=\frac{k(k-1)}{2}$. Первое из них доказывается просто. Докажем второе.

В первую группу входят k–1 дробей, содержащих a_1 в числителе, k–2 дроби, содержащих a_2 в числителе, и одну, содержащую a_2 в знаменателе и т. д. Поэтому рассматриваемое неравенство примет вид $\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{k^2-1}{4}} \geq \frac{a_1^{k-1}a_2^{k-3}\ldots a_{(k-1)/2}^2}{a_{(k+1)/2}^2 a_{(k+3)/2}^4\ldots a_k^{k-1}}$. Правую часть этого неравенства можно представить в виде произведения $\frac{k^2-1}{4}$ дробей вида $\frac{a_i}{a_j}$, каждая из которых не превосходит $\frac{M}{m}$, откуда и следует нужное неравенство.

87. Это неравенство, впервые полученное П. Швейцером, доказано в [1] с помощью правила Декарта и одного несложного вспомогательного трюка. Решение предыдущего упражнения почти дословно повторяется и для четных k, что дает доказательство неравенства Швейцера без всяких трюков.

88. Перепишем неравенство в виде

$$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\leq(a^3+abc)+(b^3+abc)+(c^3+abc).$$

В силу симметрии можно считать, что $a\geq b\geq c$. Тогда, так как

$$a^2(b+c)-b^2(a+c)=ab(a-b)+c(a^2-b^2)=(a-b)(ab+ac+bc)$$

имеем $a^2(b+c)\geq b^2(a+c)\geq c^2(a+b)$, $(a^3+abc)\geq(b^3+abc)\geq(c^3+abc)$ и

$$(a^3+abc)-a^2(b+c)=a(a^2+bc-ab-ac)=a(a(a-b)-c(a-b))=a(a-b)(a-c)\geq 0.$$

Аналогично $(c^3+abc)\leq c^2(a+b)$. Следовательно, квазимногочлен $f(t)=$ $=[(a^3+abc)]^t+[(b^3+abc)]^t+[(c^3+abc)]^t-[a^2(b+c)]^t-[b^2(a+c)]^t-[c^2(a+b)]^t$ имеет два корня, один из которых – ноль. Задача будет решена, если мы докажем, что производная этого квазимногочлена при t=0 неотрицательна, т. е. $(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)\geq a^2(b+c)b^2(a+c)c^2(a+b)$ или $(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)\geq a(b+c)b(a+c)c(a+b)$. Последнее неравенство следует из результата задачи 8, если переписать его в виде $(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab) \geq (a^2+ab)(b^2+bc)(c^2+ac)$

10. Приложение

W – международная олимпиада;
B – Всесоюзная или заключительный этап Всероссийской;
P – четвертый (зональный) этап Всероссийской;
У – Всеукраинская;
M – Московская;
Л – Ленинградская (Санкт-Петербургская);
K – Киевская;
h – Задачник «Кванта» (с указанием номера);
C – конкурс им. А.П. Савина;
S – Соросовская олимпиада на Украине;
A – журнал American Mathematical Monthly;
H – Венгерская олимпиада.

Литература

1. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, 2010.

2. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.

3. Прасолов В.В. Многочлены. М.: МЦНМО, 1999.

4. Понтрягин Л.С. Обобщения чисел. М.: Наука, 1986.

5. Шафаревич И.Р. Избранные главы алгебры. М.: Издательство журнала «Математическое образование», 2000.

6. Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

7. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983.

8. Храбров А.И. Элементарное введение в теорию мажоризации // Петербургские олимпиады школьников:2000–2002. СПб.: Невский диалект, 2006.

9. Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства // Квант, 1984. №4. С. 14–18.