PACS 89.65.-s

© 2009 г. М. А. Горелов, канд. физ.-мат. наук,
А.Ф.Кононенко, д-р физ.-мат. наук
(Вычислительный центр РАН, Москва)

ИГРЫ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ СИТУАЦИЯМИ. МОДЕЛИ С ЖЕСТКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Систематизированы и проиллюстрированы способы моделирования конфликтных ситуаций, в которых возможности каждой из сторон могут зависеть от действий партнеров. Рассмотрены конфликты, в которых нарушение ограничений невозможно физически.

1. Введение

В жизни часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда не только степень достижения целей, но и возможности субъекта зависят от решений, принятых его партнерами по той или иной деятельности. В учебниках же по теории игр такого рода моделей практически нет. Более того, авторы многих учебников отказываются от генетического принципа и начинают изложение с изучения игр в нормальной форме, откладывая рассмотрение позиционных игр на потом либо вовсе их не рассматривая [1, 2]. Это провоцировало и продолжает провоцировать попытки создать «особую» теорию игр с запрещенными ситуациями. Однако даже в самые новые учебники элементы этой теории не попадают. Попробуем разобраться, в чем тут дело.

Начнем с аналогии. В одной из первых книг на русском языке, посвященных исследованию операций [3], приведен список общих методологических принципов. Под номером один в этом списке читаем: «Критерий эффективности в модели единствен». Между тем имеется большое число работ, в том числе монографий, специально посвященных многокритериальным задачам (см., например, [4]). Означает ли это отказ от принципа Ю.Б. Гермейера? Вовсе нет.

Объяснение этому можно увидеть уже из названия третьего параграфа монографии [3]: «О целях, критериях, неполностью сформулированных моделях и объединении операций». Говоря о многокритериальных задачах, имеют в виду не модель операции, а некий полуфабрикат, «предмодель». Теоретически возможно большое число способов превращения таких полуфабрикатов в полноценные модели, в которых задан способ свертки многих критериев и тем самым определен один окончательный. Однако опыт моделирования показал, что чаще всего адекватные модели получаются при использовании какого-то из сравнительно небольшого числа способов. Описанию этих способов, а также вычислительных приемов их реализации и посвящены серьезные работы по многокритериальным задачам.

Чем же обусловлен такой интерес к «полуфабрикатам»? Схематически процесс моделирования можно представить себе как процесс последовательного принятия определенных гипотез о моделируемом объекте. Некоторые из этих гипотез лежат на поверхности. Поиск и проверка других требует значительных затрат времени, сил, а иногда и денег. На практике к числу последних часто относятся гипотезы об интересах тех или иных субъектов, принимающих решения. Вследствие этого, процесс моделирования естественным образом разбивается на два этапа. На первом этапе после принятия «очевидных» гипотез в качестве «предмодели» в обсуждаемой аналогии получается формализованное описание со многими критериями. В этом описании на приемлемом уровне точности зафиксированы «технологические» связи между параметрами, в том числе ограничения на области их изменения, а также зафиксирован список отслеживаемых критериев эффективности. На втором этапе фиксируется какой-либо способ свертки критериев в один. При этом конкретный выбор такой свертки по сути является средством устранения возникшей неопределенности в конкретизации понятия рационального решения. Этот выбор производится исходя из неформальных соображений, например, учитывая приоритеты оперирующей стороны. На этом этапе важную роль играет опыт моделирования других объектов, о котором говорилось в предыдущем абзаце.

Ровно то же происходит и в интересующих нас играх с запрещенными ситуациями. На каком-то этапе моделирования становится ясно, что «разумные» действия игроков по тем или иным причинам не могут быть несогласованными. А механизмы согласования еще остаются невыясненными. В качестве таких механизмов могут выступать последовательность принятия решений, взаимная информированность сторон, вмешательство третейского судьи и т. п. Некоторые примеры такого рода будут приведены ниже.

Часто полученный «полуфабрикат» представляют, следуя фон Нейману, в нормальной форме, т. е., считают, что игроки принимают решения одновременно и независимо. При этом ярко бросается в глаза внутренняя противоречивость такой «модели».

На самом деле интересующие нас объекты моделирования стали предметом исследования уже в первых работах по теории игр [5, 6]. Действительно, возможность для игрока сделать тот или иной ход в шахматной игре по правилам существенно зависит от ситуации на доске, которая, в свою очередь, зависит от ходов, сделанных ранее его противником. Правда, авторы этих работ не стали описывать «полуфабрикат», а сразу предложили некий способ его превращения в полноценную модель. В случае игры в шахматы проблема решается просто адекватным описанием информированности игроков. Цермело этот способ неявно использовал, а фон Нейман формально описал. Видимо потому, что у этих авторов «предмодель» отсутствует, их работы проходят мимо внимания специалистов по теории игр с запрещенными ситуациями.

Предложенный Цермело и фон Нейманом способ не является единственно возможным. Анализ ранее построенных моделей конкретных конфликтных ситуаций позволил нам выделить несколько таких способов. Их описанию и посвящена настоящая работа.

Выбор одного из таких способов должен подчиняться главному требованию – адекватности полученной при этом модели. Такой выбор не может быть предметом математической теории, а должен основываться на неформальном анализе моделируемого объекта. Предлагаемый список может служить лишь подсказкой.

С известной долей условности ситуации, в которых возникают связанные ограничения, можно разделить на два класса. К одному относятся системы, в которых субъекты пользуются общими дефицитными ресурсами. Другой включает системы, в которых некоторые результаты совместной деятельности нежелательны, например потому, что могут нарушить гомеостазис системы.

Можно привести иной, хотя и близкий способ классификации. На практике ограничения могут иметь качественно различный характер. Бывают ограничения, нарушить которые невозможно физически. А бывают такие, которые нарушить можно, но по каким-то причинам нежелательно для рассматриваемого игрока. Например, скорость автомобиля, движущегося по дороге, ограничена, во-первых, его техническими возможностями, а во-вторых, правилами дорожного движения. Выжать из автомобиля больше, чем позволяет его мотор в принципе нельзя, а ехать быстрее, чем разрешено правилами, можно, но за это полагается штраф. В данной работе рассматриваются системы первого типа. Описанию систем второго типа предполагается посвятить отдельную статью.

2. Игры с запрещенными ситуациями

Чтобы быть конкретными, дадим некоторые определения. Под игрой в нормальной форме понимают набор $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, где $N = \{1, ..., n\}$ – множество игроков, U^i – множество управлений (стратегий) u^i i-го игрока, а $g^i : \prod_{j=1}^{n} U^j \to \mathbb{R}$ – его функция выигрыша (здесь и далее $\prod_{j=1}^{n} U^j = U^1 \times U^2 \times ... \times U^n$ обозначает декартово произведение множеств). Цель i-го игрока описывается как стремление к максимизации значения этой функции. Множество $\prod_{j=1}^{n} U^j$ всех исходов игры будем в дальнейшем обозначать буквой U без индексов, а элементы этого множества – соответствующей строчной буквой $u = (u^1, u^2, ..., u^n)$. Семейство всех наборов вида $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$, получающихся при всевозможных множествах N и U^i и функциях g^i, будем обозначать через $\mathcal{NG}$.

Говоря о нормальной форме, предполагают, что игроки делают свои выборы одновременно и независимо друг от друга. При этом используется теоретико-множественная идеология, согласно которой элементами множеств стратегий могут быть объекты любой, сколь угодно сложной природы (функции, множества и т. п.), поэтому данная конструкция описывает практически любую ситуацию.

Игра в нормальной форме сама по себе не является замкнутой моделью какой-либо операции. Для полного описания конфликта нужно как-то формализовать отношение игроков к неопределенности, возникающей у них из-за отсутствия информации о выборах партнеров. Традиционно это делается с помощью указания некоторого принципа оптимальности (по другой терминологии – принципа рационального выбора). Принцип оптимальности каждой игре сопоставляет множество исходов или стратегий, которые в данной модели считаются «оптимальными».

Примером принципа оптимальности является принцип равновесия по Нэшу, ставящий в соответствие каждой игре $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, g^1, ..., g^n \rangle$ множество решений системы уравнений

$$g^i(u) = \max_{v^i \in U^i} g^i \left(u \left\| v^i \right. \right), \; i = 1, ..., n.$$

Здесь и далее символом $(u \| v^i)$ обозначается результат подстановки в ситуацию $u = (u^1, ..., u^n)$ стратегии v^i, т. е. такая ситуация $w = (w^1, ..., w^n)$, что

$$w^j = \begin{cases} v^i, \text{ если } j = i, \\ u^j, \text{ если } j \neq i. \end{cases}$$

Другим примером принципа оптимальности служит выбор игроком осторожной стратегии, реализующей максимум в выражении

$$\max_{v^i \in U^i} \min_{u \in U} g^i \left(u \left\| v^i \right. \right).$$

Заметим, что минимум в этом выражении фактически берется по стратегиям всех игроков, кроме i-го, поскольку ситуация $(u \| v^i)$ от u^i не зависит.

Обобщая эти примеры, под принципом оптимальности будем понимать либо отображение из $\mathcal{NG}$ в множество U всех исходов, если оперирующая сторона данной операции не описывается явно в рассматриваемой модели, либо отображение из $\mathcal{NG}$ в множество U^i стратегий i-го игрока, если оперирующая сторона идентифицируется с этим игроком.

По аналогии с играми в нормальной форме назовем игрой с запрещенными ситуациями набор $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$. Здесь, как и прежде, $N = \{1, ..., n\}$ – множество игроков, U^i – множество управлений i-го игрока, а $g^i : \prod_{i=1}^{n} U^i \to \mathbb{R}$ – его функция выигрыша. Для $i = 1, \ldots, n$ символом X^i обозначено подмножество ответственности i-го игрока, принадлежащее множеству всех ситуаций $U = \prod_{i=1}^{n} U^i$.

Интерпретируя эту конструкцию, будем считать, что игрок $i \in N$ отвечает за выполнение ограничения $u \in X^i$ посредством выбора своего управления u^i. Разумеется, при этом не исключается случай, когда $X^1 = X^2 = ... = X^n$, т. е. ограничение общее для всех. Но возможны и ситуации, когда $X^1 \neq U$, а $X^2 = X^3 = ... = X^n = U$, т. е. в выполнении условия $u \in X^1$ заинтересован только первый игрок, а для всех остальных это ограничение представляется абсолютно несущественным. Впервые понятие об ответственности за ограничения введено в [7]. Подчеркнем, что в множество U^i входят стратегии i-го игрока, а в множество X^i – ситуации, т. е. наборы стратегий как самого i-го игрока, так и его партнеров. Но используется множество X^i для описания поведения именно i-го игрока.

Во избежание неоднозначности в дальнейшем будем полагать, что за выполнение «чужих» ограничений игрок никакой ответственности не несет.

Предлагаемая постановка носит достаточно общий характер. Так, например, в [8] описывается несколько иная модель. А именно, в игре двух лиц первый игрок должен выбирать свое управление u^1 так, чтобы, во-первых, выполнить «свое» ограничение $(u^1, u^2) \in Y^1$, а во-вторых, обеспечить существование хотя бы одного управления u^2, для которого выполняется «чужое» ограничение $(u^1, u^2) \in Y^2$ (и аналогично для второго игрока). Однако эта задача может быть достаточно естественным образом вложена в описанную выше схему. Достаточно определить множества $Z^1 = \{u^1 \in U^1 : \exists u^2 \in U^2 \ (u^1, u^2) \in Y^2\}$, $Z^2 = \{u^2 \in U^2 : \exists u^1 \in U^1 \ (u^1, u^2) \in Y^1\}$ и положить $X^1 = Y^1 \cap (Z^1 \times U^2)$ и $X^2 = Y^2 \cap (U^1 \times Z^2)$.

Класс наборов вида $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ обозначим через $\mathcal{RG}$. Далее будем предполагать, что всем участникам конфликта абсолютно точно известны все параметры игры (множества N, U^i, X^i и функции g^i). Разумеется, возможны ситуации, когда это заведомо не так, но их исследование выходит за рамки данной статьи.

Чтобы завершить построение модели, нужно описать отношение игроков к неопределенности, возникающей из-за неизвестности выборов партнеров. Встречающиеся на практике способы такого описания можно разделить на два класса. Способы первого типа ставят в соответствие каждой игре с запрещенными ситуациями Δ некоторую традиционную модель (например, игру в нормальной форме Γ с принципом равновесия по Нэшу или игру в позиционной форме с принципом совершенного по подыграм равновесия) и считают оптимальным решением игры Δ множество оптимальных решений в модели-образе (множество ситуаций равновесия в игре Γ или множество ситуаций совершенного равновесия в позиционной игре соответственно). Способы второго типа определяют оптимальные стратегии (ситуации) непосредственно в игре Δ , обычно по аналогии с каким-то из классических принципов оптимальности.

Первый подход удобен тем, что позволяет широко использовать при исследовании игр с запрещенными ситуациями результаты, полученные для классических моделей. Видимо поэтому он используется чаще.

Возможен альтернативный подход к моделированию конфликтов с запрещенными ситуациями, формализующий идеи, высказанные во введении. При этом подходе под игрой с запрещенными ситуациями следует понимать множество классических моделей (например, игр в нормальной форме) с определенным принципом оптимальности. При добавлении новых гипотез это множество, естественно, сужается. И когда оно сузится до одного элемента, построение модели будет закончено. Таким образом, построение модели можно рассматривать как выбор одного элемента из соответствующего множества моделей. Такой подход удобен, например, в ситуациях, описанных в следующем разделе.

3. Информация и порядок ходов

По понятным причинам часто на определенном этапе построения модели точно не известна информированность игроков о действиях друг друга. Между тем в жизни нередко встречаются такие ситуации, когда в момент принятия решения каждый из игроков может на основе имеющейся у него информации разделить все свои управления на те, при которых гарантированно будет выполнено ограничение, за которое он отвечает, и те, при которых это ограничение будет заведомо нарушено (а промежуточный случай отсутствует). В таком случае все проблемы, обусловленные наличием связанных ограничений, решаются, если просто адекватно описать информированность игроков.

На примере игры в шахматы этот подход был реализован в [5]. Введением понятия стратегии в позиционной игре в [6] фон Нейман решает, в частности, и проблему наличия связанных ограничений. В явном виде в очень похожей ситуации связанные ограничения описаны в [9]. Чтобы более выпукло продемонстрировать эту идею, рассмотрим более простой пример, заимствованный из [8].

Пример 1. Рассмотрим простейшую модель дуополии Курно. Пусть имеются две фирмы, продающие на рынке однородный продукт, производимый ими или закупаемый вне рассматриваемого рынка. Если данные фирмы предложат на продажу продукт в количествах u^i $(i = 1, 2)$, то на рынке сложится цена $p(u^1, u^2) = 1 - \frac{1}{2}(u^1 + u^2)$. В таком случае прибыль i-й фирмы составит величину $g^i(u^1, u^2) = \left(1 - \frac{1}{2}(u^1 + u^2)\right) u^i,\ i = 1, 2$ (издержками на производство или приобретение продукта в данной модели пренебрегаем). Предположим, возможности фирм ограничены, так что управления u^i выбираются из множеств $U^i = [0,1]$, $i = 1,2$. Теперь допустим, что обе фирмы пользуются общим ресурсом, объем которого ограничен, и потому должны выполняться условия $u^i \in X^i$, где множества $X^i = \{(u^1, u^2) : \ u^1 + u^2 \leqslant 1\}$, а $i = 1,2$ (предполагается, что затраты ресурса пропорциональны количеству продукта). Таким образом, получаем игру с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle \{1,2\}, U^1, U^2, X^1, X^2, g^1, g^2 \rangle$. Будем интересоваться ситуациями, отклоняться от которых в одиночку не выгодно ни одному из игроков.

Теперь рассмотрим несколько интерпретаций.

1. Предположим, что фирма 1 – это производитель зерна, продающий свою продукцию только на внутреннем рынке данной страны, фирма 2 – импортер, закупающий зерно за границей и продающий его внутри рассматриваемой страны, а наличие общих ограничений объясняется дефицитом хранилищ или перерабатывающих мощностей. Будем считать, что хранилища принадлежат третьим лицам и порядок доступа к ним расматриваемых фирм четко не регламентирован (эта неопределенность и может быть причиной появляния «предмодели»). Естественно полагать, что фирма 1 выбирает свое управление весной, т. е. раньше фирмы 2, определяющей объем закупок после сбора урожая. Пусть фирма 2 может получить достоверную информацию о выборе фирмы 1 до принятия своего решения (это некая дополнительная гипотеза). Допустим, что фирма, первая принявшая решение, может раньше конкурента заключить договор на хранение. Тогда, если придерживаться нормальной формы, следует считать, что второй игрок выбирает некоторую функцию $v^2 : U^1 \to U^2$, удовлетворяющую условию $(u^1, v^2(u^1)) \in X^2$, или, что то же самое, $u^1 + v^2(u^1) \leqslant 1$ для любого $u^1 \in [0,1]$. Обозначим множество всех таких функций через V^2. Определим функции $f^i : U^1 \times V^2 \to \mathbb{R}$ условиями $f^i(u^1, v^2) = g^i(u^1, v^2(u^1))$, $i = 1,2$. Таким образом, получаем игру в нормальной форме $\Gamma = \langle \{1,2\}, U^1, V^2, f^1, f^2 \rangle$, которая вместе с принципом оптимальности Нэша дает описание моделируемой системы, соответствующее тем гипотезам, которые были приняты.

Множество ситуаций равновесия в этой игре описывается следующим образом. Для любой стратегии $v^2 \in V^2$ пара $(1, v^2)$ является ситуацией равновесия и других ситуаций равновесия нет. В самом деле, для любой стратегии $v^2 \in V^2$ из неравенства $u^1 + v^2(u^1) \leqslant 1$ следует, что $v^2(1) = 0$, поэтому в ситуации $(1, v^2)$ первый игрок получает выигрыш $\frac{1}{2}$, равный глобальному максимуму его функции выигрыша. Поскольку функция выигрыша первого игрока строго вогнута, этот глобальный максимум достигается в одной точке. Таким образом, необходимым условием равновесия является выполнение равенства $u^1 = 1$. Но в таком случае выигрыш второго игрока равен $f^2(1, v^2) = g^2(1, v^2(1)) = g^2(1,0) = 0$ при любой стратегии $v^2 \in V^2$, т. е. отклонение второго игрока ничего ему не дает. Первому же игроку не выгодно отклоняться от ситуации вида $(1, v^2)$, так как в ней он получает максимальный возможный выигрыш. Следовательно, выполнение равенства $u^1 = 1$ является и достаточным условием равновесия.

Возможна другая интерпретация той же модели. Предположим, дефицитный ресурс – это вода, забираемая предприятиями из одной реки. В этом случае фирма, находящаяся ниже по течению имеет информацию о количестве воды, потраченной партнером, но может использовать лишь тот объем воды, который остался. Такая ситуация весьма характерна для некоторых районов земного шара.

2. Разумеется, возможна симметричная ситуация, в которой импортером является фирма 1, а производителем – фирма 2. Тогда придем к другой игре в нормальной форме $\Gamma' = \langle \{1, 2\}, V^1, U^2, h^1, h^2 \rangle$, где V^1 обозначает множество всех отображений $v^1 : U^2 \to U^1$, удовлетворяющих условию $(v^1(u^2), u^2) \in X^1$, а функции выигрыша игроков $h^i : V^1 \times U^2 \to \mathbb{R}$ определяются равенствами $h^i(u^1, v^2) = g^i(v^1(u^2), u^2)$.

Множества ситуаций равновесия выглядят аналогичным образом. При этом первый игрок получает нулевой выигрыш, а второй – максимальный возможный выигрыш, равный $\frac{1}{2}$.

3. Предположим теперь, что первый игрок – это государство, которое еще до начала сева принимает и обнародует программу импортных закупок зерна в зависимости от внутреннего производства, а второй игрок – это фирма производитель (все остальные гипотезы те же, что и в двух предыдущих интерпретациях). Тогда множество стратегий первого игрока V^1 такое же, как и в предыдущем случае, а множество стратегий второго игрока есть множество W^2 всех функций (функционалов) $w^2 : V^1 \to U^2$, удовлетворяющих условию $(v^1(w^2(v^1)), w^2(v^1)) \in X^2$. Если определить функции выигрыша игроков $e^i : V^1 \times W^2 \to \mathbb{R}$ равенствами $e^i(v^1, w^2) = g^i(v^1(w^2(v^1)), w^2(v^1))$, $i = 1, 2$, то получится адекватная модель новой системы $\Gamma'' = \langle \{1, 2\}, V^1, W^2, e^1, e^2 \rangle$.

Непосредственно проверяется, что в данной игре в любой ситуации равновесия первый игрок получает нулевой выигрыш, а второй – выигрыш, равный $\frac{1}{2}$.

Таким образом, в рассмотренном примере в зависимости от моделируемой ситуации, делались разные дополнительные гипотезы (первые два варианта были рассмотрены в [8]) и получались существенно разные модели. Но каждый раз проблема, связанная с наличием общего ограничения, оказывалась разрешенной.

Кстати говоря, здесь достаточно хорошо просматривается множество моделей, о котором говорится в последнем абзаце предыдущего раздела. Оно состоит из игр $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ и еще каких-то игр, отвечающих другим возможным случаям информированности игроков.

Общие черты рассмотренных выше примеров можно формально-аксиоматически описать следующим образом. Допустим, имеется игра с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$, представляющая собой предмодель некоторой системы, а игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, V^1, ..., V^n, h^1, ..., h^n \rangle$ есть адекватная модель той же системы. Тогда найдется такое отображение $\pi : \prod_{i=1}^{n} V^i \to \bigcap_{i=1}^{n} X^i$, что функции h^i определяются условиями $h^i(v^1, ..., v^n) = g^i(\pi(v^1, ..., v^n))$, $i = 1, ..., n$. Эта конструкция аналогична понятию квазиинформационного расширения. О понятии квазиинформационного расширения можно прочесть в [10].

Условие, сформулированное в предыдущем абзаце, выделяет некоторое подмножество моделей из класса $\mathcal{NG}$ игр в нормальной форме. Выбор одной модели из этого подмножества требует привлечения некоторых дополнительных гипотез о моделируемой ситуации. Таким образом, здесь приходим к идее, описанной в конце раздела 2.

4. Проекция

Часто наличие связанных ограничений учитывается следующим образом. Игре с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ ставится в соответствие игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, h^1, ..., h^n \rangle$, где функции h^i определяются равенствами $h^i(u) = g^i(R(u))$, а R – некоторое отображение из множества U в множество $X = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X^i$. Возможность такой замены, разумеется, определяется природой моделируемой системы, а неопределенность проекции R зачастую и является причиной появления «предмодели» Δ. Во многих случаях сужение функции R на множество X является тождественным отображением. По этой причине для нее используется термин «проекция».

Одну из первых моделей такого рода предложил Дж. Нэш [11] (см. также [12]).

Пример 2. Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы компактное множество X и точка $x = (x^1, ..., x^n) \in X$. Рассмотрим следующую игру n лиц. Каждый из игроков выбирает число u^i. Если получившийся вектор $u = (u^1, \ldots, u^n)$ принадлежит множеству X, то игроки получают выигрыши u^i соответственно. В противном случае игроки получают выигрыши x^i.

Определим множество $W = \{v \in X: \ v^i \geqslant x^i\}$. Равновесием по Нэшу в рассматриваемой игре является любая эффективная точка множества W.

Эта игра, благодаря своей простоте, имеет множество интерпретаций. Обратимся вновь к модели «Дуополия Курно». Но теперь будем предполагать, что дефицитный ресурс – это рыба, плавающая в замкнутом водоеме, управления игроков – это квоты на вылов рыбы конкурирующими фирмами, а ограничение $u^1 + u^2 \leqslant 1$ описывает область гомеостазиса рассматриваемой популяции рыб. Предположим, квоты устанавливаются один раз на длительный переиод, а выигрыш игрока – это средняя прибыль в единицу времени. Такую ситуацию можно описать следующей игрой в нормальной форме. Определим отображение R условием

$$R(u) = \begin{cases} u, \ \text{если}\, u \in X, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

и рассмотрим игру $\Gamma = \langle \{1,2\}, U^1, U^2, h^1, h^2 \rangle$ с функциями выигрыша, определенными равенствами $h^i(u) = g^i(R(u))$. Содержательно это означает, что если квоты на вылов рыбы таковы, что гомеостазис популяции сохраняется, то фирмы получают прибыль в соответствии со своими квотами, а в противном случае рыба в водоеме исчезает и ловить становится нечего.

Множество ситуаций равновесия по Нэшу в этой игре есть

$$\left\{ \left(u^1, u^2\right): \ 0 \leqslant u^1 \leqslant 1, \ 0 \leqslant u^2 \leqslant 1, \ u^1 + u^2 = 1 \right\}.$$

Проектор R может определяться «физикой» рассматриваемой системы, как в рассмотренном примере, или создаваться искусственно как некий способ цивилизованного дележа дефицитного ресурса. Рассмотрим популярный способ проведения биржевых торгов. В приводимой ниже модели опущены некоторые второстепенные детали. Полную модель можно найти в [13].

Пример 3. Американский аукцион проводится по следующим правилам. Пусть на аукционе продается некий делимый ресурс в количестве V. Каждый из n участников может подать заявку (p^i, v^i) на покупку ресурса в количестве v^i по цене p^i.

Предположим, он может привлекать ресурсы для участия в аукционе, но, разумеется, не бесплатно: занимая деньги в количестве x, он платит кредитору в среднем $a^i(x)$ рублей за один рубль. Кроме того, он может размещать средства на альтернативных сегментах финансового рынка, получая прибыль в размере $b^i(y)$ рублей на один вложенный рубль, если вкладывает y рублей. Поскольку речь идет о средних величинах, функции a^i и b^i можно считать непрерывными. А предполагая, что ресурсы привлекаются и размещаются оптимальным образом, придем к выводу, что функция a^i возрастает, а функция b^i убывает. С учетом балансовых ограничений на имеющиеся средстава управления $u^i = (p^i, v^i, x^i, y^i)$ выбираются i-м игроком из множества

$$U^i = \left\{ \left(p^i, v^i, x^i, y^i\right) : \ p^i \geqslant 0, \ v^i \geqslant 0, \ x^i \geqslant 0, \ y^i \geqslant 0, \ x^i = p^i v^i + y^i \right\}.$$

Предположим, что i-й участник торгов рассчитывает продать купленный на аукционе ресурс по цене P^i и стремится максимизировать прибыль

$$g^i(u) = P^i v^i - p^i v^i + b^i(y^i) y^i - a^i(x^i) x^i.$$

Поскольку количество ресурса ограничено, имеется связывающее ограничение, задаваемое множествами

$$X^1 = ... = X^n = X = \left\{ \left(u^1, ..., u^n\right) : \ \sum_{i=1}^{n} v^i \leqslant V \right\}.$$

Правилами проведения аукциона задается следующее отображение R. Для каждой цены p определяется множество игроков, предлагающих цену p^i, не меньшую p: $M(p,u) = \{i \in N : \ p^i \geqslant p\}$. Затем в множестве цен $\{p^1, ..., p^n\}$ находится наименьшая цена $p_{\#}(u)$, для которой выполняется неравенство $\sum\limits_{i \in M(p_{\#}(u),u)} v^i \leqslant V$. Наконец, проекция $R : \prod\limits_{i=1}^{n} U^i \to \prod\limits_{i=1}^{n} U^i$ задается покомпонентно условиями

$$R^i(u) = \left\{ \begin{array}{l} (p^i, v^i, x^i, y^i), \ \text{если } p^i \geqslant p_{\#}(u), \\ (p^i, 0, x^i, y^i + p^i v^i), \ \text{если } p^i < p_{\#}(u). \end{array} \right.$$

Таким образом, в данном случае организаторы торгов задают способ, с помощью которого из игры с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$ получается игра в нормальной форме $\Gamma = \langle N, U^1, ..., U^n, h^1, ..., h^n \rangle$ с функциями выигрыша вида $h^i(u) = g^i(R(u))$.

Эта игра имеет ситуацию равновесия $u_0 = (u_0^1, ..., u_0^n)$, которая может быть найдена следующим образом. Не ограничивая общности, будем считать, что игроки перенумерованы так, что $P^1 \geqslant P^2 \geqslant ... \geqslant P^n$. Для любой цены p^i уравнение $\dfrac{P^i - p^i}{p^i} = a^i(x^i)$ имеет единственный корень $x^i = \alpha^i(p^i)$ (так как функция α^i непрерывна и убывает), а уравнение $\dfrac{P^i - p^i}{p^i} = b^i(x^i)$ имеет единственный корень $y^i = \beta^i(p^i)$ (функция β^i непрерывна и возрастает). Положим

$$\delta^i(p^i) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha^i(p^i) - \beta^i(p^i), \ \text{если } \ \alpha^i(p^i) - \beta^i(p^i) \geqslant 0, \\ 0 \quad \text{в противном случае.} \end{array} \right.$$

Функция δ^i убывает. Найдем решение p уравнения $pV = \sum_{i=1}^{n} \delta^i(p)$. Для тех игроков, для которых выполняется условие $\alpha^i(p) > \beta^i(p)$, равновесная стратегия имеет вид $\left(p, \frac{\alpha^i(p)-\beta^i(p)}{p}, \alpha^i(p), \beta^i(p)\right)$, а для остальных – вид $(0, 0, \alpha^i(p^i), \beta^i(p^i))$, где цена p^i определяется равенством $\alpha(p^i) = \beta^i(p^i)$. Равновесность этой ситуации проверяется непосредственно. В рассматриваемой игре могут быть и другие ситуации равновесия, но выигрыши всех игроков в них такие же, как в ситуации, построенной выше.

В построенной ситуации равновесия суммарный спрос на продаваемый на данном аукционе ресурс равен предложению, а все игроки, подающие заявки с ненулевыми объемами, назначают одинаковую цену, по которой они и получают ресурс в заказаннгом количестве.

Дележом дефицитных ресурсов далеко не исчерпывается область применимости данного подхода. Моделями того же типа описываются системы, в которых решения принимаются по правилу единогласия (см., например, модель образования коалиций в [14, §26] или [1, гл. 4 §3]), или добровольное финансирование общественных проектов.

5. Изменение множеств управлений

Что же делать, если получить информацию, позволяющую уточнить имеющуюся «предмодель», по каким-то причинам невозможно? Согласно общим методологическим принципам теории исследования операций [3] в таком случае нужно исходить из двух посылок. Во-первых, максимально использовать всю имеющуюся информацию. А во-вторых, быть осторожным по отношению к имеющимся неопределенностям, т. е. ориентироваться на наихудший случай.

В рассматриваемой ситуации эти принципы конкретизируются следующим образом. Пусть в результате анализа моделируемой ситуации построена игра с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n\rangle$. Будем считать, что оперирующей стороне в этой модели соответствует игрок с номером 1. Тогда для $i = 2, ..., n$ определим множества

$$V^i = \left\{u^i \in U^i : \ \exists w \in U \ \left(w \left\| u^i\right.\right) \in X^i\right\},$$

являющиеся проекциями множеств $X^i \subset \prod_{i=1}^{n} U^i$ на U^i. Оперирующая сторона может быть уверена, что любой другой игрок, заинтересованный в выполнении своего ограничения $u \in X^i$, никогда не выберет управление $u^i \notin V^i$, и, значит, доступная информация использована. Далее определим множество

$$V^1 = \left\{u^1 \in U^1 : \ \left\{u^1\right\} \times \prod_{i=2}^{n} V^i \subset X^1\right\}$$

тех управлений первого игрока, которые гарантируют выполнение его «личных» ограничений при любых действиях партнеров. Выбирая управление из множества V^1, оперирующая сторона гарантирует, что ее ограничение $u \in X^1$ будет заведомо выполнено. Теперь поставим в соответствие игре с запрещенными ситуациями Δ игру в нормальной форме $\Gamma = \langle N, V^1, ..., V^n, g^1, ..., g^n\rangle$ и дальше будем работать с ней.

Вернемся к примеру 1 (дуополия Курно). В этом случае получим (вырожденную) игру $\Gamma = \langle \{1,2\}, V^1, V^2, g^1, g^2 \rangle$, в которой $V^1 = \{0\}$, $V^2 = [0,1]$, и первый игрок гарантированно получает нулевой выигрыш.

В примере, как и во многих других, гарантированный результат оперирующей стороны оказывается неудовлетворительным (он просто равен его минимуму). В этом случае оперирующей стороне остается взять на себя определенные риски, например, предположив, что его партнеры не станут выбирать какие-то не выгодные для него управления, т. е., по сути, изменить модель, сузив множества U^i или X^i, относящиеся к другим игрокам, или приняв произвольно какие-то гипотезы, аналогичные рассмотренным в предыдущих разделах. Но это уже право оперирующей стороны, а не исследователя операций.

Основанием для сужения множеств U^i может быть, например, предположение о рациональном поведении партнеров. Скажем, вполне естественно считать, что i-й игрок никогда не выберет управление $v^i \in U^i$, если найдется управление $w^i \in U^i$, для которого неравенство $g^i\left(u \,\|v^i\right) < g^i\left(u \,\|w^i\right)$ выполняется для всех $u \in U$.

Проанализируем в этой трактовке модель, заимствованую, в основном, из [15].

Пример 4. Пусть управления $u^1 \in U^1 = [0, +\infty)$ первого игрока представляют собой цены на закупаемую продукцию, а управления $u^i \in U^i = [0, +\infty)$, $i = 2, ..., n$ остальных игроков интерпретируются как объемы выпуска продукции. Цели этих игроков состоят в максимизации прибыли

$$g^i(u) = u^1 u^i - \frac{1}{2a^i}\left(u^i\right)^2, i = 2, ..., n$$

(здесь $\frac{1}{2a^i}\left(u^i\right)^2$ – затраты i-го игрока на производство, а a^i – параметр, характеризующий эффективность этого производства). Первый игрок стремится минимизировать суммарные затраты, т. е. максимизировать функцию

$$g^1(u) = -\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2a^i}\left(u^i\right)^2.$$

Кроме того, он должен обеспечить объем выпуска B, т. е. выполнить ограничение $u \in X^1 = \left\{ u \in U : \sum\limits_{i=2}^{n} u^i \geqslant B \right\}$. Для остальных игроков связывающих ограничений нет, т. е. $X^i = U$, $i = 2, ..., n$. Таким образом, имеем игру с запрещенными ситуациями $\Delta = \langle N, U^1, ..., U^n, X^1, ..., X^n, g^1, ..., g^n \rangle$. Предположим вдобавок, что игрок 1 первым выбирает свое управление и этот выбор становится известным его партнерам до принятия ими окончательного решения.

Если первый игрок выберет цену, равную двойственной оценке в задаче выпуклого программирования

$$-\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2a^i}\left(u^i\right)^2 \to \max,$$

$$\sum_{i=2}^{n} u^i \geqslant B,$$

то в предположении рационального действия каждого из своих партнеров он не только обеспечит максимум своего выигрыша, но и добьется выполнения связывающего ограничения.

Аналогичный подход использован в модели дележа дефицитного ресурса в [16].

6. Заключение

В работе проанализированы особенности моделирования и принятия решений в ситуациях с совместными ограничениями на управления нескольких игроков. Формализовано понятие ответственности за нарушение этих ограничений. Ответственным за совместное ограничение может быть собственник дефицитного ресурса, государственный орган управления, отвечающий за экологическую ситуацию, коллективный орган управления добровольным объединением субъектов, решающих общие проблемы.

Первые два варианта характеризуются большей централизацией управления, заключающейся в возможности выделенного игрока определять порядок ходов (очередность принятия и реализации решений) и потоки информации, по которой эти решения принимаются.

При добровольном объединении (децентрализованный вариант) соответствующие модели принятия решений более «симметричны» относительно субъектов и потому должны носить более компромиссный характер.

Предлагаемая формализация и анализ примеров наглядно демонстрирует основные особенности конфликтов со связывающими ограничениями:

– приоритет первого хода над информированностью, что приводит, в частности, к нарушению классического неравенства «максимин меньше минимакса», на что уже обращалось внимание в [8].

– возможность использовать как элемент стратегии угрозу наказания не только минимизацией выигрыша партнера, но и умышленным нарушением тех ограничений, за которые он отвечает, и т. д.

Последнее, впрочем, относится уже к системам, в которых нарушение какого-то совместного ограничения в принципе возможно, но нежелательно для отвечающего за него игрока. Эти системы тоже могут описываться предмоделями рассматриваемого вида, но способы окончательной формализации этих предмоделей могут быть несколько иными. Можно выделить, по крайней мере, три таких способа:

1. использование штрафных функций;

2. сведение задачи к исследованию игры с векторным критерием;

3. определение нового принципа оптимальности непосредственно на классе игр с запрещенными ситуациями.

Их рассмотрению предполагается посвятить отдельную статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.

2. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.

3. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

4. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

5. *Zermelo E.* Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. // Proc. Fifth Int. Congr. of Math. (Cambridge, 1912). Cambridge: Cambridge University Press. 1913. P. 501-504. (Рус. перевод: Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры. М.: Физматлит. 1961. С. 167-172).

6. *Neumann J. von.* Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // Mathematische Annalen. 1928. Vol. 100. P. 295-320. (Русский перевод: Нейман Дж. Фон. К теории стратегических игр // Матричные игры. М.: Физматлит, 1961. С. 173-204).

7. *Кононенко А.Ф. Мухтаров У.М.* Динамические системы с ответственностью за выполнение связанных ограничений. М.: ВЦ РАН, 2002.

8. *Токарев В.В.* Гарантированные результаты в играх с запрещенными ситуациями // АиТ. 2009. №6. С. 123–140.

9. *Лагунов В.Н.* Многошаговая игра n лиц с фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 19-24.

10. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984.

11. *Nash J.F.* The bargaining problem // Econometrica. 1950. V. 18. № 2. P. 155-162.

12. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. М.: Иностр. лит-ра, 1961.

13. *Горелов М.А., Никифоров Л.Г., Соколов В.П.* Аукционы ГКО: равновесное решение // Рынок ценных бумаг. 1997. № 14. С. 21–24; № 15. С.4–9; № 19. С. 22–28.

14. *Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

15. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977.

16. *Кононенко О.В.* Математическое моделирование экономических механизмов взаимодействия между водохозяйственными и сельскохозяйственными предприятиями // Вестн. с/х науки. 1981. № 2. С. 19-23.