ГАРАНИТРОВАННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ИГРЕ С ОШИБКАМИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИНФОРМАЦИИ

Горелов М.А.
(*Вычислительный центр РАН, Москва*)
griefer@ccas.ru

Рассматривается игра двух лиц с фиксированным порядком шагов и ошибками при передаче информации. Ищутся оптимальные стратегии игрока, обладающего правом первого хода, в предположении осторожности обоих игроков.

Ключевые слова: иерархические игры, максимальный гарантированный результат.

Введение

Модели с обменами информацией появись в самых первых работах по теории игр (см., например, [3,2]). Но до сих пор исследовались лишь модели, в которых предполагалось, что игроки получают неискаженную информацию. При моделировании, к примеру, шахматной игры [3], это предположение вполне реалистично, так как для передачи информации об одном ходе вполне достаточно 12 бит.

Но если иметь в виду применение теории игр к моделированию процесса управления сложными организационными системами, то придется столкнуться с тем, что на практике передаются поистине огромные объемы информации. При этом ошибки неизбежны из-за пресловутого «человеческого фактора» или сбоев технических систем. Это обстоятельство нельзя не учитывать при моделировании.

Ниже предлагается модель такого рода, аналогичная игре с обменом конечным объемом информации, исследованной в [1]. Подобная задача для игр с обменом неограниченным количеством информации поддается исследованию, но решение такой задачи оказывается настолько сложным, что вряд ли можно рассчитывать на возможность его практического применения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные метрические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Исследуем следующее расширение данной игры. Будем предполагать, что игрок 1 обладает правом первого хода, но до выбора своего управления вправе задать партнеру n вопросов, допускающих ответы типа «да» и «нет». Игрок 2 обязан дать на эти вопросы правдивые ответы. Но в канале связи l ответов могут быть искажены. Далее предполагается, что число l известно обоим игрокам.

Стратегиями первого игрока в получающейся игре являются пары (u_*, P) функций $P: V \to \{0,1\}^n$, и $u_*: \{0,1\}^n \to V$. Такую стратегию он выбирает первым и сообщает партнеру. Если тот выберет стратегию $v \in V$, то игроки могут получить выигрыши $g(u_*(r),v)$ и $h(u_*(r),v)$, где r – любой вектор из $\{0,1\}^n$, для которого $\chi(r,P(v)) \le l$ (χ – расстояние Хэмминга). Максимальный гарантированный результат первого игрока будет равен $R = \sup\limits_{(u_*,P)} \inf\limits_{v \in B(u_*,P)} \min\limits_{r \in S_l(P(v))} g(u_*(r),v)$, где $S_l(b)$ – замкнутый шар радиуса l (в метрике Хемминга) с центром в точке b, а $B(u_*,P)$ оценка первым игроком множества возможных ответов партнера на стратегию (u_*, P). Предположим, что первый игрок считает своего партнера осторожным.

Тогда естественно считать, что

$$B(u_*, P) = \left\{ v \in V : \min_{r \in S_l(P(v))} h(u_*(r), v) = \max_{w \in V} \min_{r \in S_l(P(w))} h(u_*(r), w) \right\},$$

если верхняя грань $\sup_{w\in V} \min_{r\in S_l(P(w))} h(u_*(P(w)),w)$ достигается, и

$$B(u_*,P)=\left\{v\in V: \min_{r\in S_l(P(v))} h(u_*(P(v)),v)\ge \max_{w\in V} \min_{r\in S_l(P(w))} h(u_*(P(w)),w)-\kappa\right\}$$

в противном случае (здесь κ – заданное положительное число).

Дальнейшая задача будет состоять в вычислении величины R и построении стратегии первого игрока, позволяющей ему получить выигрыш, сколь угодно близкий к R.

2. Основные результаты

Сделанных предположений о структуре множества $B(u_*,P)$ достаточно, чтобы получить следующий вывод.

Лемма 1. Для любой стратегии (w_*,Q) первого игрока найдется такая стратегия (u_*,P), что

$$\inf_{v\in B(u_*,P)} \min_{r\in S_l(P(v))} g(u_*(r),v)\ge \inf_{v\in B(w_*,Q)} \min_{r\in S_l(Q(v))} g(w_*(r),v)$$

и верхняя грань $\sup_{v\in V} \min_{r\in S_l(P(v))} h(u_*(r),v)$ достигается.

Поэтому, если существует стратегия (u_*,P), гарантирующая первому игроку получение выигрыша большего γ, то существуют $m=2^n$ управлений $u^0\in U, u^1\in U,\ldots,u^{m-1}\in U$ и число λ, такие что, во-первых,

- найдется такое управление $v\in V$, что для любого сообщения $b\in S_l(r)$ имеют место неравенства $h(u^b,v)\ge\lambda$ и $g(u^b,v)>\gamma$;

а, во-вторых, для любого $v\in V$ найдется такое $r\in N$, что выполняется одно из двух условий:

- для любого $b\in S_l(r)$ справедливы неравенства $h(u^b,v)\ge\lambda$ и $g(u^b,v)>\gamma$;
- имеет место неравенство $h(u^r,v)<\lambda$.

Тогда величина

$$c(\gamma)=\sup_{u^0\in U}\ldots\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min_{b\in S_l(r)}\left[h(u^b,v)-\lambda,\ g(u^b,v)-\gamma\right],$$

$$\inf_{v\in V}\max\left[\max_{r\in N}\min_{b\in S_l(r)}\min\left(h(u^b,v)-\lambda,\ \min_{b\in S_l(r)}g(u^b,v)-\gamma\right),\right.$$

$$\left.\max_{r\in N}\left(\lambda-h(u^r,v)\right)\right]\}$$

будет неотрицательна.

Если величина $c(\gamma)$ строго больше нуля, то, используя реализации внешних верхних граней в ее определении, можно конструктивно построить стратегию (u_*,P), которая гарантирует первому игроку выигрыш больший γ.

Поэтому справедлива

Теорема. Максимальный гарантированный результат R первого игрока в рассматриваемой игре является наименьшим решением уравнения $c(\gamma)=0$.

Обозначим $\Phi(X,Y)$ множество всех функций из X в Y. В определении величины R стоит верхняя грань по множеству $\Phi(\{0,1\}^n,U)\times\Phi(V,\{0,1\}^n)$. Множество $\Phi(\{0,1\}^n,U)$ простое. Оно может быть отождествлено с множеством наборов $(u_0,\ldots,u_{m-1})$, где $u_i\in U$. Множество $\Phi(V,\{0,1\}^n)$ гораздо сложнее. Данная теорема позволяет избавиться от верхней грани по множеству $\Phi(V,\{0,1\}^n)$.

Литература

1. ГОРЕЛОВ М.А. *Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации* // Автоматика и телемеханика. 2011. №3. С. 124 – 144.
2. ФОН НЕЙМАН ДЖ. *К теории стратегических игр* // Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 173 – 204.
3. ЦЕРМЕЛО Э. *О применении теории множеств к теории шахматной игры* // Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 167 –172.