© 2011 г. М. А. Горелов, канд. физ.-мат. наук
(Вычислительный центр РАН, Москва)

МАКСИМАЛЬНЫЙ ГАРАНТИРОВАННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Рассматривается иерархическая игра двух лиц, в которой игрок нижнего уровня может и должен передать партнеру информацию о своем выборе, но объем этой информации ограничен. Предполагается, что содержание этой информации определяет игрок верхнего уровня. Ищутся стратегии, обеспечивающие ему получение максимального гарантированного результата.

1. Введение

Даже беглый взгляд на окружающую действительность позволяет отметить следующий факт: всякая сколько-нибудь сложная организационная система функционирует по иерархической схеме. Если исходить из эволюционного принципа, отсюда можно сделать вывод о том, что иерархическая организация является в каком-то смысле наилучшей.

Пожалуй, наиболее убедительное объяснение этому было предложено Ю.Б. Гермейером и Н.Н. Моисеевым [1]. Суть его сводится к тому, что во многих случаях эффективное управление большой системой требует оперативной переработки больших объемов информации об окружающей среде. Поскольку это невозможно осуществить единолично, происходит децентрализация управления. Это и было одним из отправных пунктов развития теории иерархических игр [2].

Поскольку субъекты принятия решений получают права по выбору управлений, постольку у них появляются собственные интересы. Это обстоятельство приходится учитывать. Кроме того, для эффективного функционирования системы в целом необходимо, чтобы решения разными субъектами выбирались согласованно. А для этого необходимы обмены информацией о выбираемых управлениях. Наконец, во многих случаях влияние внешней среды на рассматриваемую систему представляет собой воздействие нескольких процессов с разными характерными временами. Это приводит к тому, что разные элементы иерархической системы принимают свои решения с разной частотой. По вполне объяснимым причинам элементы более высоких уровней меняют свои решения реже. В рамках статических моделей это может описываться так. Элементы более высокого уровня принимают свои решения раньше, и их выбор становится известен элементам более низких уровней. Таким образом, приходим к одной из основных моделей теории иерархических игр – игре с фиксированным порядком ходов с обменом информацией.

В простейшем случае имеется всего два элемента иерархической системы (игрока). Именно этот случай и будет обсуждаться в дальнейшем. При этом интересы системы в целом отождествляются с интересами элемента верхнего уровня – первого игрока.

Ввиду сказанного представляется весьма актуальной задача выбора рациональных способов обмена информацией между игроками. Первые результаты на эту тему были получены достаточно давно, а именно: в [3] было показано, что наилучший результат будет достигнут, если второй игрок сообщит партнеру достоверную информацию о выбранном им управлении. По традиции этот случай называют игрой Γ_2.

Такое решение имеет, по крайней мере, один существенный недостаток: игрокам приходится обмениваться весьма большими объемами информации. А это противоречит основной цели децентрализации управления. Таким образом приходим к постановке вопроса о поиске других способов обмена информацией, позволяющих получить такой же или, если это невозможно, достаточно хороший результат, но с меньшими объемами передаваемой информации. Впервые этот вопрос был поставлен А.Ф. Кононенко. Если немного ограничить множество рассматриваемых способов обмена информацией, можно говорить об агрегировании информации (передаваемой в случае игры Γ_2).

Первые работы в этом направлении были посвящены анализу конкретных способов агрегирования (см., например, [4,5]), а именно, оператор агрегирования искался в классе линейных. Позднее выяснилось, что такая постановка задачи обладает рядом негативных свойств (см. [6, 7]), поэтому она, как минимум, требует существенного уточнения.

Следующим шагом была попытка синтеза рационального способа обмена информацией [8]. Задача там ставилась жестко: требовалось найти наиболее простой способ обмена информацией, обеспечивающий тот же результат, что и в игре Γ_2. При этом сложность способа информационного обмена оценивалась размерностью линейного пространства, в которое вкладывалось множество возможных сообщений. Были получены достаточные условия существования решения этой задачи, впрочем, довольно ограничительные. Как выяснилось позднее, это обусловлено как жесткостью рассматриваемой постановки, так и используемой локальной техникой – теорией групп Ли.

Идеи [4] и [8] применялись в большом числе работ, посвященных исследованию более сложных игр, в основном динамических (см., например, [9–11]). Они же использовались при исследовании более конкретных моделей, например, в [12].

В результате этих исследований стало понятно, что задача синтеза рациональных процедур обмена информацией является двухкритериальной: требуется обеспечить эффективность функционирования системы и одновременно минимизировать объем передаваемой информации. Дальнейший анализ показал, что наиболее перспективными являются два способа свертки этих критериев, которые приводят к следующим двум задачам.

З а д а ч а 1. *При заданном ограничении на эффективность функционирования системы минимизировать объем передаваемой информации.*

З а д а ч а 2. *При заданном ограничении на объем передаваемой информации максимизировать эффективность функционирования системы.*

При этом для оценки эффективности функционирования системы есть достаточно естественная количественная характеристика – максимальный гарантированный результат первого игрока. Для измерения количества информации такой естественной характеристики нет. Поэтому в [13–15] были исследованы несколько вариантов.

В [13] сложность разных способов обмена информацией сравнивается не количественно, а качественно, с использованием понятия квазиинформационного расширения [16]. В [14] сложность информационного обмена измеряется числом различных сообщений, которые могут передаваться вторым игроком. В [15] множество возможных сообщений наделяется топологией и размерность соответствующего топологического пространства используется как мера сложности способа обмена информацией.

Ниже в качестве такой меры используется объем информации «в битах», как это принято в теории информации. Основы этой теории были заложены в работах К. Шеннона [17] и А.Н. Колмогорова [18] (более современное изложение см., например, в [19]). Ниже используются лишь элементарные идеи этой теории в духе книги [20].

Сразу же оговоримся, что рассматриваемая здесь задача может быть сведена к частному случаю задачи, исследованной в [14]. Но при этом есть и много нового. Во-первых, как здесь, так и в [14] находятся не все оптимальные стратегии, а лишь некоторые. Видимо, использованные в этих работах методы будут находить, вообще говоря, разные решения, что само по себе представляет интерес. Во-вторых, смена точки зрения позволяет выявить существенные качественные особенности решаемой задачи, которые прежде оставались незамеченными. В-третьих, новый способ формулировки позволяет сделать большое число интересных и продуктивных обобщений.

В работе исследуется в основном задача 2. Задача 1 к ней легко сводится. В самом деле, в данном варианте постановки задач (как и в большинстве других) объем передаваемой информамции характеризуется неотрицательным целым числом. Начав с нулевого объема и постепенно увеличивая его на единицу, будем решать задачу 2. Как только будет достигнут удовлетворительный максимальный гарантированный результат, задача 1 будет решена. Достоинства и недостатки такой редукции обсуждались в [14].

В отношении взаимосвязи задач 1 и 2 отметим следующее. В рассматриваемой постановке, так же как и в [13, 14], проще оказывается задача 2, а задачу 1 удается решить лишь редукцией к задаче 2. В постановке [15], напротив, задачу 2 приходится сводить к более простой задаче 1. А большинство других интересных способов свертки критериев может быть сведено к одной из этих двух задач.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные метрические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия игроков. Первый игрок вправе задать партнеру n вопросов относительно выбранного им управления $v \in V$ и получить на них правдивые ответы. Каждый из этих вопросов должен допускать ответ «да» или «нет». Следуя традиции, будем кодировать ответ «да» единицей, а ответ «нет» – нулем. Окончательный выбор своего управления $u \in U$ первый игрок осуществляет после получения ответов на свои вопросы. Однако он заранее выбирает список вопросов и план своих действий при всех возможных вариантах ответов. Эта информация становится известной второму игроку. В этих условиях второй игрок может однозначно соотнести свой выигрыш с выбором своего управления, а потому его поведение становится предсказуемым: он будет выбирать управления из условия максимума своего критерия. Неопределенность остается лишь в том случае, когда точек максимума несколько. Будем считать, что первый игрок осторожен по отношению к этой неопределенности и стремится максимизировать свой гарантированный результат.

В дальнейшем число вопросов n будет характеризовать объем передаваемой информации. Как будет видно из полученных результатов, интуитивно оцениваемая сложность каждого вопроса в найденном решении не слишком высока и не очень сильно меняется от вопроса к вопросу. Поэтому такая мера количества информации представляется вполне естественной.

Дадим точные определения. Каждой системе из n вопросов рассматриваемого типа соответствует набор из $2n$ подмножеств

$$\left(X_1^0, X_1^1\right), \left(X_2^0, X_2^1\right), ..., \left(X_n^0, X_n^1\right) \tag{1}$$

пространства V, разбитый на пары. В множество X_t^1 входят те и только те управления $v \in V$ второго игрока, при выборе которых на вопрос с номером t следует ответить «да». А множество X_t^0 содержит те управления, которые соответствуют ответу «нет» на вопрос с номером t. Разумеется, должны выполняться условия

$$X_t^0 \cap X_t^1 = \emptyset,\ X_t^0 \cup X_t^1 = V,\ \ t = 1, ..., n. \tag{2}$$

Каждому булеву вектору $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ из множества $N = \{0,1\}^n$ можно поставить в соответствие множество $X^r = \bigcap\limits_{t=1}^{n} X_t^{r_t}$. Получив ответы $(r_1, r_2, ..., r_n)$ на свои вопросы, первый игрок может и должен выбрать управление $u^r \in U$. Таким образом, стратегия первого игрока определяется заданием $2n$ множеств вида (1), удовлетворяющих условиям (2), и $m = 2^n$ управлений $u^r \in U,\ r \in N$. В дальнейшем иногда будет удобно отождествить вектор $(r_1, r_2, ..., r_n) \in N$ с числом $r_1 \cdot 2^{n-1} + r_2 \cdot 2^{n-2} + ... + r_n \cdot 2^0$ из множества $\{0, 1, ..., m-1\}$, для которого последовательность $r_1 r_2 ... r_n$ является записью в двоичной системе счисления. Такое отождествление не должно вызвать недоразумений и потому будет делаться без особых оговорок.

Если первый игрок зафиксирует свою стратегию такого вида, а второй игрок выберет управление $v \in V$, то игроки получат выигрыши $g(u^r, v)$ и $h(u^r, v)$ соответственно, где ответ r однозначно определяется условием $v \in X^r$.

Удобно определить функцию $P : V \to N$ условием $P(v) = r$, если $v \in X^r$, и такую функцию $u_* : N \to U$, что $u_*(r) = u^r$. Тогда стратегию первого игрока можно отождествить с парой функций (u_*, P), а выигрыши игроков будут определяться функционалами $g_*((u_*, P), v) = g(u_*(P(v)), v)$ и $h_*((u_*, P), v) = h(u_*(P(v)), v)$.

Фиксируем положительное число κ. Зададим множество $B(u_*, P)$ рациональных откликов второго игрока на стратегию (u_*, P) условиями

- $B\left(u_*, P\right) = \left\{v \in V:\ h(u_*(P(v)), v) = \max\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)), w)\right\}$, если верхняя грань $\sup\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)), w)$ достигается;
- $B\left(u_*, P\right) = \left\{v \in V:\ h(u_*(P(v)), v) \geqslant \sup\limits_{w \in V} h(u_*(P(w)), w) - \kappa\right\}$ в противном случае.

Максимальный гарантированный результат первого игрока R равен

$$R = \sup \inf_{v \in B(u_*, P)} g(u_*(P(v)), v), \tag{3}$$

где верхняя грань берется по множеству всех его стратегий (u_*, P) . Вычисление этого результата, а также построение стратегий, достаточно точно реализующих верхнюю грань в (3), будет задачей дальнейшего изложения.

Ключевую роль в решении этой задачи играет следующее утверждение.

Лемма 1. Для любой стратегии (w_*, Q) *первого игрока найдется такая стратегия* (u_*, P) , *что* $\inf\limits_{v \in B(u_*, P)} g(u_*(P(v)), v) \geqslant \inf\limits_{v \in B(w_*, Q)} g(w_*(Q(v)), v)$ *и верхняя грань* $\sup\limits_{v \in V} h(u_*(P(v)), v)$ *достигается.*

Доказательство леммы приводится в Приложении.

Следствие 1. Максимальный гарантированный результат R *первого игрока не зависит от числа к, которое формально присутствует в его определении.*

Замечание 1. При доказательстве леммы фактически устанавливается, что, изменяя стратегию первого игрока, можно присоединить к множеству рациональных откликов его противника любую предельную точку и при этом гарантированный результат центра, во всяком случае, не уменьшится. Но таким же образом к множеству рациональных откликов можно присоединить все предельные точки. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что при разумном выборе стратегии первого игрока множество рациональных откликов на нее будет замкнутым и, следовательно, компактным. Этот факт в дальнейшем не используется, но он проливает свет на геометрическую природу теоремы 1.

3. Вычисление максимального гарантированного результата

Итак, установлено, что среди оптимальных (или ε-оптимальных) стратегий первого игрока есть такие, что максимум в определении множества рациональных откликов второго игрока $B(u_*, P)$ достигается. Фиксируем такую стратегию. Тогда во всех точках $v \in B(u_*, P)$ выигрыш $h(u_*(P(v)), v)$ равен одному и тому же числу λ.

Поэтому если стратегия (u_*, P) гарантирует первому игроку выигрыш, больший γ, то найдутся такие управления $u^0 \in U,\ u^1 \in U, ..., u^{m-1} \in U$ и число λ, что, во-первых,

- существуют $v \in V$ и $r \in N$, для которых имеют место неравенства $h(u^r, v) \geqslant \lambda$ и $g(u^r, v) > \gamma$ (можно взять $v \in B(u_*, P)$ и $r = P(v)$),

и, во-вторых, для любого $v \in V$ выполняется одно из двух условий:

- найдется $r \in N$, для которого выполняется условие $g(u^r, v) > \gamma$ (это имеет место, когда $v \in B(u_*, P)$; тогда можно взять $r = P(v)$);
- найдется $r \in N$, для которого $h(u^r, v) < \lambda$ (это условие выполняется, если $v \notin B(u_*, P)$; тогда можно взять $r = P(v)$).

(Во всех случаях $u^r = u_*(r),\ r \in N$, а λ – выигрыш второго игрока при его рациональном ответе на стратегию (u_*, P)).

Хорошо известно, что утверждение «для любого $x \in X$ выполняется неравенство $F(x) \geqslant 0$» эквивалентно условию «$\inf\limits_{x\in X} F(x) \geqslant 0$». Многократно применяя это и аналогичные рассуждения к утверждению из предыдущего абзаца, придем к следующему результату: величина

$$c(\gamma) = \sup_{u^0\in U}\sup_{u^1\in U}\dots\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\Big\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min\left[h(u^r,v)-\lambda,\ g(u^r,v)-\gamma\right],$$
$$\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\left[g(u^r,v)-\gamma,\ \lambda-h(u^r,v)\right]\Big\}$$

неотрицательна. Более того, имеет место

Т е о р е м а 1. *Максимальный гарантированный результат R первого игрока в рассматриваемой игре является решением уравнения $c(\gamma) = 0$.*

Доказательство теоремы содержится в Приложении.

Интерпретация найденного решения в терминах вопросов обсуждается ниже.

4. Свойства функции $c(\gamma)$

Согласно известной теореме (см., например, [21, задача 4.4]), если функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ непрерывна на произведении метрических пространств X и Y то функции $\varphi(x) = \max\limits_{y\in Y} f(x,y)$ и $\psi(x) = \min\limits_{y\in Y} f(x,y)$ непрерывны. Многократно применяя эту теорему, можно убедиться, что функция $c(\gamma)$ непрерывна. По ходу устанавливается, что верхние и нижнюю грани в определении функции $c(\gamma)$ можно заменить на максимумы и минимум соответственно.

Почти очевидно, что функция $c(\gamma)$ не возрастает. Формальное доказательство совершенно элементарно, но достаточно длинно, поэтому здесь не приводится.

Эти свойства неявно используются при доказательстве теоремы 1.

Непосредственно проверяется, что если $\gamma = \max\limits_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)$, то $c(\gamma) \leqslant 0$. Если же $\gamma = \min\limits_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)$, то $c(\gamma) \geqslant 0$ (в этом случае выбор $\lambda = \min\limits_{(u,v)\in U\times V} h(u,v)$ делает очевидной неотрицательность $c(\gamma)$).

Поэтому уравнение $c(\gamma) = 0$ решение заведомо имеет. Более того, множество решений этого уравнения представляет собой замкнутый отрезок.

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что если этот интервал ограничен снизу, то значение максимального гарантированного результата R равно минимальному корню уравнения $c(\gamma) = 0$.

Можно показать, что множество решений этого уравнения заведомо ограничено снизу, если $n > 0$ и $\max\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V} h(u,v) > \min\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V} h(u,v)$.

В прикладном плане этот случай представляет основной интерес. Если множество решений уравнения $c(\gamma) = 0$ не ограничено, теорема 1 менее содержательна.

По понятным причинам, функция $c(\gamma)$ постоянна при $\gamma \geqslant \max\limits_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)$ и при $\gamma \leqslant \min\limits_{(u,v)\in U\times V} g(u,v)$. Наличие других невырожденных интервалов, на которых функция $c(\gamma)$ постоянна, связано с существованием таких пар $(u,v) \in U \times V$, которые являются точками локального максимума одновременно у функций g и h. Можно показать, что в достаточно естественном смысле это не типично.

5. Характеристическое свойство

В ряде случаев вычисление максимального гарантированного результата, основанное на теореме 1, упрощает использование следующего результата.

Теорема 2. *Пусть $c(\gamma) = 0$. Тогда среди чисел λ и управлений $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ из множества U, удовлетворяющих условию*

$$\begin{gathered}\min\left\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min\left[h(u^r,v)-\lambda,\ g(u^r,v)-\gamma\right],\right.\\ \left.\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\left[g(u^r,v)-\gamma,\ \lambda-h(u^r,v)\right]\right\} =\\ =\sup_{w^0\in U}\sup_{w^1\in U}...\sup_{w^{m-1}\in U}\sup_{\vartheta\in\mathbb{R}}\min\left\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min\left[h(w^r,v)-\vartheta,\ g(w^r,v)-\gamma\right],\right.\\ \left.\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\left[g(w^r,v)-\gamma,\ \vartheta-h(w^r,v)\right]\right\},\end{gathered}\tag{4}$$

найдутся такие, что выполняется равенство

$$\max_{v\in V}\min_{r\in N}h(u^r,v)=\lambda.\tag{5}$$

Данное утверждение доказано в Приложении.

При формулировке теоремы 1 использовалось необходимое условие включения $v \in B(u_*, P)$, заведомо не являющееся достаточным (вместо равенства $h(u^r, v) = \lambda$ использовалось неравенство $h(u^r, v) \geqslant \lambda$, и именно это делает теорему 1 содержательной). Теорема 2 показывает, что при этом ничего существенного не было потеряно.

Если $g(u, v) \equiv \gamma$, то, очевидно, для любого значения λ из отрезка $\left[\min\limits_{(u,v)\in U\times V} h(u,v),\ \max\limits_{(u,v)\in U\times V} h(u,v)\right]$ выполняется равенство

$$\begin{gathered}\sup_{u^0\in U}\sup_{u^1\in U}...\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\left\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min\left[h(u^r,v)-\lambda,\ g(u^r,v)-\gamma\right],\right.\\ \left.\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\left[g(u^r,v)-\gamma,\ \lambda-h(u^r,v)\right]\right\}=0.\end{gathered}$$

Поэтому теорему 2 усилить, вообще говоря, нельзя. Однако можно сформулировать следующее предположение.

Гипотеза. *Для типичных игр условия $c(\gamma) = 0$ и (4) влекут равенство (5).*

6. Игра Γ_1

Вычисление величины $c(\gamma)$, а тем более решение уравнения $c(\gamma) = 0$ сопряжены с очевидными трудностями. Продемонстрируем, как это может быть сделано хотя бы в простейшем случае. Рассмотрим ситуацию, когда первому игроку ничего не известно о выборе партнера, т. е. $n = 0$. По традиции этот случай называют игрой Γ_1.

При $n = 0$ определение функции $c(\gamma)$ радикально упрощается. А именно:

$$\begin{gathered}c(\gamma)=\sup_{u\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min\left\{\sup_{v\in V}\min\left[h(u,v)-\lambda,\ g(u,v)-\gamma\right],\right.\\ \left.\inf_{v\in V}\max\left[g(u,v)-\gamma,\ \lambda-h(u,v)\right]\right\}.\end{gathered}\tag{6}$$

Непосредственно проверяется, что функция $c(\gamma)$ непрерывна и не возрастает. Поэтому наименьший корень уравнения $c(\gamma) = 0$ равен точной верхней грани решений неравенства $c(\gamma) > 0$. Следовательно, теорема 1 может быть переформулирована следующим образом: максимальный гарантированный результат в рассматриваемой игре равен точной верхней грани значений γ, удовлетворяющих условию $c(\gamma) > 0$. Опишем множество решений этого неравенства.

Пусть $c(\gamma) > 0$, а управление $u \in U$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$ выбраны так, что

$$\min\left\{\sup_{v\in V}\min\left[h(u,v)-\lambda,\ g(u,v)-\gamma\right],\ \inf_{v\in V}\max\left[g(u,v)-\gamma,\ \lambda-h(u,v)\right]\right\} > 0.$$

Тогда, во-первых,

$$\sup_{v\in V}\min\left[h(u,v)-\lambda,\ g(u,v)-\gamma\right] > 0$$

и, следовательно,

$$\sup_{v\in V}\left[h(u,v)-\lambda\right] > 0,$$

т. е.

$$\lambda < \max_{v\in V} h(u,v).$$

Во-вторых,

$$\inf_{v\in V}\max\left[g(u,v)-\gamma,\ \lambda-h(u,v)\right] > 0,$$

поэтому если $h(u,v_*) = \max\limits_{v\in V} h(u,v)$, то

$$\max\left[g(u,v_*)-\gamma,\ \lambda-h(u,v_*)\right] > 0$$

и, значит, $g(u,v_*)-\gamma > 0$, или $\gamma < g(u,v_*)$. Поскольку это неравенство выполняется для всех $v_* \in E(u) = \operatorname{Arg}\max\limits_{v\in V} h(u,v)$, то

$$\gamma < \min_{v\in E(u)} g(u,v)$$

и тем более

$$\gamma < \sup_{u\in U}\min_{v\in E(u)} g(u,v).$$

Обратно, пусть последнее неравенство выполнено и управление $u \in U$ выбрано так, что $\gamma < \min\limits_{v\in E(u)} g(u,v)$. Тогда для некоторого положительного δ имеет место неравенство $\gamma + 2\delta < \min\limits_{v\in E(u)} g(u,v)$. Следовательно, для всех v из множества $H = \{v \in V : g(u,v) \geqslant \gamma + \delta\}$ выполняется строгое неравенство $h(u,v) < \max\limits_{v'\in V} h(u,v')$.

Но множество H компактно, поэтому

$$\max_{v\in H} h(u,v) < \max_{v\in V} h(u,v),$$

а значит,

$$\max_{v\in H} h(u,v) < \max_{v\in V} h(u,v) - \Delta$$

для некоторого $\Delta > 0$.

Тогда для любого $\lambda \in \left(\max_{v\in V} h(u,v) - \Delta, \max_{v\in V} h(u,v)\right)$ и $v_* \in E(u)$ имеем $\min\left[h(u,v_*) - \lambda,\ g(u,v_*) - \gamma\right] > 0$, и тем более

$$\sup_{v\in V} \min\left[h(u,v) - \lambda,\ g(u,v) - \gamma\right] > 0.$$

При том же значении λ из условия $g(u,v) < \gamma - \delta$ следует $h(u,v) < \lambda$, поэтому

$$\inf_{v\in V} \max\left[g(u,v) - \gamma,\ \lambda - h(u,v)\right] > 0.$$

Итак, при выбранных u и λ выполняется неравенство

$$\min\left\{\sup_{v\in V} \min\left[h(u,v) - \lambda,\ g(u,v) - \gamma\right],\ \inf_{v\in V} \max\left[g(u,v) - \gamma,\ \lambda - h(u,v)\right]\right\} > 0,$$

и, следовательно, $c(\gamma) > 0$.

Подводя итоги, получим, что максимальный гарантированный результат первого игрока в рассматриваемой игре равен

$$R = \sup_{u\in U} \min_{v\in E(u)} g(u,v). \tag{7}$$

Как и ожидалось, это полностью согласуется с классическим результатом [2].

Чисто графически формула (6) сложнее формулы (7). Но следует заметить, что в формуле (7) приходится вычислять максимин со связанными переменными, а максимин в формуле (6) – с распадающимися ограничениями. Правда, число переменных в формуле (6) на единицу больше. Но несмотря на это можно ожидать, что вычисление максимина в формуле (6) будет проще, чем вычисление R по формуле (7) (по крайней мере, для некоторых игр). Это может оказаться существенным, даже с учетом того, что для решения уравнения $c(\gamma) = 0$ этот максимин придется вычислять многократно: решать несколько простых задач лучше, чем одну сложную.

В любом случае неплохо иметь два разных подхода к решению такой трудной задачи, как вычисление максимального гарантированного результата в игре Γ_1 .

7. Интерпретация оптимальных вопросов

Вернемся к исходной постановке проблемы и посмотрим, как могут выглядеть те вопросы, которые первый игрок задает второму.

Прежде всего, первый игрок должен фиксировать m элементов $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ множества U и два действительных числа γ и λ. Затем он должен задать партнеру вопросы

«Верно ли, что для выбранного Вами управления v
выполняется неравенство $g(u^r, v) > \gamma$?»

и

«Верно ли, что для выбранного Вами управления v
выполняется неравенство $h(u^r, v) \geqslant \lambda$?».

Всего получится $2m = 2^{n+1}$ вопросов.

Это число гораздо больше, чем в исходной постановке. Чтобы уменьшить количество вопросов, нужно правильно скомбинировать эти простые вопросы.

Обозначим через $s^r(v)$ утверждение «справедливо неравенство $g(u^r, v) > \gamma$», а $t^r(v)$ утверждение «справедливо неравенство $h(u^r, v) \geqslant \lambda$». Нумерация элементов $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ может быть выбрана произвольно, поэтому будем считать, что элемент u^0 соответствует первой квадратной скобке в определении величины $c(\gamma)$. Тогда два вопроса, соответствующих u^0, можно заменить на один:

«Верно ли, что выполняется конъюнкция $p^0(v) = s^0(v) \& t^0(v)$? ».

Для $r = 1, ..., m-1$ понадобится ответ на вопрос

«Верно ли, что выполняется утверждение $p^r(v) = s^r(v) \vee \overline{t^r(v)}$?»

(здесь черта сверху обозначает отрицание). Ответов на эти $m = 2^n$ вопросов достаточно, чтобы правильно выбрать управления u^r.

Обозначим через N^j множество тех наборов $r = (r_1, ..., r_n) \in N = \{0,1\}^n$, у которых $r_j = 1$ $(j = 1, ..., n)$. Рассмотрим n дизъюнкций

$$q^j(v) = \bigvee_{r \in N^j} p^r(v).$$

Пусть

$$q^{jr}(v) = \begin{cases} q^j(v), & \text{если } r^j = 1, \\ \overline{q^j(v)}, & \text{если } r^j = 0. \end{cases}$$

Тогда $p^r(v) = \mathop{\&}\limits_{j=1}^{n} q^{jr}(v)$. Поэтому для того, чтобы правильно выбрать управление, первому игроку достаточно получить ответы на n вопросов:

«Верно ли, что выполняется утверждение $q^j(v)$?» $(j = 1, ..., n$).

Таким образом, исходная задача решена.

Выше составные утверждения q^j строились из исходных утверждений s^r и t^r чисто формально, без учета специфики конкретной игры. Ясно, что во многих случаях «хорошие» комбинации могут быть получены гораздо проще.

Использованные для сокращения числа вопросов связки «и», «или» и «не» могут быть заменены операциями максимума, минимума и перехода от неравенства $h(u^r, v) \geqslant \lambda$ к неравенству $h(u^r, v) < \lambda$, как это систематически делалось выше. А так как $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, то можно обойтись и операцией вычисления модуля числа. Т. е., аналитические средства могут быть разными, сути дела это не меняет.

Неверно думать, что каждый из «составных» вопросов q^j непременно сложнее вопросов s^r и t^r. Все зависит от того, каковы функции g и h. Действительно, если даны «сложные» функции $\varphi(x) = |x| + x$ и $\psi(x) = |x| - x$, то их минимум $\min\{\varphi(x), \psi(x)\} \equiv 0$ – функция «простая».

В этой связи кажется правомерной постановка задачи о поиске системы не слишком сложных вопросов, позволяющих первому игроку получить нужный выигрыш. Но чтобы двигаться дальше в этом направлении, нужна количественная мера сложности функций.

Следует отметить в этой связи, что при решении поставленной задачи не возникло «слишком сложных» конструкций вроде кривых Пеано, чего нельзя было исключать a priori, т. е. некая «разумная» степень сложности не была превышена.

Остановимся еще на одном моменте. Задача вычисления величины $c(\gamma)$ представляется очень трудной. Здесь следует иметь в виду, что, по сути, при этом одновременно решаются задачи синтеза рациональной процедуры обмена информацией и выбора оптимальной гарантированной стратегии. Вряд ли можно ожидать, что эти задачи в общем случае могут быть сведены к чему-то совсем простому.

Но при этом нужно отметить, что соответствующая задача может решаться исследователем операции до игры и «раз и навсегда». А взаимодействие оперирующей стороны с подчиненным в процессе игры будет выглядеть предельно просто (уже по самой постановке задачи). Игроки этих формул могут никогда и не увидеть.

8. Политика «кнута» и «пряника»

Обсудим одну качественную особенность игр с ограниченным объемом передаваемой информации.

Пример 1. Пусть Г – биматричная игра, функции выигрыша в которой задаются матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(как обычно, первый игрок выбирает номер строки, второй – номер столбца, левая матрица задает выигрыш первого игрока, правая – второго).

Если число вопросов не ограничено, то одно из решений, гарантирующих первому игроку выигрыш 1, дается теорией Ю. Б. Гермейера. Оно выглядит следующим образом. Нужно задать вопрос

$$\text{«Верно ли, что } g(1, v) > 0 \text{ ?»}$$

и три вопроса вида

$$\text{«Верно ли, что } h(u, v) \leqslant 0 \text{ ?»}$$

для $u = 2, 3, 4$.

Ответ на один из этих вопросов непременно положителен, поэтому существует, по крайней мере, одна стратегия, которая предписывает выбирать значение $u = 1$, если ответ на первый вопрос положителен, и любое другое значение u, отвечающее вопросу, на который получен ответ «да», в противном случае. Любая такая стратегия гарантирует первому игроку выигрыш 1.

Интерпретировать эту стратегию можно следующим образом. В управлении хорошо известен «принцип кнута и пряника». В данном случае второму игроку предлагается «пряник», если он выбирает $v = 1$, а в остальных случаях выбирается «кнут».

Такая структура решения характерна для огромного числа такого рода задач (в вырожденных случаях «кнут» применяется всегда). Не обязательно все оптимальные стратегии имеют указанную структуру, но хотя бы одна оптимальная стратегия с такой структурой существует всегда. На практике же такая жесткая политика встречается не так часто. Как раз это характерно для игр с ограниченным объемом передаваемой информации.

Пусть в рассматриваемой игре можно задать один вопрос. Можно задать вопрос

$$\text{«Верно ли, что } g(1, v) > 0 \text{ ?»}$$

и в случае положительного ответа на него выбрать $u = 1$, а в противном случае выбрать $u = 2$. Такая стратегия гарантирует первому игроку выигрыш, равный 1. Этот вопрос отвечает «прянику».

Никакая система вопросов в терминах функции h не способна дать тот же результат. Действительно, всегда $h(1, v) = h(2, v)$ и $h(3, v) = h(4, v)$, поэтому такие вопросы не могут различить черные и белые клетки из одной четверти матрицы выигрышей (при шахматной раскраске), а без этого гарантированно получить положительный выигрыш первый игрок не может.

Таким образом, в данном примере оптимальной стратегии, использующей «кнут», не существует. Содержательно это обусловлено тем, что в данной игре задача поиска стратегии наказания слишком сложна и вместо того, чтобы решать ее, выгоднее решить более простую задачу поиска второго "пряника".

Может показаться, что новый качественный эффект обусловлен тем, что используется всего один вопрос. Дело обстоит не так, однако продемонстрировать это на том же примере нельзя.

Действительно, несложно сообразить, что в биматричной игре размера $k \times l$ всегда можно обойтись самое большее $\min\{[\log_2 k], [\log_2 l]\} + 1$ вопросами. Поэтому в игре 4×4 два вопроса позволяют получить всю существенную информацию о выборе противника. И в этом случае структура Ю. Б. Гермейера будет оптимальной.

Рассмотрим

Пример 2. Пусть выигрыши игроков заданы матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если имеется возможность задать два вопроса, то выигрыш, равный 1, первому игроку позволяют получить вопросы

«Верно ли, что $g(1, v) > 0$?»

и

«Верно ли, что $g(5, v) > 0$?».

Если ответы на оба вопроса одинаковы, то $v \leqslant 4$, и тогда выбор $u = 1$, если ответ на первый вопрос положителен, и $u = 2$ в противном случае позволяет получить выигрыш, равный 1.

Если же ответы разные, то тогда $v \geqslant 5$ и выбор $u = 5$, если ответ на второй вопрос положителен, и $u = 6$ в противном случае опять приводит к максимальному возможному выигрышу.

Те же соображения, связанные с шахматной раскраской, позволяют показать, что существенно другие вопросы не дают возможности первому игроку гарантированно получить положительный выигрыш.

Пример 3. Рассмотрим биматричную игру

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&0&1&0\\ 1&1&1&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется возможность задать два вопроса. Тогда они должны быть такими:

«Верно ли, что $g(1, v) > 0$?»

и

«Верно ли, что $h(5, v) \leqslant 0$?».

Если ответы на эти вопросы одинаковы, то $v \leqslant 4$ и эффективным является «пряник», т. е. выбор $u = 1$, если оба ответа положительны, и $u = 2$, если оба они отрицательны. Если же ответы разные, то эффективным будет «кнут» — нужно выбирать $u = 5$, если ответ на второй вопрос положителен, и $u = 6$ в противном случае.

И в этом случае можно показать, что оптимальная стратегия, по существу, единственна, т. е. в данном случае «кнут» и «пряник» используются в равных пропорциях.

Таким образом, решения рассматриваемой в данной работе задачи демонстрируют некое структурное разнообразие. По-видимому, это обстоятельство можно рассматривать как серьезный довод в пользу данной постановки вопроса.

Понятно, что описанные в данном разделе эффекты устойчивы в том смысле, что они сохраняются при малых изменениях параметров игры (элементов матриц).

Игры, подобные рассмотренным в этих примерах, заслуживают особого внимания. Функции выигрыша в них можно задавать не только матрицами, но и дизъюнктивными нормальными формами. И тогда появляется естественная мера сложности игры, что позволяет начать серьезное исследование проблемы, поднятой в предыдущем разделе.

Эти идеи существенно использовались при построении примеров данного раздела.

9. О возможных упрощениях

Следующий пример показывает, что, по крайней мере, в одном отношении определение величины $c(\gamma)$ упростить, вообще говоря, нельзя.

Пример 4. Пусть дана биматричная игра с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что имеется возможность задать один вопрос.

Оптимальный вопрос выглядит следующим образом:

«Верно ли, что $g(1, v) = 1$ или одновременно $g(1, v) = 0$ и $h(1, v) = 0$?».

Стратегия, предписывающая выбирать $u = 1$ при положительном ответе на него и $u = 2$ в противном случае, гарантирует первому игроку положительный выигрыш.

Никакая система вопросов, выраженных только в терминах функции g или только в терминах функции h, не позволяют добиться того же результата. В самом деле, с одной стороны, первый игрок должен добиться выполнения условия $v \leqslant 2$, для чего совершенно необходимо иметь информацию о значении функции h, а с другой стороны, ему нужно подумать и о своем выигрыше, для чего нужно знать значение функции g.

Таким образом, избавиться от входящего в определение величины $c(\gamma)$ выражения $\min\left(h(u^r,v)-\lambda, g(u^r,v)-\gamma\right)$, вообще говоря, нельзя.

Возникает соблазн решать задачу формирования оптимального списка из n вопросов последовательно: сначала решить аналогичную задачу для $n_1 < n$ вопросов, а затем дополнить найденный оптимальный список недостающими $n-n_1$ вопросами. К сожалению, так поступать нельзя.

Пример 5. Рассмотрим биматричную игру с матрицами выигрыша
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имея право задать один вопрос, первый игрок может гарантировать себе выигрыш, равный 1. Для этого нужно задать вопрос:

«Верно ли, что при выбранном Вами v выполняется неравенство $g(4,v) > 0$?».

Стратегия, предписывающая выбор $u = 4$ при положительном ответе на этот вопрос и $u = 3$ в противном случае, дает желаемый результат.

Так как функция выигрыша второго игрока постоянна и потому первый игрок никак не может влиять на выбор партнера, оптимальный вопрос, по существу, единственный. Более точно, любому вопросу соответствует разбиение множества V на два подмножества в соответствии с ответом на этот вопрос. Для оптимальных вопросов в одно из этих подмножеств входят элементы 1, 2 и 3, а в другое – элемент 4.

Для того чтобы первый игрок мог гарантированно получить выигрыш, равный 2, необходимо и достаточно точно знать выбор противника (опять таки в силу того, что его функция выигрыша постоянна). Эту информацию можно добыть, получив ответы на два вопроса. Эти вопросы могут быть, например, такими:

«Верно ли, что $g(1,v) > 1$ или $g(2,v) > 1$?»

и

«Верно ли, что $g(1,v) > 1$ или $g(3,v) > 1$?».

При положительном ответе на оба вопроса можно заключить, что $v = 1$ и т. д.

Существует несколько существенно разных оптимальных систем вопросов. Но в каждой из них оба вопроса обладают следующим свойством: положительный ответ дается ровно для двух управлений $v \in V$. Это доказывается элементарным подсчетом объема информации в духе книги [20].

Таким образом, в рассматриваемой игре единственный оптимальный список из одного вопроса не может быть продолжен до оптимального списка из двух вопросов.

Отметим связь данного примера и игр с булевыми матрицами, важность которых отмечалась в предыдущем разделе.

Действительно, чтобы гарантировать себе выигрыш, равный 1, первый игрок может использовать оптимальное решение аналогичной задачи для игры с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как при ограниченных притязаниях становится неважно, равен ли выигрыш первого игрока 1 или 2. В этой игре обе функции выигрыша «простые». В самом деле, функция выигрыша первого игрока в данном случае задается двучленной дизъюнктивной нормальной формой

$$g(u,v) = \left(\overline{u = 4} \& \overline{v = 4}\right) \vee (u = 4 \& v = 4).$$

Поэтому достаточно одного вопроса.

Если же ставится задача получить гарантированный выигрыш, равный 2, то разбиение выигрышей на приемлемые и неудовлетворительные приходится проводить иначе, и потому нужно решать задачу для игры с матрицами выигрышей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой игре функция выигрыша первого игрока «сложная». Самая простая дизъюнктивная нормальная форма, задающая эту функцию,

$$g(u,v) = (u = 1 \& v = 1) \vee (u = 2 \& v = 2) \vee (u = 2 \& v = 2) \vee (u = 2 \& v = 2)$$

вдвое сложнее, чем в предыдущем случае. Поэтому приходится использовать два вопроса.

10. Частные случаи

Рассматриваемая в данной статье задача не является абсолютно новой. Ее частные случаи неоднократно встречались в разных областях математики. Приведем несколько примеров.

Пусть множества U и V совпадают и представляют собой двумерную сферу в трехмерном евклидовом пространстве, а функции выигрыша заданы условиями $g(u,v) = -\|u - v\|$, $h(u,v) = 0$ (здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма).

Если первый игрок имеет право задать n вопросов, то задача очевидным образом сводится к поиску покрытия данной сферы $m = 2^n$ кругами наименьшего возможного радиуса (имеются в виду круги в соответствующей сферической геометрии). Это – типичная задача комбинаторной геометрии [22]. Если случаи $m = 2$ и $m = 4$ достаточно очевидны и решение можно найти исходя из «общих» соображений симметрии, то уже случай $m = 8$ совершенно нетривиален и при его исследовании применяется довольно изощренная геометрическая техника.

Если в этом примере заменить сферу на какое-нибудь другое компактное подмножество метрического пространства, а евклидову норму на соответствующее расстояние, то получится, по сути, задача вычисления ε-энтропии соответствующего множества (напомним, что ε-энтропия – это двоичный логарифм числа точек в минимальной ε-сети данного множества).

Этой задаче были посвящены работы А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда, А.Г. Витушкина, В.М. Тихомирова и др. (их краткое изложение и дальнейшие ссылки содержатся в обзорных статьях [23, 24] и приложении к книге [18]). В этих работах рассматриваются преимущественно подмножества функциональных пространств.

Но основное отличие от комбинаторной геометрии состоит, пожалуй, не в этом. Главным образом отличаются подходы к задаче. Если в комбинаторной геометрии делаются попытки найти точные решения, то в теории ε-энтропии изначально стараются найти простые оценки. Какой из этих двух подходов окажется более важным в контексте задач принятия решений, пока до конца не ясно.

Обратимся к другому примеру. Пусть U – конечное множество, V – некоторое семейство подмножеств множества U, функция выигрыша первого игрока определяется условиями

$$g(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in v, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а $h(u,v) = 0$.

Допустим, первый игрок имеет право задать n вопросов. Если его максимальный гарантированный результат окажется равным 1, то семейство V имеет систему общих представителей мощности $m = 2^n$. Если же максимальный гарантированный результат равен 0, то такой системы представителей не существует. (Напомним, что множество W является системой общих представителей семейства V, если $v \cap W \neq \emptyset$ для любого $v \in V$).

Эта и подобные задачи в настоящее время активно исследуются в комбинаторике. Некоторые результаты и дальнейшие ссылки см. в [25].

И еще одна задача, заимствованная из [20].

Задача 3. *Некто задумал два различных натуральных числа, не превосходящих 100. Сколько надо задать ему вопросов для того, чтобы определить эти числа, если на каждый вопрос спрашиваемый отвечает лишь «да» или «нет»?*

Рассмотрим игру двух лиц, в которой множества управлений U и V одинаковы и представляют собой множество всех неупорядоченных пар натуральных чисел, не превосходящих 100. Положим

$$g(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $h(u,v) = 0$.

Очевидно, исходная задача сводится к поиску наименьшего числа вопросов n, при котором максимальный гарантированный результат первого игрока в рассматриваемой игре равен 1. Эта задача перебором значений n в возрастающем порядке сводится к задаче, исследовавшейся выше. (Кстати, подобный перебор присутствует и при «стандартном» решении задачи из [20]).

Последняя задача представляет собой модельный пример теории вопросников (см. монографию [26] или обзор [27]).

Список подобных примеров может быть продолжен. Во всех рассмотренных случаях приходится исследовать «вырожденную» игру (функция выигрыша второго игрока постоянна). В этом смысле обсуждавшаяся в данной статье задача обобщает изучавшиеся ранее.

Пожалуй, пока нельзя говорить, что это обобщение «сгущающее» в терминологии Д. Пойя (т.е. что исследование общей задачи вносит что-то новое в понимание частных случаев). Гораздо более важной представляется обратная связь. В каждой из перечисленных областей разработаны мощные и нетривиальные методы решения соответствующих задач, позволяющие находить далеко не очевидные решения. Можно надеяться, что какие-то из этих методов при соответствующей модификации позволят решать и более общую задачу.

11. Заключение

Итак, задача решена. Приходится признать, что максимин, к вычислению которого сведена исходная задача, выглядит устрашающе.

Но, во-первых, не будем забывать, что исходная проблема включает в себя одновременно синтез рациональной процедуры обмена информацией и поиск оптимальной стратегии. Было бы наивным ожидать, что решение такой задачи удастся довести «до числа» в самом общем виде.

Во-вторых, отметим, что все-таки решение вариационной задачи поиска функций P и u_* удалось свести к вычислению максимина на пространствах U и V, которые в большинстве практически интересных случаев конечномерны.

В ранее решенных задачах подобная редукция позволяла сделать некоторые нетривиальные качественные выводы о структуре оптимального решения. То же можно сказать и о данной задаче.

Скажем несколько слов о схеме доказательства. Свойства, аналогичные сформулированному в лемме 1, выполняются для большинства подобных задач. Это хорошо известно, но обычно доказательства таких свойств получались при исследовании уже найденных оптимальных решений. Выше лемма 1 доказана независимо, исходя из чисто геометрических соображений. После этого решение задачи становится чисто формальной процедурой. Такое изменение, хотя и кажется весьма незначительным, позволяет решать достаточно широкий спектр задач, иного подхода к решению которых просто не видно.

В данной статье намеренно делался акцент на формально-математическом подходе к решению задачи. Кое-где на основе содержательных интерпретаций можно было бы угадать решение. Одной из целей статьи было продемонстрировать, что без такого угадывания вполне можно обойтись. Это представляется важным потому, что в случаях, когда решение можно угадать, математические методы по большому счету становятся ненужными. Использование формальных методов позволяет надеяться, что в каких-то случаях они позволят найти неочевидные решения.

Среди найденных качественных черт оптимальных стратегий первого игрока особо подчеркнем две. По самой постановке объем получаемой первым игроком информации невелик. Но это достигается не за счет фатального усложнения его поведения (чего нельзя было исключить a priori). Среди оптимальных стратегий первого игрока всегда есть устроенные относительно просто. Конечно, чисто формально для ее «кодировки» потребуется бесконечная информация: нужно задать действительные числа γ и λ и управления u^r из, вообще говоря, бесконечного множества U. Однако здесь аппроксимация проводится стандартными методами анализа. Разумеется, поскольку нужно задать $m = 2^n$ управлений u^r, сложность задания стратегии первого игрока будет расти экспоненциально с ростом n, но это вполне естественно.

Как и в других иерархических играх, при построении своей оптимальной стратегии первому игроку приходится решать двуединую задачу: максимизации собственного выигрыша и наказания противника за неудачный выбор управления. Но в классических моделях приоритет однозначно смещался в сторону второй задачи. В рассматриваемой же модели акцент делается на той из двух задач, которая проще.

Есть основания полагать, что эти особенности расширяют множество иерархических систем, которые могут быть адекватно описаны данной моделью.

Анонсируя неопубликованные результаты, отметим, что рассмотренная модель может быть естественным образом обобщена, если допустить возможность ошибок при передаче информации. Эти модели могут быть сформулированы и исследованы по предложенной выше схеме. Это существенно расширяет область применимости данных моделей. Причем не только в теории принятия решений. Явно просматривается, например, связь этой задачи с задачей цифровой передачи изображений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Для $r \in N$ положим $Y^r = \{v \in V:\ Q(v) = r\}$. Пусть, как обычно, $\overline{Y^r}$ обозначает замыкание множества Y^r. Выберем $v \in Y^r$ и положим $w^r = w_*(Q(v))$ (от выбора $v \in Y^r$ элемент w^r не зависит). Множество $\overline{Y^r}$ является замкнутым подмножеством компактного пространства, поэтому в некоторой точке $v^r \in \overline{Y^r}$ достигается максимум $\max\limits_{v\in\overline{Y^r}} h(w^r, v)$. Обозначим его через M^r (в случае $Y^r = \emptyset$ положим $M^r = -\infty$). Пусть вектор $b \in N$ выбран так, что $M^b = \max\limits_{r\in N} M^r$. Множество Y^b заведомо не пусто.

Положим $X^b = \overline{Y^b}$, $X^r = Y^r \backslash \overline{Y^b}$ при $r \neq b$. Для $v \in X^r$ определим значение функции P условием $P(v) = Q(v')$, где v' – какой-нибудь элемент множества Y^r. Семейство $\{X^r,\ r \in N\}$ образует разбиение пространства V, поэтому этим условием корректно определена функция $P : V \to N$. Пусть $u_*(r) = w_*(r)$ для всех $r \in N$. Покажем, что стратегия (u_*, P) искомая.

Заметим, прежде всего, что $\sup\limits_{v\in V} h(u_*(P(v)), v) \geqslant \sup\limits_{v\in V} h(w_*(Q(v)), v)$. Действительно, в противном случае найдется положительное число ε, для которого выполняется неравенство

$$\sup_{v\in V} h(w_*(Q(v)), v) \geqslant \sup_{v\in V} h(u_*(P(v)), v) + 2\varepsilon. \tag{П.1}$$

Выберем точку v' так, что

$$h(w_*(Q(v')), v') > \sup_{v\in V} h(w_*(Q(v)), v) - \varepsilon. \tag{П.2}$$

Точка v' принадлежит множеству $X^b \backslash Y^b$, так как во всех остальных точках выполняется равенство $u_*(P(v)) = w_*(Q(v))$ и, следовательно, $h(u_*(P(v)), v) = h(w_*(Q(v)), v)$. Но тогда в силу определения множества X^b в любой окрестности точки v' найдется точка $v'' \in Y^b$. Поскольку функция h непрерывна, точку $v'' \in Y^b$ можно выбрать так, что $\left|h(w^b, v'') - h(w^b, v')\right| < \varepsilon$. Но тогда

$$h(u_*(P(v'')), v'') = h(w_*(Q(v'')), v'') = h(w^b, v'') > h(w^b, v') - \varepsilon,$$

что противоречит неравенствам (П.1) и (П.2).

Покажем, что $\max\limits_{v\in V} h(u_*(P(v)),v)$ достигается, например, в точке v^b. В самом деле, для $v \in X^b$ имеем

$$h(u_*(P(v)),v) = h(w^b,v) \leqslant \max_{v\in X^b} h(w^b,v) = \max_{v\in \overline{Y^b}} h(w^b,v) = h(w^b,v^b) = M^b.$$

А для $v \notin X^b$ выполняются условия

$$\begin{gathered} h(u_*(P(v)),v) = h(w_*(Q(v)),v) \leqslant \sup_{v\in V} h(w_*(Q(v)),v) = \\ = \sup_{v\in \bigcup\limits_{r\in R} Y^r} h(w_*(Q(v)),v) = \max_{r\in N} \sup_{v\in Y^r} h(w_*(Q(v)),v) = \\ = \max_{r\in N} \sup_{v\in Y^r} h(w^r,v) \leqslant \max_{r\in N} \sup_{v\in \overline{Y}^r} h(w^r,v) = h(w^b,v^b) = \max_{r\in N} M^r = M^b = h(w^b,v^b). \end{gathered}$$

Более того, если $\sup\limits_{v\in V} h(w_*(Q(v)),v)$ не достигается (а в противном случае доказывать нечего), то $\max\limits_{v\in V} h(u_*(P(v)),v)$ достигается лишь в точках $v \in X^b$. Действительно, если $v \notin X^b$, то

$$h(u_*(P(v)),v) = h(w_*(Q(v)),v) < \sup_{v\in V} h(w_*(Q(v)),v) \leqslant \sup_{v\in V} h(u_*(P(v)),v).$$

Фиксируем произвольное положительное число δ и выберем $v' \in B(u_*,P)$ так, что $g(u_*(P(v)),v) \leqslant \inf\limits_{v\in B(u_*,P)} g(u_*(P(v)),v) + \delta$. Как было только что показано, $v' \in X^b$, а потому в любой окрестности точки v' найдется точка $v'' \in Y^b$. В силу непрерывности функций g и h эту точку v'' можно выбрать так, что будут справедливы неравенства

$$h(w^b,v'') > h(w^b,v') - \kappa \tag{П.3}$$

и

$$g(w^b,v'') < g(w^b,v') + \delta. \tag{П.4}$$

Из неравенства (П.3) следует, что

$$\begin{gathered} h(w_*(Q(v'')),v'') = h(w^b,v'') > h(w^b,v') - \kappa = \\ = \max_{v\in V} h(u_*(P(v)),v) - \kappa \geqslant \sup_{v\in V} h(w_*(Q(v)),v) - \kappa, \end{gathered}$$

т. е. точка $v'' \in B(w_*,Q)$. Но тогда из неравенства (П.4) получим

$$\begin{gathered} \inf_{v\in B(w_*,Q)} g(w_*(Q(v)),v) \leqslant g(u_*(Q(v'')),v'') = g(w^b,v'') < g(w^b,v') + \delta = \\ = g(u_*(P(v')),v') + \delta \leqslant \inf_{v\in B(u_*,P)} g(u_*(P(v)),v) + 2\delta. \end{gathered}$$

В силу произвольности δ отсюда следует нужное неравенство.

Доказательство теоремы 1. Пусть число γ выбрано так, что $c(\gamma) > 0$. Тогда существует стратегия (u_*,P) первого игрока, гарантирующая ему получение выигрыша, большего γ. Докажем это.

Фиксируем $u^0 \in U,\ u^1 \in U, ..., u^{m-1} \in U$, $v' \in V$ и число λ так, что

$$\max_{r \in N} \min\left[h(u^r, v') - \lambda,\ g(u^r, v') - \gamma\right] > 0$$

и

$$\inf_{v \in V} \max_{r \in N} \max\left[g(u^r, v) - \gamma,\ \lambda - h(u^r, v)\right] > 0.$$

Выберем $\gamma' > \gamma$ так, что, по-прежнему,

$$\max_{r \in N} \min\left[h(u^r, v') - \lambda,\ g(u^r, v') - \gamma'\right] > 0 \tag{П.5}$$

и

$$\inf_{v \in V} \max_{r \in N} \max\left[g(u^r, v) - \gamma',\ \lambda - h(u^r, v)\right] > 0 \tag{П.6}$$

(такое число γ' существует в силу непрерывности).

Для $r \in \{0, 1, ..., m-1\}$ рассмотрим множества $Y^r = \{v \in V:\ \ g(u^r, v) - \gamma' \geqslant 0\}$. Множество Y^r компактно. Поэтому если оно не пусто, то максимум

$$M^r = \max_{v \in Y^r} h(u^r, v) \tag{П.7}$$

достигается в некоторой точке v^r. Положим $M^r = -\infty$ для остальных $r \in \{0, ..., m-1\}$ и выберем число b так, что $M^b = \max\limits_{r \in \{0,1,..,m-1\}} M^r$. Не ограничивая общности, можно считать, что $b = 0$ (в противном случае просто поменяем нумерацию). В силу условия (П.5) справедливо неравенство $M^0 > \lambda$.

Пусть $Z^r = \{v \in V:\ \lambda - h(u^r, v) > 0\}$. Последовательно для $r = 0, 1, ..., m-1$ определим множества

$$X^0 = Y^0,$$

$$X^{r+1} = \left\{Y^{r+1} \cup Z^{r+1}\right\} \setminus \left\{\bigcup_{t=0}^{r} X^t\right\}.$$

В силу условия (П.6) множества X^0, $Y^1 \cup Z^1, ..., Y^{m-1} \cup Z^{m-1}$ покрывают V, следовательно, система $X^0, X^1, ..., X^{m-1}$ образует разбиение V и условие $P(v) = r$, если $v \in X^r$, корректно определяет функцию $P: V \to N$.

Определим функцию $u_*: N \to U$ условием $u_*(r) = u^r$. Покажем, что стратегия (u_*, P) искомая.

Прежде всего, убедимся, что для этой стратегии верхняя грань в определении множества $B(u_*, P)$ достигается. В самом деле, $h(u_*(P(v^0)), v^0) = h(u^0, v^0) = M^0$. В любой точке $v \in X^0$ имеем $h(u_*(P(v)), v) = h(u^0, v) \leqslant M^0$ в силу определения (П.7). Если же $v \in X^r$ $(r > 0)$, то либо $v \in X^r \cap Y^r$, либо $v \in X^r \cap Z^r$. В первом случае

$$h(u_*(P(v)), v) = h(u^r, v) \leqslant M^r \leqslant M^0$$

в силу (П.7). Во втором случае

$$h(u_*(P(v)), v) = h(u^r, v) < \lambda < M^0.$$

Итак, искомый максимум достигается, например, в точке v^0.

Но тогда в силу последнего неравенства

$$B(u_*, P) \subset V \setminus \bigcup_{z=0}^{m-1} Z^r \subset \bigcup_{z=0}^{m-1} Y^r,$$

а значит, для любого $v \in B(u_*, P)$ выполняется неравенство $g(u_*(P(v)), v) \geqslant \gamma' > \gamma$, что и требовалось доказать.

Отсюда легко следует утверждение теоремы (можно воспользоваться, например, установленной выше непрерывностью функции $c(\gamma)$).

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$\Phi(\gamma, w^0, w^1, ..., w^{m-1}, \vartheta) = \min \left\{ \sup_{v\in V} \max_{r\in N} \min\left[h(w^r, v) - \vartheta,\ g(w^r, v) - \gamma\right], \right.$$
$$\left. \inf_{v\in V} \max_{r\in N} \max\left[g(w^r, v) - \gamma,\ \vartheta - h(w^r, v)\right] \right\}.$$

Пусть число μ и управления $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ удовлетворяют условию теоремы, т. е.

$$\Phi(\gamma, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, \mu) = \sup_{w^0\in U} \sup_{w^1\in U} ... \sup_{w^{m-1}\in U} \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} \Phi(\gamma, w^0, w^1, ..., w^{m-1}, \vartheta).$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{v\in V} \min\limits_{r\in N} h(u^r, v)$ и фиксируем v_*, удовлетворяющее условию

$$\min_{r\in N} h(u^r, v_*) = \max_{v\in V} \min_{r\in N} h(u^r, v).$$

Так как $c(\gamma) = 0$, выполняется неравенство $\lambda \geqslant \mu$. Если $\lambda = \mu$, теорема доказана. Поэтому можно считать, что $\lambda > \mu$.

Но тогда $\max\limits_{r\in N} (\mu - h(u^r, v_*)) < 0$, а в силу условия $c(\gamma) = 0$ и выбора μ имеем

$$\max_{r\in N} \max\left[g(u^r, v_*) - \gamma,\ \mu - h(u^r, v_*)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{v\in V} \max_{r\in N} \max\left[g(u^r, v) - \gamma,\ \mu - h(u^r, v)\right] \geqslant 0.$$

Значит, $\max\limits_{r\in N} g(u^r, v_*) - \gamma \geqslant 0$, а в силу выбора v_* и λ тогда

$$\max_{r\in N} \min\left[h(u^r, v_*) - \lambda,\ g(u^r, v_*) - \gamma\right] \geqslant 0$$

и тем более $\sup\limits_{v\in V} \max\limits_{r\in N} \min\left[h(u^r, v_*) - \lambda,\ g(u^r, v_*) - \gamma\right] \geqslant 0$.

Кроме того, в силу выбора λ для любого $v \in V$ выполняется неравенство $\max\limits_{r\in N} [\lambda - h(u^r, v)] \geqslant 0$ и, следовательно, $\max\limits_{r\in N} \max\left[g(u^r, v) - \gamma,\ \lambda - h(u^r, v)\right] \geqslant 0$. В силу произвольности v отсюда следует $\inf\limits_{v\in V} \max\limits_{r\in N} \max\left[g(u^r, v) - \gamma,\ \lambda - h(u^r, v)\right] \geqslant 0$.

Подводя итоги, получим неравенство $\Phi(\gamma, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, \lambda) \geqslant 0$.

Но в силу выбора μ и $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\gamma, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, \lambda) \leqslant \Phi(\gamma, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, \mu) \leqslant 0.$$

Поэтому $\Phi(\gamma, u^0, u^1, ..., u^{m-1}, \lambda) = 0$ и набор λ, $u^0, u^1, ..., u^{m-1}$ искомый.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю. Б., Моисеев Н. Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем // Пробл. прикл. матем. и механики. М.: Наука, 1971. С. 30–43.

2. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

3. *Кукушкин Н.С.* Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029–1034.

4. *Алиев В. С., Цветков А. В.* Игра двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации / Планирование, оценка деятельности и стимулирование в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1985. С. 35–42.

5. *Алиев В. С., Кононенко А. Ф.* Точное агрегирование в теоретико-игровых моделях. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1990.

6. *Горелов М.А.* Параметрическая постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // АиТ. 2003. № 9. С. 103–112.

7. *Горелов М.А.* Линейный способ агрегирования информации в иерархических играх // АиТ. 2004. № 11. С. 131–140.

8. *Алиев В. С., Кононенко А. Ф.* Об условиях точного агрегирования информации в теоретико-игровых моделях. М.: ВЦ РАН, 1991.

9. *Алиев В. С., Кононенко А. Ф.* Некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1997. Т. 37. № 10. С. 1163–1173.

10. *Алиев В. С.* Многошаговые игры двух лиц с принятием решений на каждом шаге при агрегированной информации о выборе «осторожного» второго игрока / Управление большими системами. Вып. 23. М.: ИПУ РАН, 2008. С. 5-23.

11. *Алиев В. С.* Точное агрегирование информации в многошаговых играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов при агрегированной информации о выборе партнера / Управление большими системами. Вып. 24. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 5-17.

12. *Новиков Д.А., Цветков А.В.* Агрегирование информации в моделях стимулирования // АиТ. 2001. № 4. С. 120–127.

13. *Горелов М.А.* Синтез рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 2002. Т. 42. № 11. С. 1657–1665.

14. *Горелов М.А.* Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 2003. Т. 43. № 3. С. 376–387.

15. *Горелов М.А.* Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх / Динамика неоднородных систем. М.: м «ЛИБРОКОМ», 2008. С. 41–57.

16. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.

17. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.

18. *Колмогоров А.Н.* Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987.

19. *MacKay D.J.C.* Information Theory, Inference, and Learning Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

20. *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. М.: Наука, 1973.

21. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк.,1986.

22. *Тот Л.Ф.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.

23. *Тихомиров В.М.* Работы А.Н. Колмогорова по ε-энтропии функциональных классов и суперпозициям функций // Успехи матем. наук. 1963. Т.18. Вып. 5. С. 55–92.

24. *Тихомиров В.М.* Поперечники и энтропия // Успехи матем. наук. 1983. Т.38. Вып. 4. С. 91–99.

25. *Райгородский А.М.* Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2009.

26. *Picard C.-F.* Graphes et questionairs. Tome II, Questionairs. Paris: Gauthier–Villars, 1972.

27. *Пархоменко П.П.* Теория вопросников (обзор) // АиТ. 1970. № 4. С. 140–159.