# Равновесие в играх с конечным объемом передаваемой информации

Горелов М.А., Грибов А.Г.

Найдена структура равновесных решений в игре двух лиц с ограниченным объемом передаваемой информации. Получены достаточные условия близости множеств равновесных решений в играх с конечным объемом передаваемой информации и в классической игре без подобного ограничения. Построен пример, показывающий, что такая близость имеет место не всегда.

## *1. Введение*

Предыстория поднимаемого в данной статье вопроса такова. Информационные обмены представляют собой одну из наиболее существенных сторон процесса принятия решений в условиях конфликта и неопределенности, поэтому их описание появилось уже в первых работах по теории игр [1, 2]. В этих работах рассматривались, по существу, игры в позиционной форме. Соответственно, множества управлений игроков были сугубо конечными, и объемы передаваемой информации тоже были конечны.

На основе позиционных игр были построены игры в нормальной форме, и для них были определены смешанные расширения [2, 3]. Множества смешанных стратегий уже континуальны, но обмена информацией об этих стратегиях уже не предполагалось.

В дальнейшем задача была обобщена, и начали исследовать игры в нормальной форме с произвольно большими множествами стратегий, преимущественно континуальными, как в выпуклых играх. Но довольно долго информационные обмены в таких моделях не учитывались.

И лишь существенно позднее были предприняты попытки описать обмены информацией с помощью игр в нормальной форме [4, 5, 6]. После этого исследования моделей подобного рода приняли массовый характер (см., например, [7, 8, 9, 10, 11, 12]). Но во всех этих работах неявно предполагалось, что может быть передан любой объем информации, в том числе и бесконечный (ведь уже для того, чтобы локализовать точку на отрезке, нужно знать счетное число цифр в записи действительного числа).

Понятно, что в таком случае приходится иметь дело с математической идеализацией, правомерность которой должна быть обоснована. Обычно бесконечность появляется как удобная замена большого конечного числа. И чтобы указанная идеализация была оправданной, нужно чтобы решения, найденные на модели с большим конечным объемом информации и на модели с бесконечным объемом информации были близкими. В данной статье на одном примере выясняется, действительно ли это всегда так.

Второй вопрос, тесно связанный с предыдущим, заключается в следующем: а можно ли считать объемы информации, передаваемые в реальных процессах большими? Чтобы ответить на него, нужно уточнить, что в данном случае понимается под словом «большой». Допустим, имеется две модели одного процесса, в одной из которых предполагается передача гигабайта информации, а в другой – терабайта. Если оптимальные решения, найденные с помощью этих моделей будут существенно различаться, то, по крайней мере, гигабайт информации в данной ситуации следует признать «малым» объемом. И если в реальности оперирующая сторона не в силах в реальное время получить и обработать больше гигабайта информации, то это обстоятельство следует явно учесть в модели.

Разумеется, вопрос о том, является ли ограничение на объем передаваемой информации существенным, должен решаться каждый раз отдельно. Но есть некоторые факты, которые свидетельствуют о том, что чаще всего ответ на него будет положительным. В самом деле, практика управления организационными системами показывает, что в соответствующих процессах передаются весьма значительные объемы информации, и они имею тенденцию к росту. Последнее из этих двух обстоятельств как раз и свидетельствует о том, что реальные объемы информации являются маленькими в указанном выше смысле. А первое приводит к пониманию того, что исследование соответствующих моделей вряд ли возможно без привлечения математических методов.

И коль скоро мы пришли к рассмотрению моделей с ограниченным объемом передаваемой информации, то естественно встает вопрос о содержании этой информации: раз уж мы не можем передать всю информацию, нужно передавать наиболее ценную. То есть встает вопрос о синтезе рациональных процедур обмена информацией.

Первые модели такого рода были исследованы в [13, 14]. В этих работах в качестве принципа оптимальности рассматривался принцип максимального гарантированного результата. Ниже в качестве оптимальных решений рассматриваются равновесия по Нэшу.

По аналогии с [14] строится модель принятия решений при ограниченном объеме передаваемой информации и находится структура оптимальных решений. Далее на основе этой структуры выясняется, при каких условиях решения в задаче с ограниченным объемом передаваемой информации и в задаче без такого ограничения совпадают.

## 2. Постановка задачи

Будем рассматривать игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где $U$ и $V$ – компактные подмножества конечномерных евклидовых пространств, а $g$ и $h$ – непрерывные функции из $U \times V$ множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств $U$ и $V$ интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций $g$ и $h$ соответственно.

Рассмотрим следующую схему взаимодействия игроков. Первый игрок вправе задать партнеру $n$ вопросов относительно выбранного им управления $v \in V$ и получить на них правдивые ответы. Каждый из этих вопросов должен допускать ответ «да» или «нет». Следуя традиции, будем кодировать ответ «да» единицей, а ответ «нет» – нулем. Окончательный выбор своего управления $u \in U$ первый игрок осуществляет после получения ответов на свои вопросы. Однако он заранее выбирает список вопросов и план своих действий при всех возможных вариантах ответов. Второй игрок выбирает свое управление, не рассчитывая на получение какой-либо информации о выборе партнера. Нас будут интересовать ситуации равновесия по Нэшу в такой игре.

Дадим точные определения. Каждой системе из $n$ вопросов рассматриваемого типа соответствует набор из $2n$ подмножеств

$$\left(X_1^0, X_1^1\right), \left(X_2^0, X_2^1\right), \ldots, \left(X_n^0, X_n^1\right) \tag{1}$$

пространства $V$, разбитый на пары. В множество $X_t^1$ входят те и только те управления $v \in V$ второго игрока, при выборе которых на вопрос с номером $t$ следует ответить «да». В множество $X_t^0$ входят те управления, которые соответствуют ответу «нет» на вопрос с номером $t$. Разумеется, должны выполняться условия

$$X_t^0 \cap X_t^1 = \varnothing,\ X_t^0 \cup X_t^1 = V,\ t = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Каждому булеву вектору $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ из множества $N = \{0,1\}^n$ можно поставить в соответствие множество $X^r = \bigcap_{t=1}^{n} X_t^{r_t}$. Получив ответы $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ на свои вопросы, первый игрок может и должен выбрать управление $u^r \in U$. Таким образом, стратегия первого игрока определяется заданием $2n$ множеств вида (1), удовлетворяющих условиям (2), и $m = 2^n$ управлений $u^r \in U$, $r \in N$. В дальнейшем иногда будет удобно отождествить вектор $(r_1, r_2, ..., r_n) \in N$ с натуральным числом $r_1 \cdot 2^{n-1} + r_2 \cdot 2^{n-2} + ... + r_n \cdot 2^0$ из множества $\{0,1,...,m-1\}$, для которого последовательность $r_1 r_2 ... r_n$ является записью в двоичной системе счисления. Такое отождествление не должно вызвать недоразумений и потому будет делаться без особых оговорок.

Если первый игрок зафиксировал свою стратегию такого вида, а второй игрок выберет управление $v \in V$, то игроки получат выигрыши $g(u^r, v)$ и $h(u^r, v)$ соответственно, где ответ $r$ однозначно определяется условием $v \in X^r$.

Удобно определить функцию $P: V \to N$ условием $P(v) = r$, если $v \in X^r$ и такую функцию $u_*: N \to U$, что $u_*(r) = u^r$. Тогда стратегию первого игрока можно отождествить с парой функций $(u_*, P)$, а выигрыши игроков будут определяться функционалами

$$g_*((u_*, P), v) = g(u_*(P(v)), v) \text{ и } h_*((u_*, P), v) = h(u_*(P(v)), v). \qquad (3)$$

Таким образом, получаем новую игру $\Gamma_*=\langle U_*, V_*, g_*, h_*\rangle$, в которой $U_*$ обозначает множество всех стратегий $(u_*, P)$ первого игрока описанной выше структуры, $V_*=V$, а функции I$g_*$ и $h_*$ определяются условиями (3).

Ситуацией равновесия в такой игре называется такая пара стратегий $(u_*, P)$ и $v$, что для любых стратегий $(w_*, Q) \in U_*$ и $w \in V$ выполняется система неравенств

$$g_*((w_*, Q), v) \le g_*((u_*, P), v) \text{ и } h_*((u_*, P), w) \le h_*((u_*, P), v).$$

В явном виде эта система может быть переписана следующим образом:

$$g(w_*(Q(v)), v) \le g(u_*(P(v)), v) \qquad (4)$$

и

$$h(u_*(P(w)), w) \le h(u_*(P(v)), v). \qquad (5)$$

## 3. Равновесные исходы

Данное определение равновесия не слишком конструктивно, поскольку множество $U_*$ стратегий первого игрока устроено весьма сложно. Если множество всех функций $u_*: N \to U$ устроено еще относительно просто (оно может быть естественным образом отождествлено с $m$-кратным декартовым произведением $U^m$ множества $U$ на себя), то множество функций $P: V \to N$ в нетривиальных случаях выглядит совсем сложно. В самом деле, если множество $V$ бесконечно, то при сделанном предположении о его компактности, оно имеет мощность континуума. А если вдобавок $n>0$, то тогда мощность множества функций $P: V \to N$ будет больше континуума, причем почти все функции из этого множества будут весьма сложными, например, всюду разрывными.

Поэтому встает задача более конструктивного описания множества ситуаций равновесия в рассматриваемой игре. Для этого целесообразно сначала немного сузить задачу.

Будем нарывать пару $(u, v) \in U \times V$ исходом в игре $\Gamma_*$. Исход $(u,v)$ , назовем равновесным, если существует такая стратегия $(u_*, P)$ первого игрока в игре $\Gamma_*$, что вместе со стратегией $v$ она образует ситуацию равновесия, и выполняется условие $u_*(P(v))=u$. Множество равновесных исходов допускает конструктивное описание. А именно, справедлива

**Теорема 1.** Для того, чтобы исход $(u^0,v^0)$ был равновесным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\max_{u \in U} g(u, v^0) = g(u^0, v^0), \qquad (6)$$

$$\min_{(u^1, u^2, ..., u^{m-1}) \in U^{m-1}} \max_{v \in V} \min_{0 \le i \le m-1} h(u^i, v) \le h(u^0, v^0). \qquad (7)$$

**Доказательство.** Начнем с необходимости. Пусть стратегии $(u_*, P)$ и $v^0$ образуют ситуацию равновесия, и выполняется условие $u_*(P(v^0))=u^0$. Докажем равенство (6).

Очевидно

$$\max_{u\in U} g(u, v^0) \ge g(u^0, v^0)\,.$$

Предположим, что

$$\max_{u\in U} g(u, v^0) > g(u^0, v^0)\,.$$

Тогда найдется такое $u\in U$, что $g(u,v^0)>g(u^0,v^0)$. Возьмем любое отображение $Q:V\to N$ и функцию $w_*:N\to U$, такую, что $w(r)\equiv u$. Тогда

$$g(w_*(Q(v)), v^0) = g(u, v^0) > g(u^0, v^0) = g(u_*(P(v^0)), v^0)\,,$$

что противоречит условию (4) из определения равновесия. Следовательно, сделанное предположение неверно и имеет место равенство (6).

Докажем равенство (7). Обозначим через $u^0,u^1,\ldots,u^{m-1}$ все значения функции $u_*$. В силу выбора стратегии $(u_*, P)$ для любого $v\in V$ найдется такое $u^i\in\{u^0,u^1,\ldots,u^{m-1}\}$, что выполняется неравенство $h(u^i,v)\le h(u^0,v^0)$ (в качестве такого $u^i$ можно взять $u_*(P(v))$). Последнее утверждение можно переформулировать так: для любого $v\in V$ найдется такое $i\in\{0,1,\ldots,m-1\}$, что выполняется неравенство $h(u^i,v)\le h(u^0,v^0)$.

Тогда, для любого $v\in V$ имеет место неравенство

$$\min_{0\le i\le m-1} h(u^i, v) \le h(u^0, v^0)\,.$$

Следовательно, справедливо условие

$$\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i, v) \le h(u^0, v^0)\,.$$

И тем более, выполняется неравенство

$$\min_{(u^1,u^2,\ldots,u^{m-1})\in U^{m-1}}\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i, v) \le h(u^0, v^0)\,.$$

Необходимость доказана. Докажем достаточность.

Определим стратегию $(u_*, P)$ следующим образом. Пусть стратегии $u^0,u^1,\ldots,u^{m-1}$ удовлетворяют условию

$$\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i, v) = \min_{(u^{1\prime},u^{2\prime},\ldots,u^{m-1\prime})\in U^{m-1}}\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^{i\prime}, v)\,.$$

Положим $P(v^0)=0$. Для любого другого $v\in V$ найдется такой индекс $i$, что выполняется неравенство $g(u^i,v)\le g(u^0,v)$. Будем считать, что значение $P(v)$ равно именно этому $i$. Этими условиями корректно, хотя и не однозначно, определена функция $P:V\to N$. Функцию $u_*:N\to U$ определим условием $u_*(i)=u^i$.

Покажем, что так определенная стратегия $(u_*, P)$ вместе со стратегией $v^0$ образует ситуацию равновесия.

Пусть $(w_*, Q)$ – любая стратегия первого игрока в игре $\Gamma_*$. Положим $u=w_*(Q(v^0))$. Тогда $g(w_*(Q(v^0)),v^0)=g(u,v^0)$. Но очевидно, что

$$g(u, v^0) \le \max_{u'\in U} g(u', v^0)\,.$$

А в силу равенства (6) получим тогда $g(w_*(Q(v^0)),v^0)\le g(u^0,v^0)$. А поскольку по определению $u_*(P(v^0))=u^0$, имеет место неравенство (4).

Пусть теперь $v\in V$ – любая стратегия второго игрока. Отображение $P$ определено так, что если $P(v)=i$, то $h(u^i,v)\le h(u^0,v^0)$. А тогда по определению функции $u_*$ получим $h(u_*(i),v)\le h(u^0,v^0)$, или $h(u_*(P(v)),v)\le h(u^0,v^0)$. А так как $u_*(P(v^0))=u^0$, выполняется неравенство (5).

Таким образом, стратегии $(u_*, P)$ и $v$ образуют ситуацию равновесия. Равенство $u_*(P(v))=u$ непосредственно следует из определения функций $u_*$ и $P$. Таким образом, исход $(u^0,v^0)$ – равновесный. Достаточность, а с ней и теорема, доказаны.

## 4. Предельная теорема

Классическая модель, аналогичная рассмотренной выше, выглядит следующим образом. Предполагается, что в момент принятия решений первый игрок имеет полную и точную информацию о выборе противника. Таким образом, его стратегии являются функциями из множества $V$ в $U$. Второй игрок не получает никакой информации о стратегии партнера, поэтому его множество стратегий совпадает с множеством управлений. Соответственно, приходим к рассмотрению игры $\Gamma_\#=\langle U_\#,V_\#,g_\#,h_\#\rangle$, в которой $U_\#$ – множество всех функций $u_\#:V\to U$, $V_\#=V$, а функции $g_\#$ и $h_\#$ определяются условиями $g_\#(u_\#,v_\#)=g(u_\#(v_\#),v_\#)$ и $h_\#(u_\#,v_\#)=h(u_\#(v_\#),v_\#)$.

Ситуацией равновесия в игре $\Gamma_\#$ называется такая пара стратегий $u_\#$ и $v$, что для любых стратегий $w_\#\in U_\#$ и $v\in V_\#=V$ выполняются неравенства $g_\#(w_\#,v)\le g_\#(u_\#,v)$ и $h_\#(u_\#,w)\le h_\#(u_\#,v)$. Те же неравенства могут быть переписаны в виде $g(w_\#(v),v)\le g(u_\#(v),v)$ и $h(u_\#(v),w)\le h(u_\#(v_\#),v)$. Исход $(u,v)\in U\times V$ называется равновесным, если существует стратегия $u_\#\in U_\#$, которая вместе с $v$ образует ситуацию равновесия и выполняется равенство $u_\#(v)=u$.

По сути, это та же модель, только с бесконечным числом вопросов. Часто бывает, что замена большого конечного числа бесконечностью упрощает решаемую задачу. Это так и в данном случае. В частности, справедлива

**Лемма 1.** Для того чтобы исход $(u^0,v^0)$ был равновесным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (6) и

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)\le h(u^0,v^0)\,.$$

**Доказательство** леммы можно найти, например, в [9].

Разумеется, бесконечность – это математическая абстракция, которой можно пользоваться, только если решение задачи «с бесконечностью» в каком-то смысле похоже на решение аналогичной «конечной» задачи. Выяснению условий, при которых это так в играх с обменом информацией, посвящен данный раздел. Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

Введем обозначения

$$l_m=\min_{(u^1,u^2,\ldots,u^{m-1})\in U^{m-1}}\ \max_{v\in V}\ \min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)\,,$$

$$l=\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)\,.$$

**Лемма 2.** Для любого $m$ и любого $u^0\in U$ выполняется неравенство $l_m\ge l$.

**Доказательство.** Фиксируем управления $u^1,u^2,\ldots,u^m$ из множества $U$ и обозначим $\Omega$ множество, состоящее из элементов $u^0,u^1,\ldots,u^m$. Тогда

$$\max_{v\in V}\ \min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)=\max_{v\in V}\min_{u\in\Omega} h(u,v)\,.$$

Поскольку $\Omega\subset U$, отсюда следует неравенство

$$\max_{v\in V}\ \min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)\ge l\,.$$

В силу произвольности $u^1,u^2,\ldots,u^m$ отсюда следует нужное неравенство. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Для любого $u^0\in U$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} l_m=l\,.$$

**Доказательство.** Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Множества

$$O_\varepsilon(u)=\{v\in V\colon h(u,v)<l+\varepsilon\}$$

покрывают множество $V$. В силу непрерывности функции $h$ эти множества открыты. Множество $V$ компактно, поэтому в силу леммы Гейне–Бореля существует конечное множество элементов $\omega^1,\omega^2,\ldots,\omega^k$ такое, что множества $O_\varepsilon(\omega^1),O_\varepsilon(\omega^2),\ldots,O_\varepsilon(\omega^k)$ по-прежнему покрывают $V$.

Пусть теперь $m>k$. Положим $u^i=\omega^i$ для $i=1,2,\ldots,k$ и выберем $u^i$ произвольно для $i>k$. Для любого $v\in V$ найдется номер $i$, для которого $v\in O_\varepsilon(u^i)$. Поэтому $h(u^i,v)<l+\varepsilon$. Тем более,

$$\min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)<l+\varepsilon\,.$$

В силу произвольности $v$ отсюда следует

$$\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)<l+\varepsilon\,.$$

И тем более

$$l_m=\min_{(u^1,u^2,\ldots,u^{m-1})\in U^{m-1}}\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)<l+\varepsilon\,.$$

Поскольку $\varepsilon$ выбиралось произвольно и уже доказана лемма 2, отсюда вытекает нужное утверждение.

**Замечание.** Леммы 2 и 3 имеют и самостоятельное значение. Мы оставили без рассмотрения случай антагонистических игр. Для них аналогами равновесий по Нэшу являются седловые точки. Доказанные леммы, по сути, означают, что в случае антагонистических игр переход к играм с бесконечным числом вопросов всегда корректен.

Существуют игры, для которых при любом $m$ выполняется строгое неравенство $l_m>l$, что демонстрирует следующий

**Пример 1.** Пусть $U=V=[-1,1]$ и $h(u,v)=(u-v)^2$ (функция $g$ в данном случае может быть произвольной).

Очевидно, в данном случае $l=0$. А для любого конечного $m$ и любых управлений $u^0,u^1,\ldots,u^m$ найдется такое $v$, что минимальный из модулей разностей $|u^i-v|$ будет больше или равен $\dfrac{1}{2m+4}$. Поэтому

$$\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)\ge\frac{1}{2m+4}\,,$$

и в силу произвольности $u^0,u^1,\ldots,u^m$

$$l_m=\min_{(u^1,u^2,\ldots,u^{m-1})\in U^{m-1}}\max_{v\in V}\min_{0\le i\le m-1} h(u^i,v)\ge\frac{1}{2m+4}>0\,.$$

Обозначим через $E_n$ множество равновесных исходов в игре $\Gamma_*$ с $n$ вопросами, а буквой $E$ – множество равновесных исходов в игре $\Gamma_\#$. Справедлива

**Лемма 4.** При любом $n$ выполнено включение $E_n\subset E$.

**Доказательство** леммы немедленно следует из результатов теоремы 1 и лемм 1 и 2.

Обозначим $E^0$ множество тех исходов $(u^0,v^0)$, для которых выполняется условие (6) и

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)<h(u^0,v^0)\,.$$

**Лемма 5.** Множество $E^0$ содержится в объединении $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$.

**Доказательство.** Фиксируем произвольный исход $(u^0,v^0)\in E^0$. Положим

$$\varepsilon=h(u^0,v^0)-\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)\,.$$

Число $\varepsilon>0$, поэтому в силу леммы 3 найдется такое $n$, что при $m=2^m$ будет выполняться неравенство

$$h(u^0,v^0)=l-\varepsilon>l_m.$$

В силу теоремы 1 отсюда следует, что исход $(u^0,v^0)$ принадлежит $E_n$, а значит и объединению $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. А поскольку исход $(u^0,v^0)$ выбирался произвольно, отсюда вытекает нужное утверждение.

Для краткости назовем условием регулярности следующее утверждение: «Замыкание множества $E^0$ совпадает с множеством $E$».

Из доказанных лемм непосредственно вытекает

**Теорема 2.** Если выполнено условие регулярности, то замыкание объединения $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ совпадает с множеством $E$.

Справедлива также

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие регулярности. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $n$, что для любого исхода $(u^0,v^0)\in E$ найдется такой исход $(u,v)\in E_n$, что выполняются неравенства $|u^0-u|<\varepsilon$ и $|v^0-v|<\varepsilon$.

**Доказательство.** Обозначим буквой $B$ множество тех исходов $(u^0,v^0)$, для которых выполняется условие (6) и равенство

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v) = h(u^0,v^0).$$

В силу теорем 1 и 2 имеет место равенство $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \bigcup B$. Поэтому теорему достаточно доказать для исходов $(u^0,v^0)\in B$.

Обозначим

$$o_\varepsilon(u,v)=\{(u',v')\in U\times V\colon |u'-u|<\varepsilon \text{ и } |v'-v|<\varepsilon\}$$

$\varepsilon$-окрестность исхода $(u,v)$. В силу условия регулярности и теоремы 2 семейство множеств

$$\{o_\varepsilon(u,v)\colon (u,v)\in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\}$$

покрывает множество $B$. Но в силу непрерывности функций $g$ и $h$ множество $B$ замкнуто. А тогда из компактности множеств $U$ и $V$ следует компактность множества $B$.

Значит, в силу леммы Гейне-Бореля можно выбрать конечное множество $(u^1,v^1),(u^2,v^2),\ldots,(u^k,v^k)$ исходов из множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Каждый из исходов $(u^i,v^i)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ принадлежит некоторому множеству $E_{p(i)}$. Если обозначить через $n$ наибольшее из чисел $p(1),p(2),\ldots,p(k)$, то число $n$ будет искомым. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 по-разному свидетельствуют о том, что условие регулярности является достаточным для корректности перехода от игр с большим числом вопросов к игре с бесконечным числом вопросов. Используя идеи [13] можно показать, что условие регулярности выполняется для типичных в некотором точно определенном смысле игр.

Вероятно, условие регулярности не является необходимым для обоснования корректности перехода от игр $\Gamma_*$ к классической игре $\Gamma_\#$. Однако совсем отказаться от этого условия нельзя, что демонстрирует следующий

**Пример 2.** Пусть $U=V=[-1,1]$, $g(u,v)=v(u-v)^2$ и $h(u,v)=(u-v)^2$.

В квадрате $U\times V=[-1,1]\times[-1,1]$ множество исходов, удовлетворяющих условию (6), представляет собой объединение трех отрезков: вертикального $\{(u,v)\in U\times V\colon u=-1,\ v\geq 0\}$, горизонтального $\{(u,v)\in U\times V\colon u\in[-1,1],\ v=0\}$ и диагонального $\{(u,v)\in U\times V\colon u=v\}$. Поскольку в данном примере

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v) = \min_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v),$$

все эти исходы являются равновесными в игре $\Gamma_\#$.

Как показано в примере 1, величины $l_m$ в данном случае строго положительны, поэтому при любом $n$ множество $E_n$ содержится в объединении вертикального и горизонтального отрезков, а множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ является объединением этих двух отрезков. Следовательно, в множестве $E$ имеется много исходов (из диагонального отрезка), которые плохо приближаются исходами из $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Например, исход $(-1,1)$ принадлежит $E$, а для любого исхода $(u,v)$ из $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ выполняется неравенство $v \geq 0$.

Таким образом, пользоваться идеализацией, допускающей обмен бесконечными объемами информации нужно с определенной осторожностью.

## *5. Заключение*

Итак, задачи, сформулированные во введении, в целом решены. Если вычисление кратного минимакса в формуле (7) удастся выполнить, то потом уже нетрудно найти отображение $P$ и функцию $u_*$. Заметим, что отображение $P$, по сути, задает «смысл» информации, передаваемой от одного игрока другому. Функция $u_*$ показывает, как на основе этой информации первому игроку следует принимать решения.

Об интерпретации найденного решения в терминах вопросов, задаваемых первым игроком партнеру можно подробно прочесть в [14]. В общих чертах эти вопросы таковы. Если мы хотим уравновесить исход $(u^0,v^0)$, следует задать один вопрос вида

«Верно ли, что Вами выбрано управление $v^0$?»

и несколько вопросов вида

«Верно ли, что при выбранном Вами $v$ выполняется неравенство $h(u^i,v) \leq h(u^0,v^0)$?».

Качественная структура решения такая же, как и в классическом случае. Она предполагает выбор взаимно выгодного решения и наказание противника за отклонение от него.

Теоремы 2 и 3 показывают, что в типичном случае использование классических моделей может быть оправдано, что довольно естественно, поскольку при их использовании пока не было обнаружено противоречий с практикой. В то же время приведенный пример показывает, что проблемы могут возникнуть. И назвать пример 2 «патологическим» вряд ли можно. Поэтому затронутая в данной статье тема представляется достаточно актуальной.

## *Литература*

1. Цермело Э. О применении теории множеств к теории шахматной игры // Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 167 –172.

2. Фон Нейман Дж. К теории стратегических игр // Матричные игры. М.: Наука, 1961. С. 173 – 204.

3. Borel E. La theorie du jeux et les equations integrales a noyau symmetrique // Comptes Rendus de l’Academie des Science. 1921. Vol. 173. P. 1304–1308.

4. Howard N. The theory of meta–games // General systems. 1966. Vol. 11. P. 187–200.

5. Гермейер Ю.Б. Об играх двух лиц с фиксированной последовательность ходов // ДАН. 1971. Т. 198. № 5. С. 1001–1004.

6. Кукушкин Н.С. Точки равновесия в метаиграх // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 2. С. 312–320.

7. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

8. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. М.: Знание. 1973.

9. Кукушкин Н.С. Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.

10. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991.

11. Бурков В.Н. Основы теории активных систем. М.: Наука, 1977.

12. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005.

13. Горелов М.А. Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 3. С.376– 387.

14. Горелов М.А. Максимальный гарантированный результат при ограниченном объеме передаваемой информации // Автоматика и телемеханика. 2011. №3. С. – .