О целесообразности диверсификации аукционной заявки

М.А. Горелов

Вычислительный центр РАН

Рассмотрим модель американского аукциона по первичному размещению дисконтных облигаций, позволяющую определить оптимальное число конкурентных предложений.

Будем считать, что зафиксирован плановый период, начало которого совпадает с днем проведения аукциона, а конец – с днем погашения облигаций. Предположим, за привлечение в день аукциона средств в объеме V в конце планового периода придется заплатить сумму $A(V)$. Пусть имеются альтернативные способы вложения денег такие, что при вложении суммы V в конце планового периода можно получить прибыль $D(V)$.

Особый практический интерес представляет случай, когда $D(V)$ – кусочно-линейная неубывающая вогнутая функция, имеющая k точек излома и постоянная при достаточно больших значениях V. Это соответствует тому, что у оперирующей стороны имеется k–1 способ альтернативного вложения средств, каждый из которых ограничен по объему инвестируемых денег.

Аукционную заявку будем характеризовать объемом средств v_p, включенных в конкурентное предложение по цене p (по традиции цены измеряются в долях номинала N). Цену отсечения P на данном аукционе будем считать случайной величиной. Вероятность того, что значение цены отсечения будет равно P, обозначим μ_P. Считаем, что оперирующая сторона стремится максимизировать математическое ожидание прибыли, то есть ее функция выигрыша имеет вид

$$\sum_P \mu_P \left[N \sum_{p \ge P} \frac{v_p}{p} - \sum_{p \ge P} v_p + D(V - \sum_{p \ge P} v_p) - A(V)) \right],$$

которая максимизируется по переменным v_p и V при естественных ограничениях $\sum_p v_p = V$, $v_p \ge 0$.

При сделанных предположениях оптимальная заявка содержит не более k+1 конкурентных предложений. Ее конкретная структура может быть найдена следующим образом.

Пусть $s=(s^1,s^2,\ldots,s^k)\in[0,1]^k$, $s^0=0$, $s^{k+1}=1$, d^i обозначает угловой коэффициент i-го участка кусочно-линейной функции $D(V)$, а v^i – объем i-го конкурентного предложения ($i=1,\ldots k+1$).

Рассмотрим задачу максимизации функции

$$\sum_P \mu_P \left[N\sum_{i=1}^{k+1}\frac{v^i}{p^i(s)} - \sum_{i=1}^{k+1} v^i + D\left(V - \sum_{i=1}^{k+1} v^i \right) - A(V) \right],$$

где максимум ищется по переменным $v^1{}_{,}\ {}^{2},\ldots v^{k+1}$ и V, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{k+1} v^i = V$, $v^i \ge 0$ и переменным $s^1,s^2,\ldots,s^k$, для которых выполняются неравенства $0\le s^1\le s^2\le\ldots\le s^k\le 1$.

При этом цена $p^i(s)$ является точкой максимума функции

$$[(\frac{N}{p} - 1 - d^i)\sum_{P\le p}\mu_P]$$

по значениям цены p, удовлетворяющим неравенствам $s^{i-1}\le p\le s^i$.

Если оптимальные значения v^i положительны, а числа $p^i(s)$ попарно различны, то оптимальная заявка будет содержать k+1 конкурентное предложение. Иначе их может быть меньше.

Отметим качественные выводы, которые позволяет сделать рассмотренная модель.

- Целесообразность диверсификации заявки определяется готовностью оперирующей стороны идти на риск (ориентироваться на математическое ожидание).
- Количество конкурентных предложений в аукционной заявке определяется видом функции $D(V)$, описывающей альтернативные способы инвестирования денег.
- От вида функции $A(V)$, описывающей возможности по привлечению средств, число конкурентных предложений зависит лишь опосредованно.