PACS 89.65.-s

© 2009 г. М. А. Горелов, канд. физ.-мат. наук
(Вычислительный центр РАН, Москва)

ГЕОМЕТРИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ РАСШИРЕНИЙ

Изучаются пространства стратегий во всевозможных информационных расширениях игры, снабженные естественной метрикой. Показано, что все их можно рассматривать как подпространства одного пространства, соответствующего специальному квазиинформационному расширению, имеющему ясную содержательную интерпретацию. Получена верхняя оценка энтропии информационных расширений.

1. Введение

Во многих иерархических системах элемент верхнего уровня обладает правом первого хода, т. е. первым выбирает и сообщает партнерам свою стратегию. Естественно, при этом он рассчитывает на «адекватную» реакцию контрагентов на такое сообщение. Это нашло свое отражение в классических моделях иерархических систем [1, 2]. Однако на практике иногда приходится сталкиваться с ситуацией, когда элементы нижнего уровня ведут себя в подобной ситуации неразумно. Одна из причин этого может заключаться в том, что предложенный элементом верхнего уровня механизм управления оказывается слишком сложным и подчиненные попросту не могут найти оптимальное решение. Чтобы учесть это обстоятельство в моделях, нужна количественная мера сложности такого механизма. В [3] такая мера сложности была введена в терминах естественной псевдометрики на множестве стратегий элемента верхнего уровня.

Особый интерес представляет изменение сложности при информационных обменах между игроками. Результаты, позволяющие оценить такое изменение, получены в третьем разделе статьи. В теории игр с фиксированным порядком ходов хорошо известна особая роль игры Гермейера Γ_2, в которой первый игрок выбирает свою стратегию как функцию стратегии партнера. В частности, максимальный гарантированный результат первого игрока в этой игре не хуже, чем при любой другой информированности участников конфликта [4]. Этот результат в известной степени обобщается в четвертом разделе статьи. Оказывается, что любая стратегия первого игрока в любом информационном расширении данной игры может быть сколь угодно точно приближена некоторой стратегией в игре Γ_2. В этом смысле игра Γ_2 является универсальной. Во многих интересных информационных расширениях множество стратегий с естественной псевдометрикой является вполне ограниченным, но не компактным. В последнем разделе статьи предлагается процедура компактификации.

Примечательно, что все предлагаемые геометрические конструкции легко интерпретируются в терминах принятия решений и в той или иной форме появлялись при анализе иерархических игр [5, 4, 6].

2. Основные определения

Пусть задана произвольная игра $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – множества стратегий, а g и h – функции выигрыша первого и второго игроков соответственно. Для каждой стратегии $u \in U$ определено подмножество $G(u) = \{(g(u,v), h(u,v)) : v \in V\}$ плоскости $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\Xi = \{(g(u,v), h(u,v)) : \, u \in U, v \in V\} \subset \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Определим в $\mathbb{R}^2$ норму $\|\cdot\|$ условием $\|(g,h) - (g', h')\| = \max\{|g - g'|, |h - h'|\}$.

С помощью этой нормы введем псевдометрику Хаусдорфа (см. [7]) на классе всех подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$: $\chi(G, G') = \max\left\{\sup\limits_{x\in G}\inf\limits_{y\in G'}\|x-y\|, \sup\limits_{x\in G'}\inf\limits_{y\in G}\|x-y\|\right\}$.

Зададим псевдометрику ϱ на U, положив $\varrho(u,u') = \chi(G(u), G(u'))$. Псевдометрику ϱ и порождаемую ей топологию в дальнейшем будем называть естественными.

Пусть $\Phi(X, Y)$ обозначает семейство всех отображений из X в Y.

Определение 1. Пусть заданы игры $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$ *и* $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, g_*, h_*\rangle$, $c \in \Phi(U, U_*)$, $d \in \Phi(V, V_*)$, $\pi \in \Phi(U_* \times V_*, U \times V)$. *Будем говорить, что четверка* $\langle \Gamma_*, \pi, c, d\rangle$ *является квазиинформационным расширением игры* Γ, *если*

1) $g_* = g \circ \pi, h_* = h \circ \pi$;

2) *для любых* $u \in U, v \in V, u_* \in U_*, v_* \in V_*$ *выполняются равенства*

$$\mathrm{pr}_1(\pi(c(u), v_*)) = u, \;\; \mathrm{pr}_2(\pi(u_*, d(v))) = v,$$

где pr_1 *и* pr_2 *- канонические проекции декартова произведения* $U \times V$ *на первый и второй сомножитель, а значок* $\circ$ *означает композицию отображений.*

Подробнее о понятии квазиинформационного расширения можно прочесть в [4].

В дальнейшем для нас будет наиболее интересно следующее квазиинформационное расширение. Пусть $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$ - игра, $U_2 = \Phi(V, U), V_2 = V$. Отображение π определяется условием $\pi(u_2, v_2) = (u, v)$, если $v = v_2$, $u = u_2(v_2)$. Отображение c ставит в соответствие элементу $u \in U$ функцию u_2 из V в U, тождественно равную u; d – тождественное отображение. Тогда игра $\Gamma_2 = \langle U_2, V_2, g_2, h_2\rangle$ с отображениями π, c, d является квазиинформационным расширением игры Γ. В соответствии с традицией индекс “2” будем сохранять именно за этим квазиинформационным расширением, а само расширение будем называть гермейеровским.

Напомним, что диаметром множества W в псевдометрическом пространстве называется точная верхняя грань расстояний между любыми двумя точками этого множества. Покрытие множества W называется ε-покрытием, если диаметр любого множества из покрытия не превосходит 2ε. Подмножество A множества W называется ε-сетью для множества W, если любая точка W находится на расстоянии, не превышающем ε, от некоторой точки A. Множество W называется ε-различимым, если любые две его несовпадающие точки лежат на расстоянии, большем ε.

Мотивировки следующих определений содержатся в [3].

Определение 2. Пусть $H_\varepsilon(\Gamma)$ *– минимальное число множеств* ε*-покрытия множества* U *относительно естественной псевдометрики* ϱ . *Двоичный логарифм числа* $H_\varepsilon(\Gamma)$ *будем называть* ε*-энтропией игры* Γ.

Определение 3. Пусть $C_\varepsilon(\Gamma)$ *– максимальное число точек в* ε*-различимом подмножестве множества* U *относительно естественной псевдометрики* ϱ. *Двоичный логарифм числа* $C_\varepsilon(\Gamma)$ *будем называть* ε*-емкостью игры* Γ.

Определение 4. Пусть Γ *– игра,* $\langle \Gamma_*, \pi, c, d\rangle$ *– ее квазиинформационное расширение. Обозначим через* $H_\varepsilon(\Gamma, \Gamma_*)$ *минимальное число точек в* ε*-сети подмножества* $c(U) = \{c(u) : u \in U\}$ *множества* U_* *относительно естественной псевдометрики* ϱ_* *на множестве* U_**. Двоичный логарифм числа* $H_\varepsilon(\Gamma, \Gamma_*)$ *будем называть* ε*-энтропией игры* Γ *относительно игры* Γ_**.*

3. Верхняя оценка энтропии гермейеровского расширения

Получим оценки величин $H_\varepsilon(\Gamma), C_\varepsilon(\Gamma)$ и $H_\varepsilon(\Gamma, \Gamma_*)$ для гермейеровского расширения.

Будем считать, что U и V – компактные метрические пространства с метриками r_U и r_V соответственно, а функции g и h непрерывны. Определим метрику r на произведении $U \times V$ условием $r((u,v),(u',v')) = \max\{r_U(u,u'), r_(v,v')\}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем δ так, что $\omega(g,\delta) < \varepsilon$ и $\omega(h,\delta) < \varepsilon$ (здесь $\omega(g,\delta)$ и $\omega(h,\delta)$ – модули непрерывности функций g и h соответственно).

В множестве U выберем δ-сеть S_δ с минимальным числом элементов и обозначим их количество через n_δ. Пусть A – множество изолированных точек пространства V, а B – его дополнение. Множество A конечно. Обозначим его мощность буквой k. А множество B компактно. Выберем в нем δ-сеть T_δ с минимальным количеством элементов и обозначим это количество через l_δ.

Пусть $\Psi(B,U)$ – семейство всех точечно-множественных отображений ψ из B в U, удовлетворяющих условию: для любого $b \in B$ выполнено неравенство $\psi(b) \neq \emptyset$. Рассмотрим семейство Y множеств из $\mathbb{R}^2$ вида

$$G^*(\varphi,\psi) = \{(g(\varphi(v),v), h(\varphi(v),v)) : v \in A\} \bigcup \{(g(w,v), h(w,v)) : w \in \psi(v), v \in B\},$$

где $\varphi \in \Phi(A,U)$, $\psi \in \Psi(B,U)$.

Очевидно, что семейство $X = \{G(u_2) : u_2 \in U_2\}$ множеств

$$G_2(u_2) = \{(g_2(u_2,v_2), h_2(u_2,v_2)) : v_2 \in V_2\} = \{(g(u_2(v),v), h(u_2(v),v)) : v \in V\}$$

содержится в семействе Y.

Теорема 1. Семейство X *всюду плотно в* Y *(в псевдометрике Хаусдорфа.)*

Доказательство теоремы содержится в Приложении.

Теперь уже нетрудно получить оценку сложности игры Γ_2.

Для каждой функции $\varphi^0 \in \Phi(A, S_\delta)$ (их количество равно n_δ^k) и каждого отображения $\psi^0 \in \Psi(T_\delta, S_\delta)$ (всего их $(2^{n_\delta} - 1)^{l_\delta} < 2^{n_\delta l_\delta}$) определим множество

$$G^0(\varphi^0,\psi^0) = \{(g(\varphi^0(v),v), h(\varphi^0(v),v)) : v \in A\} \bigcup \{(g(w,v), h(w,v)) : w \in \psi^0(v), v \in T_\delta\}.$$

Семейство Z всех таких множеств содержит менее $n_\delta^k \cdot 2^{n_\delta l_\delta}$ элементов.

Пусть ψ – любое точечно-множественное отображение из $\Psi(B,U)$, удовлетворяющее условию: $\psi(v) = \psi^0(v)$ для любого $v \in T_\delta$, Тогда, очевидно, $G^0(\varphi^0,\psi^0) \subset G^*(\varphi^0,\psi)$ и потому $\sup\limits_{x \in Z} \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\| = 0$.

Обратно, пусть $\psi \in \Psi(B,U)$. Положим $\psi^1(v) = \{u \in S_\delta : \exists w \in \psi(v) : r_U(u,w) < \delta\}$ и $\psi^2(v) = \{u \in S_\delta : \exists v' \in V : r_V(v,v') < \delta, u \in \psi^1(v')\}$.

Ограничение ψ^2 на T_δ обозначим через ψ^0. Тогда для любого $v \in V$ и любого $w \in \psi(v)$ найдутся $v^0 \in T_\delta$ и $w^0 \in \psi^0(v^0)$ такие, что $r_V(v, v^0) < \delta$ и $r_U(w, w^0) < \delta$. Отсюда в силу выбора δ заключаем, что $\sup\limits_{y \in y} \inf\limits_{x \in Z} \|x - y\| < \varepsilon$.

Итак, конечное семейство Z образует ε-сеть в Y, а значит, и в X. В силу теоремы 1 отсюда следует, что минимальная мощность ε-сети в X не превосходит $n_\delta^k \cdot 2^{n_\delta l_\delta}$, т. е. $H_\varepsilon(\Gamma_2, \Gamma_2) \leqslant n_\delta^k \cdot 2^{n_\delta l_\delta}$.

Если пространство U имеет размерность q, а пространство V p-мерно, то при $\delta \to 0$ величина n растет, как $\frac{\text{const}}{\delta^q}$, а величина l – как $\frac{\text{const}}{\varepsilon^p}$. Если, кроме того, функции g и h липшицевы с константой λ, то можно выбрать $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ и энтропия $\log_2 H(\Gamma_2, \Gamma_2)$ будет расти не быстрее чем $\frac{\text{const}}{\varepsilon^{p+q}}$ при $\varepsilon \to 0$.

4. Примеры

Несколько иная оценка величин $H_\varepsilon(\Gamma), C_\varepsilon(\Gamma)$ и $H_\varepsilon(\Gamma, \Gamma_*)$ была получена ранее в [3]. Приведем примеры, демонстрирующие «качество» тех и других оценок.

Пример 1. Пусть игра $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$ определяется условиями $U = V = [0, 1]$, $g(u, v) = \varphi(u + v)$, $h(u, v) = \psi(u + v)$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – периодические функции с периодом 1, а Γ_2 – ее гермейеровское расширение. Выберем любое непустое подмножество Z множества Ξ, определенного формулой (1), и обозначим

$$W = \{w \in [0, 1] : (\varphi(w), \psi(w)) \in Z\}.$$

Множество W тоже непусто. Фиксируем любой элемент $w^0 \in W$ и определим стратегию $u_2 : [0, 1] \to [0, 1]$ первого игрока в игре Γ_2 условием

$$u_2(v) = \begin{cases} 0, \text{если } v \in W, \\ w^0 - v \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $G(u_2) = Z$.

Таким образом, для данной игры Γ_2 семейство $\{G(u_2) : u_2 \in U_2\}$ совпадает с семейством всех подмножеств множества Ξ.

Отсюда следует, например, что если функции φ и ψ определяют параметризацию кривой Пеано, то для такой игры Γ_2 оценки, полученные в [3], оказываются точными.

Пусть функции φ и ψ устроены не так сложно, а именно, удовлетворяют условию Липшица с константой λ . Тогда всякое семейство, образующее $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ -сеть в семействе всех подмножеств отрезка [0,1], отображением (φ, ψ) преобразуется в ε-сеть в семействе всех подмножеств множества Ξ. Отсюда получаем оценку $H_\varepsilon(\Gamma_2, \Gamma_2) \leqslant 2^{\frac{\lambda}{\varepsilon}}$.

Определим вспомогательную функцию κ . Для $v \in [0, 1]$ положим $\kappa(v) = \left|v - \frac{1}{2}\right|$, а на остальные точки прямой $\mathbb{R}$ продолжим ее с помощью условия периодичности с периодом 1. Пусть $\varphi(v) = \lambda\kappa(a + v)$, $\psi(v) = \lambda\kappa(b + v)$, где a и b – произвольные числа. С помощью конструкции, аналогичной использованной выше, для любого множества $Z \subset \left[0, \frac{\lambda}{2}\right]$ строится стратегия $u_2 \in U_2$, для которой $G(u_2) = Z$. Поэтому в данном случае $H_\varepsilon(\Gamma_2, \Gamma_2) = 2^{\frac{\lambda}{2\varepsilon}}$, т. е. оценка, полученная в предыдущем абзаце, не слишком завышена.

Пример 2. Пусть множества управлений $U = V = [0, 1] \times [0, 1]$ представляют собой квадраты (далее $u = (u^1, u^2)$, $v = (v^1, v^2)$), а функции выигрыша определяются условиями $g(u,v) = \kappa(u^1 + v^1)$, $h(u,v) = \kappa(u^2 + v^2)$, где κ – та же функция, что и в предыдущем примере. Рассмотрим информационное расширение Γ_2 определенной таким образом игры $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$. С помощью той же идеи, как и в примере 1, проверяется, что для любого непустого множества $Z = [0,1] \times [0,1]$ можно определить стратегию u_2 первого игрока, для которой $G(u_2) = Z$. Таким образом, вновь построена игра, для которой верхняя оценка из [3] оказывается точной, но на сей раз удалось обойтись без использования «диких» объектов, вроде кривой Пеано.

Пример 3. Пусть $U = V = [0,1]$, $g(u,v) = v$, $h(u,v) = u$, $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$. Вычислим энтропию соответствующего расширения Γ_2. Фиксируем произвольное натуральное число n, $\varepsilon > \frac{1}{2n}$, и $\delta = \varepsilon - \frac{1}{n}$. Рассмотрим любую стратегию $u_2 : [0,1] \to [0,1]$ из множества U_2 и следующим образом аппроксимируем ее стратегией u_2^0 специального вида. Внутри δ-окрестности точки $\frac{2k+1}{2n}$ (где $k = 0, \ldots, n-2$) на отрезке $[0,1]$ выберем $n-2$ различных точкек $v^{k,i}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$. Если на отрезке $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ найдется точка v, для которой $\left|u_2(v) - \frac{2i+1}{2n}\right| < \frac{1}{2n}$, то положим $u_2^0(v^{k,i}) = \frac{2i_k+1}{2n}$, где i_k – целое число, ближайшее к $\sup\limits_{v\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]} u_2(v)$. Во всех точках интервала $\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, отличных от выбранных точек $v^{k,i}$ положим $u_2^0(v) = \frac{2i_k+1}{2n}$. Определим значение $u_2^0(0) = \frac{2i_0+1}{2n}$. Это полностью зададает стратегию $u_2^0 : [0,1] \to [0,1]$ из множества U_2.

Непосредственно проверяется, что расстояние между стратегиями u_2 и u_2^0 меньше ε (для данной игры множество $G_2(u_2)$ представляет собой, по сути, график функции u_2, где по оси h откладываются значения независимой переменной, а по оси g – значения функции). Число аппроксимирующих функций специального вида, очевидно, равно $2^{n^2} - 1$. В силу произвольности стратегии u_2 шары радиуса ε с центрами в «специальных» стратегиях покрывают множество U_2. Поэтому неравенства $H_\varepsilon(\Gamma_2) < 2^{n^2}$ и $H_\varepsilon(\Gamma_2, \Gamma_2) < 2^{n^2}$ выполняются при любом $\varepsilon > \frac{1}{2n}$.

С другой стороны, если δ достаточно мало, расстояние между любыми различными стратегиями из построенной сети равно $\frac{1}{n}$. Поэтому при любом $\varepsilon > \frac{1}{2n}$ всякая ε-сеть должна содержать по меньшей мере $2^{n^2} - 1$ элементов, так как никакая стратегия не может аппроксимировать две различных «специальных» стратегии с точностью ε.

Таким образом, для рассматриваемой игры оценки, полученные в разделе 3 и в [3], являются асимптотически точными.

5. Универсальное расширение

Конструкции предыдущего раздела приводят к следующему более общему результату.

Допустим, что (U, r_U) и (V, r_V) – компактные метрические пространства, V не содержит изолированных точек, а g и h – непрерывные функции. Пусть $\langle \Gamma_*, \pi_*, c_*, d_*\rangle$ – произвольное квазиинформационное расширение игры $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$, а $\langle \Gamma_2, \pi_2, c_2, d_2\rangle$ – ее гермейеровское расширение (здесь $\Gamma_2 = \langle U_2, V_2, g_2, h_2\rangle$, $\Gamma_* = \langle U_*, V_*, g_*, h_*\rangle$).

Обозначим

$$G_*(u_*) = \{(g_*(u_*, v_*), h_*(u_*, v_*)) : v_* \in V*\}, G_2(u_2) = \{(g_2(u_2, v_2), h_2(u_2, v_2)) : v_2 \in V_2\}.$$

Теорема 2. Семейство $\{G(u_2) : u_2 \in U_2\}$ *всюду плотно в* $\{G(u_*) : u_* \in U_*\}$, *т. е.* $\sup\limits_{u_*\in U_*} \inf\limits_{u_2\in U_2} \chi(G_*(u_*), G_2(u_2)) = 0$.

Доказательство теоремы см. в Приложении.

Следствие 1. В условиях теоремы справедливы неравенства $C_\varepsilon(\Gamma_*) \leqslant C_\varepsilon(\Gamma_2)$, $H_\varepsilon(\Gamma_*) \leqslant H_\varepsilon(\Gamma_2)$, $H_\varepsilon(\Gamma_*, \Gamma_*) \leqslant H_\varepsilon(\Gamma_2, \Gamma_2)$.

Замечание 1. Полученный результат выглядит немного парадоксально. В самом деле, среди информационных расширений игры Γ имеются формально гораздо более сложные, чем расширение Γ_2, например гермейеровское расширение Γ_3. И вдруг оказывается, что любое из них сколь угодно точно аппроксимируется неким «подрасширением» расширения Γ_2. Этот парадокс имеет следующее объяснение. При сделанных предположениях об игре Γ уже в соответствующей игре Γ_2 «передается бесконечный объем информации». Поэтому утверждение теоремы 2 не более парадоксально, чем утверждение о том, что множество точек прямой равномощно множеству точек плоскости.

Замечание 2. При доказательстве теоремы активно использовалось предположение о том, что информация о выбранном вторым игроком управлении v в игре Γ_2 передается без искажений и абсолютно точно. Наличие такого рода «решений» в задаче анализа конкретной иерархической системы, пожалуй, следует рассматривать как дефект построенной модели. В задаче синтеза системы управления это не совсем так. Можно считать, что вместе с системой управления создается и соответствующий канал связи. А возможность создать канал связи, способный передавать любой наперед заданный объем информации, выглядит вполне реалистично. Другое дело, что в модели, возможно, следует учитывать затраты на создание такого канала.

Используя действительные числа при моделировании физических процессов, неявно предполагают, что любая физическая величина может быть измерена с произвольной наперед заданной точностью. В данном случае ситуация аналогична.

Замечание 3. Утверждение о существовании «универсального» расширения верно и без предположения об отсутствии в пространстве V изолированных точек, только это расширение выглядит чуточку сложнее. В самом деле, пусть игра Γ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, кроме условия отсутствия изолированных точек. Рассмотрим игру $\Gamma_\# = \langle U_\#, V_\#, g_\#, h_\# \rangle$, где $U_\# = U$, $\quad V_\# = V \times [0,1]$, $g_\#(u,v,w) = g(u,v)$, $h_\#(u,v,w) = h(u,v)$. Определим отображения $c_\# : U \to U_\#$, $d_\# : V \to V_\#$, $\pi_\# : U_\# \times V_\# \to U \times V$ условиями: $\pi_\#(u,(v,w)) = (u,v)$, $c(u) = u$, $d(v) = (v,0)$. Тогда $\langle \Gamma_\#, \pi_\#, c_\#, d_\# \rangle$ – квазиинформационное расширение игры Γ. С другой стороны, $\Gamma_\#$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, и к ней можно применить проведенные выше рассуждения. Стандартное гермейеровское расширение игры $\Gamma_\#$ и будет искомым.

Эти рассуждения могут вызвать неформальное возражение в случае, когда исходная игра Γ конечна. В самом деле, тогда в игре Γ_2 передается лишь конечный объем информации. А для игры $\Gamma_\#$ это уже совсем не так. Но в этом случае рассуждения предыдущего абзаца можно модифицировать, заменив отрезок [0,1] в определении игры $\Gamma_\#$ конечным множеством, равномощным множеству U. С минимальными изменениями доказательство теоремы 2 пройдет и в этом случае.

Замечание 4. По-видимому, теорему 2 можно существенно обобщить. Действительно, при ее доказательстве не использовалась компактность множество U и V, а использовалась лишь их полная ограниченность и равномерная непрерывность функций g и h. Пусть Γ – произвольная игра с ограниченными функциями выигрыша.

Если ввести на U и V внутренние псевдометрики, то получится то, что нужно, возможно, с использованием приема, описанного в предыдущем замечании.

Замечание 5. Из приведенных выше рассуждений нетрудно получить классический вывод о том, что максимальный гарантированный результат первого игрока в стандартном информационном расширении Γ_2 игры Γ не меньше, чем его максимальный гарантированный результат в любом другом квазиинформационном расширении Γ_* той же игры Γ.

Замечание 6. Более сложное гермейеровское расширение Γ_3, вообще говоря, не обладает свойством универсальности. В качестве примера можно выбрать любую игру , для которой максимальный гарантированный результат центра в соответствующем расширении Γ_3 строго меньше, чем в Γ_2 (годится, например, любая антагонистическая игра без седловой точки). Тогда семейство $\{G_3(u_3) : u_3 \in U_3\}$ не будет плотно в семействе $\{G_2(u_2) : u_2 \in U_2\}$, так как, например, не будет приближать оптимальную стратегию в игре Γ_2.

6. Пополнение пространства стратегий

Качественная особенность обмена информацией в «континуальных» играх, использованная при доказательстве теоремы 2, неоднократно появлялась и выше. В этой связи целесообразно изучить одну конструкцию, которая впервые появилась в работе Н. С. Кукушкина [5].

Обозначим через $M^0(X)$ семейство всех непустых подмножеств множества X. Рассмотрим игру $\Gamma = \langle U, V, g, h\rangle$. Фиксируем произвольную функцию $\iota \in \Phi(M^0(U), U)$, удовлетворяющую условию: $\iota(W) \in W$ для любого непустого множества $W \subset U$. Определим квазиинформационное расширение $\langle \Gamma_K, \pi_K, c_K, d_K\rangle$ игры Γ следующим образом.

Положим $U_K = \Phi(V, M^0(U))$, $V_K = \Phi(M^0(U), U) \times U$. Отображение π_K из $U_K \times V_K$ в $U \times V$ зададим равенством $\pi_K(u_K, v_K) = (\varphi(u_K(v)), v)$, где $v_K = (\varphi, v)$. Отображения $c_K : U \to U_K$ и $d_K : V \to V_K$ определим условиями $c_K(u) = \{u\}$ и $d_K(v) = (\iota, v)$. Задав функции $g_K : U_K \times V_K \to \mathbb{R}$ и $h_K : U_K \times V_K \to \mathbb{R}$ условиями $g_K(u_K, v_K) = g(\pi_K(u_K, v_K))$, $h_K(u_K, v_K) = h(\pi_K(u_K, v_K))$ получим игру $\Gamma_K = \langle U_K, V_K, g_K, h_K\rangle$. Непосредственно проверяется, что таким образом действительно определено квазиинформационное расширение. За отсутствием устоявшегося термина будем называть его расширением Кукушкина.

Замечание 7. Формально построенное расширение зависит от выбранной функции ι. Однако дальнейшие рассуждения и выводы от нее не зависят, поэтому внимание на ней и не акцентируется. В частности, это нашло отражение в использованных в предыдущем абзаце обозначениях.

Теорема 3. Пусть в игре Γ множества управлений компактны относительно внешних топологий, а функции выигрыша непрерывны. Тогда в ее квазиинформационном расширении Γ_K пространство U_K стратегий первого игрока компактно относительно естественной псевдометрики ϱ_K.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Следствие 2. Пространство U_K полно относительно псевдометрики ϱ_K.

Наряду с расширением Кукушкина $\langle \Gamma_K, \pi_K, c_K, d_K\rangle$ рассмотрим расширение Гермейера $\langle \Gamma_2, \pi_2, c_2, d_2. \rangle$ Игра Γ_K является квазиинформационным расширением не только игры Γ, но и ее расширения Γ_2. Соответствующие отображения $c_{2K} : U_2 \to U_K$, $d_{2K} : V_2 \to V_K$ и $\pi_{2K} : U_K \times V_K \to U_2 \times V_2$ определяются следующими условиями. Образом пары $(u_K, (\varphi_K, v)) \in U_K \times V_K = \Phi(V, M^0(U)) \times \Phi(M^0(U), U) \times U$ при отображении π_{2K} является пара $(u_2, v) \in U_2 \times V_2 = \Phi(V, U) \times V$, где функция $u_2 : V \to U$ задается равенством $u_2 = \varphi \circ u_K$. Отображение c_{2K} ставит в соответствие функции $u_2 \in \Phi(V, U)$ точечно-множественное отображение $u_K \in \Phi(V, M^0(U))$, определенное условием $u_K(v) = \{u_2(v)\}$ для любого $v \in V$. Наконец, отображение d_{2K} ставит в соответствие элементу $v \in V_2 = V$ пару (ι, v), где – ι та же функция, что и в определении расширения $\langle \Gamma_K, \pi_K, c_K, d_K \rangle$.

Построенное расширение $\langle \Gamma_K, \pi_{2K}, c_{2K}, d_{2K} \rangle$ является естественным, в том смысле, что выполняются равенства $\pi_K = \pi_2 \circ \pi_{2K}$, $c_K = c_{2K} \circ c_2$, $d_K = d_{2K} \circ d_2$.

Согласно теореме 2, если пространство V не содержит изолированных точек, множество $c_{2K}(U_2)$ всюду плотно в U_K, т. е. можно говорить о том, что U_K является пополнением U_2.

В общем случае множество U_K может оказаться шире, чем нужно, но при выполнении условий теоремы 3 замыкание множества $c_{2K}(U_2)$ в U_K можно рассматривать, как пополнение U_2.

Замечание 8. Поскольку приходится иметь дело не с метрическими, а только с псевдометрическими пространствами, говорить о том, что пополнение единственно, не приходится. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к идеям, изложенным в замечании 3.

Замечание 9. Пополнение множества U_2, разумеется, можно строить стандартным образом, следуя Г. Кантору. Использованные выше конструкции хороши тем, что имеют ясную содержательную интерпретацию.

7. Заключение

Совместное использование результатов разделов 4 и 5 поволяет получать нетривиальные верхние оценки сложности любых квазиинформационных расширений. Правда, как и в случае с расширением Γ_3, эти оценки могут оказаться завышенными.

Получение точных, или асимптотически точных, оценок энтропии метрических пространств обычно бывает достаточно трудной задачей. Выше показано, что метрическое пространство, соответствующее любому информационному расширению данной игры, можно рассматривать как подпространство расширения Кукушкина той же игры. Таким образом, достаточно изучить геометрию этого последнего. Более того, это дает надежду на то, что таким образом удастся получить достаточно хорошие оценки энтропии если не для любых информационных расширений, то, по крайней мере, для в каком-то смысле оптимальных.

При анализе иерархических игр в качестве оптимальных решений неоднократно появлялись всюду разрывные функции и подобные патологические объекты (см., например, [6].) Содержательная причина этого заключается в том, что игроку нижнего уровня выгодно «кодировать» некоторую информацию о своем поведении в выборе своего управления. Идея, изложенная в последнем разделе статьи, позволяет сформулировать задачу так, что подобных патологий возникать не будет.

Более того, эта идея возвращает нас к одному из основных тезисов информационной теории иерархических систем (см., например, [8]), согласно которому иерархия возникает тогда и постольку, когда и поскольку становится невозможной своевременная обработка всей имеющейся информации. Для повышения качества такой обработки иногда выгодно поступиться правом выбора каких-то параметров. Это и моделируется переходом от расширения Гермейера к расширению Кукушкина.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Возьмем любое множество $G^*(\varphi, \psi)$ из Y и произвольное $\varepsilon > 0$. Определим функцию $u_2 : V \to U$ следующим образом. Для $v \in A$ положим $u_2(v) = \varphi(v)$. Выберем Δ так, что $\omega(g, \Delta) < \varepsilon$ и $\omega(h, \Delta) < \varepsilon$, и для $\delta < \Delta$ фиксируем конечную δ-сеть T_δ в множестве B и конечную δ-сеть S_δ в множестве U. Для произвольного элемента v сети T_δ рассмотрим множество

$$Z(v) = \{u \in S_\delta : \exists v' \in V \quad \exists w \in \psi(v') : r_U(u, w) < \delta, r_V(v, v') < \delta\}.$$

Множество $Z(v)$ непусто и конечно. Точка v не является изолированной, поэтому в ее $(\Delta - \delta)$-окрестности можно для каждого $u \in Z(v)$ выбрать элемент $\zeta(u)$ так, что $\zeta(u) \neq \zeta(u')$, если $u \neq u'$. Для выбранных таким образом элементов v определим значение $u_2(v)$ условием: $u_2(v) = u$ тогда и только тогда, когда $\zeta(u) = v$. Для остальных $v \in B$ определим значение $u_2(v)$ произвольным образом, лишь бы выполнялось включение $u_2(v) \in \psi(v)$.

По построению для любого $v \in B$ найдется элемент $w \in \psi(v)$, для которого $r_U(u_2(v), w) < \Delta$. Поэтому в силу выбора Δ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in G_2(u_2)} \inf_{y \in G^*(\varphi,\psi)} \|x - y\| < \varepsilon.$$

Обратно, для каждого $v \in B$ и каждого $w \in \psi(v)$ найдется v' такой, что $r_V(v, v') < \Delta$ и $r_U(u_2(v'), w) < \Delta$, и опять из неравенств $\omega(g, \Delta) < \varepsilon$ и $\omega(h, \Delta) < \varepsilon$ следует, что $\sup\limits_{x \in G^*(\varphi,\psi)} \inf\limits_{y \in G_2(u_2)} \|x - y\| < \varepsilon$, т. е. $\chi(G^*(\varphi, \psi), G_2(u_2)) < \varepsilon$.

Поскольку ε выбиралось произвольно, теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и любую стратегию $u_* \in U_*$.

Определим функцию $u_2^0 : V \to U$ условием $u_2^0(v) = \mathrm{pr}_1(\pi_*(u_*, d_*(v)))$. Функцию u_2^0 можно рассматривать как стратегию в игре Γ_2. Очевидно, $G_2(u_2^0) \subset G_*(u_*)$.

Выберем $\delta > 0$ так, что $\omega(g, \delta) < \varepsilon$ и $\omega(h, \delta) < \varepsilon$, и фиксируем конечную $\frac{\delta}{2}$ -сеть $S_\delta = \{u^i : i = 1, \ldots, n_\delta\}$ в U и конечную $\frac{\delta}{2}$ -сеть $T_\delta^0 = \{v^j : j = 1, \ldots, l_\delta\}$ в V, где n_δ – число элементов множества S_δ, а l_δ – число элементов множества T_δ. У каждого элемента $v^j \in T_\delta^0$ $(j = 1, \ldots, l_\delta)$ выберем настолько малую открытую окрестность, чтобы, во-первых, ее размер не превосходил $\frac{\delta}{2}$ и, во-вторых, выбранные окрестности попарно не пересекались. В выбранной окрестности точки v^j фиксируем l_δ различных элементов $v^{j,i}$ $(j = 1, \ldots, l_\delta, i = 1, \ldots, n_\delta)$. Полученное таким образом множество $T_\delta = \{v^{j,i} : j = 1, \ldots, l_\delta, i = 1, \ldots, n_\delta\}$ образует δ-сеть в пространстве V. Определим функцию $u_2 : V \to U$ следующим образом. Если $v \in V \setminus T_\delta$, положим $u_2(v) = u_2^0(v)$. Остается определить функцию u_2 в точках множества T_δ. Если

$v^{j,i} \in T_\delta$ и найдется стратегия $v_* \in V_*$ такая, что $\pi_*(u_*, v_*) = (u, v)$, $r_U(u, u^i) \leqslant \frac{\delta}{2}$ и $r_V(v, v^j) \leqslant \frac{\delta}{2}$, то возьмем $u_2(v^{j,i}) = u^i$. В противном случае зададим значение $u_2(v^{ji})$ условием $u_2(v^{ji}) = u_2^0(v^{ji})$. Таким образом, функция u_2 определена во всех точках множества V. Ее можно рассматривать, как стратегию в игре Γ_2.

Докажем, что $\chi(G_*(u_*), G_2(u_2)) \leqslant \varepsilon$.

Пусть $v_* \in V_*$ – любая стратегия и $\pi_*(u_*, v_*) = (u, v)$. Тогда найдутся $u^i \in S_\delta$ и $v^j \in T_\delta^0$ такие, что $r_U(u, u^i) \leqslant \frac{\delta}{2}$ и $r_V(v, v^j) \leqslant \frac{\delta}{2}$, а значит $u_2(v^{j,i}) = u^i$, т. е. $\pi_2(u_2, v^{j,i}) = (u^i, v^{j,i})$. Таким образом,

$$g_*(u_*, v_*) = g(\pi_*(u_*, v_*)) = g(u, v),$$

$$g_2(u_2, v^{j,i}) = g(\pi_2(u_2, v^{j,i})) = g(u^i, v^{j,i}).$$

Но $r_U(u, u^i) < \delta$ и $r_V(v, v^{j,i}) < \delta$, поэтому $|g(u, v) - g(u^i, v^{j,i})| < \varepsilon$ и, следовательно, $|g_*(u_*, v_*) - g_2(u_2, v^{j,i})| < \varepsilon$.

Аналогично, $|h_*(u_*, v_*) - h_2(u_2, v^{j,i})| < \varepsilon$.

Итак, для любой точки $x = (g_*(u_*, v_*), h_*(u_*, v_*))$ множества $G_*(u_*)$ найдена точка $y = (g_2(u_2, v^{j,i}), h_2(u_2, v^{j,i}))$ множества $G_2(u_2)$, для которой $\|x - y\| < \varepsilon$, т. е. $\sup\limits_{x \in G_*(u_*)} \inf\limits_{y \in G_2(u_2)} \|x - y\| < \varepsilon$.

Обратно, пусть $v_2 \in V_2 = V$ – произвольная точка. Если $u_2(v_2) = u_2^0(v_2)$, то $(g_2(u_2, v_2), h(u_2, v_2)) = (g_2(u_2^0, v_2), h(u_2^0, v_2)) \in G_2(u_2^0) \subset G_*(u_*)$, и расстояние от точки $(g_2(u_2, v_2), h(u_2, v_2))$ до множества $G_*(u_*)$ попросту равно нулю. Если же $u_2(v_2) \neq u_2^0(u_2)$, то заведомо $v_2 \in T_\delta$, т. е. $v_2 = v^{j,i}$ для некоторых i и j, и по построению функции u_2 найдется $v_* \in V_*$, для которого $\pi_*(u_*, v_*) = (u, v)$, $r_U(u, u^i) \leqslant \frac{\delta}{2}$ и $r_V(v, v^j) \leqslant \frac{\delta}{2}$. А значит, $r_U(u, u_2(v_2)) < \delta$ и $r_V(v, v_2) < \delta$. Так как функции g и h равномерно непрерывны, получим $|g_*(u_*, v_*) - g_2(u_2, v_2)| < \varepsilon$ и $|h_*(u_*, v_*) - h_2(u_2, v_2)| < \varepsilon$ и в силу произвольности v_2 будем иметь $\sup\limits_{y \in G_2(u_2)} \inf\limits_{x \in G_*(u_*)} \|x - y\| < \varepsilon$.

Подводя итоги, видим, что для построенной нами стратегии u_2 выполняется неравенство $\chi(G_*(u_*), G_2(u_2))$. А поскольку u_* и ε выбирались любыми, теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, заметим, что для любой стратегии $u_K \in U_K$ найдется стратегия $w_K \in U_K$, для которой $G_K(w_K) = \overline{G_K(u_K)}$ (здесь $G_K(u_K) = \{(g_K(u_K, v_K), h_K(u_K, v_K)) : v_K \in V_K\}$, а черта сверху, как обычно, обозначает замыкание множества относительно топологии в $\mathbb{R}^2$). Действительно, при сделанных предположениях определенное формулой (1) множество Ξ компактно, следовательно, справедливо вложение $\overline{G_K(u_K)} \subset \Xi$, т. е. для любой пары $(x, y) \in \Xi$ найдутся такие $u \in U$ и $v \in V$, что $g(u, v) = x$, $h(u, v) = y$. Поэтому для точечно-множественного отображения w_K, определенного условием

$$w_K(v) = \left\{ u \in U : \ (g(u, v), h(u, v)) \in \overline{G_K(u_K)} \right\},$$

справедливо равенство $\{(g(u, v), h(u, v)) : \ u \in w_K(v), \ v \in V\} = \overline{G_K(u_K)}$.

Кроме того, очевидно $G_K(u_K) \subset \{(g(u, v), h(u, v)) : u \in w_K(v), v \in V\}$. Поэтому $w_K \in U_K$ и $G_K(w_K) = \{(g(u, v), h(u, v)) : \ u \in w_K(v), \ v \in V\} = \overline{G_K(u_K)}$, т. е. стратегия w_K – искомая.

Для стратегии w_K имеем $\chi(G_K(w_K), G_K(u_K)) = \chi(\overline{G_K(u_K)}, G_K(u_K)) = 0$, следовательно, множество U^c_K тех стратегий $u_K \in U_K$, для которых $G_K(u_K)$ замкнуто, всюду плотно в U_K. Поэтому достаточно доказать компактность множества U^c_K .

Ограничение ϱ_K на U^c_K является не только псевдометрикой, но и метрикой, и множество U^c_K с этой метрикой изометрично семейству $\{G_K(w_K) : w_K \in U^c_K\}$ с метрикой Хаусдорфа. Последнее семейство содержится в семействе всех замкнутых подмножеств компактного множества Ξ . В силу теоремы выбора В. Бляшке [7] семейство замкнутых подмножеств компактного множества компактно в метрике Хаусдорфа. Поэтому достаточно доказать замкнутость множества $\{G_K(w_K) : w_K \in U^c_K\}$.

Пусть $H \subset \mathbb{R}^2$ – предельная точка множества $\{G_K(w_K) : w_K \in U^c_K\}$ и $w^1_K, w^2_K, ...$ – такая последовательность элементов множества U^c_K , что $\lim\limits_{n\to\infty} \chi(G_K(w^n_K), H) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что H замкнуто. Достаточно доказать, что найдется стратегия $u_K \in U^c_K$, для которой $G_K(u_K) = H$.

Построим такую стратегию. Положим $u_K(v) = \{u \in U : (g(u, v), h(u, v)) \in H\}$. Множество Ξ замкнуто, поэтому $H \subset \Xi$, а значит,

$$H = \{(g(u, v), h(u, v)) : u \in u_K(v), v \in V\}.$$

Остается показать, что $u_K \in U_K$, т. е. $u_K(v) \neq \emptyset$ для любого $v \in V$.

Фиксируем $v \in V$ и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ выберем такой элемент $u^n \in U$, что $u^n \in w^n_K(v)$. Так как множество U компактно, можно, не ограничивая общности, считать, что последовательность u^n сходится к элементу u^0. А тогда из сходимости последовательности $G_K(w^1_K), G_K(w^2_K), ...$ к H и замкнутости множества H следует, что $(g(u^0, v), h(u^0, v)) \in H$, т. е. $u^0 \in u_K$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

2. *Бурков В.Н.* Основы теории активных систем. М.: Наука, 1977.

3. *Горелов М.А.* Энтропия иерархических игр // АиТ. 2008. № 12 . С. 139–148.

4. *Кукушкин Н.С., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.

5. *Кукушкин Н.С.* Об одной игре с неполной информацией // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. 1973. Т. 13. № 1. С. 210—214.

6. *Горелов М.А.* Линейный способ агрегирования информации в иерархических играх // АиТ. 2004. №11. С. 131—140.

7. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. Москва–Ижевск: Инс-т компьют. исслед., 2004.

8. *Гермейер Ю.Б., Моисеев Н.Н.* О некоторых задачах теории иерархических систем. // Пробл. прикл. мат. и механики. М.: Наука, 1971. С. 30 – 43.