Непрерывные информационные агрегаты в антагонистических играх

М. А. Горелов

(*119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН*)

Исследуются две задачи о рациональном агрегировании информации в антагонистических играх. Рассматриваются непрерывные способы агрегирования. Рациональность оценивается по двум критериям: минимаксному выигрышу одного из игроков и размерности пространства агрегатов.

ВВЕДЕНИЕ

На практике часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда управление сложной экономической, технической или какой-то иной системой осуществляется децентрализовано. При этом каждый из элементов системы управляется относительно независимо. Поскольку у каждого элемента системы появляется право выбора, постольку у него появляются и собственные интересы. Чаще всего имеется выделенный элемент (центр), интересы которого отождествляются с интересами системы в целом. Во многих случаях он имеет возможность управлять не только и не столько выбором каких-то «физических» параметров, сколько способом управления системой, в частности, регламентом обмена информацией. При этом он, конечно, вынужден учитывать интересы всех остальных участников процесса управления. Естественно встает вопрос об оптимальных способах управления такими системами.

Разумеется, такого рода задачу невозможно сразу охватить во всех деталях. Поэтому первые модели такого рода [1] многого не учитывали. В частности, процесс принятия решения моделировался как выбор точки из некоторого множества. При этом процесс принятия решения становится «элементарным» актом и вне рассмотрения оказываются такие важные факторы, как временные ограничения на принятие решений и стоимость самого процесса управления. Оказалось, что найденные оптимальные процедуры управления предполагают обмены весьма большими объемами информации [2]. Как-то учесть два указанных выше фактора можно, наложив ограничение на «объем» передаваемой информации.

Простейшая модель такого рода представляет собой иерархическую игру двух лиц. Если центру известны все параметры игры, то вся неопределенность для него сводится к неизвестному выбору партнера. В таком случае оптимального результата центр может добиться, если потребует от своего партнера точного сообщения о своем выборе [2]. В контексте сказанного выше естественным выглядит вопрос о том, можно ли добиться удовлетворительного результата, если второй игрок будет передавать информацию о своем выборе не полностью, а в агрегированном виде? Такая постановка, по-видимому, впервые была предложена А. Ф. Кононенко.

Возникает как минимум два вопроса. Как при заданном ограничении на объем передаваемой информации добиться максимальной эффективности управления? И можно ли, не снижая сильно эффективность управления, уменьшить объемы передаваемой информации? Для того, чтобы сделать эти вопросы осмысленными, нужны количественные меры эффективности управления и количества информации. Естественная мера эффективности управления есть – это выигрыш центра. Столь же естественной меры количества информации нет. В данной статье мы руководствуемся следующими соображениями.

На практике чаще всего обмениваются числовой информацией, поэтому количество передаваемой информации естественно характеризовать количеством передаваемых чисел, то есть размерностью линейного пространства, которому принадлежат возможные сообщения. Нам будет удобно сделать еще один шаг в сторону абстракции. А именно, мы не будем предполагать в пространстве возможных сообщений наличия линейной структуры и станем рассматривать произвольные топологические пространства. В качестве меры количества информации мы по-прежнему будем рассматривать размерность пространства, только уже не линейную, а топологическую. Как мы увидим ниже, среди решений такой задачи всегда найдутся достаточно простые, и потому приемлемые с содержательной точки зрения.

Для того чтобы исключить тривиальные решения, заведомо неприемлемые на практике, нужно наложить какие-то ограничения на сложность способа агрегирования информации. Мы будем предполагать агрегирующие отображения непрерывными. В пользу этого предположения говорит еще один аргумент. На практике неизбежны малые ошибки, как при агрегировании информации, так и при ее передаче. В нашей простейшей модели это явно никак не учитывается, но предположение непрерывности отчасти снимает остроту проблемы.

На самом деле выше мы описали две немного различные постановки задачи: в первой количество информации описывается размерностью объемлющего линейного пространства, а во второй – размерностью самого множества возможных сообщений. В данной статье рассматривается только вторая постановка. Скажем несколько слов о первой. Зная топологическую структуру решения второй задачи, можно найти линейное пространство наименьшей размерности, в которое это решение вкладывается. Эта задача достаточно хорошо исследована [3]. Таким образом, можно получить нетривиальные оценки в первой задаче. Хотя, разумеется, трудно ожидать, что при этом будет получено именно решение первой задачи. Но, развивая дальше изложенные ниже идеи, можно предложить способ получения всех топологически различных решений второй задачи и, перебирая их, получить решение первой. Весьма вероятно, что такой подход далеко не самый лучший, но иного пока не видно. Кроме того, он все-таки проливает некоторый свет на решение более сложной задачи.

Как мы увидим, среди решений рассматриваемой задачи всегда есть симплициальные комплексы, то есть весьма простые топологические пространства. Однако решения, вообще говоря, не являются топологическими многообразиями, поскольку в некоторых точках решения имеют «ветвления». Приходится констатировать, что на практике таких способов агрегирования информации не встречается. С другой стороны, не видно содержательных доводов против них. С дополнительным условием отсутствия ветвлений задача, по-видимому, становится сложнее и для ее решения можно пока предложить лишь подход, описанный в предыдущем абзаце.

Близкие по постановке задачи рассматривалась в [4–5]. Однако там авторы используют локальные методы дифференциальной геометрии и потому получают результаты для весьма узкого класса игр. Как мы увидим ниже это не случайно. В данной задаче глобальная структура имеет первостепенное значение и потому локальные методы плохо применимы.

В данной статье мы вынуждены ограничиться исследованием частного случая – антагонистических игр. Решение задачи в общем случае сводится к этому частному. Однако известный мне способ редукции существенно опирается на найденную ниже структуру решения для антагонистических игр. Объем статьи не позволяет рассмотреть оба вопроса сразу, поэтому исследование общего случая приходится оставить до другого раза. Впрочем, антагонистический случай достаточно интересен и сам по себе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Поскольку это не вызывает дополнительных осложнений, постановку задачи обсудим сразу в общем случае. Будем рассматривать игру $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$, где U и V – компактные топологические пространства, а g и h – непрерывные функции. Первый игрок (центр) выбирает управления из множества U и стремится максимизировать значение функции g, а второй игрок выбирает управления из множества V и максимизирует значение функции h.

Наряду с игрой Γ будем рассматривать ее информационные расширения [2], построенные следующим образом. Рассмотрим отображение $P{:}V\to W$ и игру $\Gamma_P=\langle U_P,V_P,g_P,h_P\rangle$, заданную следующими условиями: $V_P=V$, U_P – это множество всех отображений из W в U, а функции g_P и h_P определяются условиями $g_P(u_P,v_P)=g(u_P(P(v_P)),v_P)$, $h_P(u_P,v_P)=h(u_P(P(v_P)),v_P)$. Будем считать, что W – топологическое пространство, а отображение P непрерывно.

Содержательно описанные конструкции интерпретируются следующим образом. Отображение P каждому управлению v, выбранному вторым игроком, ставит в соответствие некоторое сообщение $w\in W$. Это сообщение второй игрок и передает своему партнеру, а тот принимает свое решение, имея уже какую-то информацию о сделанном вторым игроком выборе. Таким образом, стратегиями первого игрока являются функции от поступающей информации, но выигрыши игроков зависят лишь от его окончательного выбора.

Непосредственно проверяется, что так построенная игра Γ_P является квазиинформационным расширением игры Γ. Игру Γ_P, соответствующую постоянному отображению P, очевидно можно отождествить с исходной игрой Γ. Игру, соответствующую тождественному отображению P, рассматривал еще Ю. Б. Гермейер. По традиции ее обозначают Γ_2. Несложно проверить, что игра Γ_2 является квазиинформационным расширением игры Γ_P при любом отображении P.

Для игры Γ_P стандартным образом (см., например, [1], [2]) определим множество $B(u_P)$ рациональных ответов второго игрока на стратегию u_P и максимальный гарантированный результат первого игрока $R(\Gamma_P)$. Фиксируем произвольное положительное число α. Положим

- $B(u_P)=\{v_P\in V_P : h_P(u_P,v_P)=\max\limits_{v\in V_P}h_P(u_P,v)\}$, если верхняя грань $\sup\limits_{v\in V_P}h_P(u_P,v)$ достигается, и
- $B(u_P)=\{v_P\in V_P : h_P(u_P,v_P)>\sup\limits_{v\in V_P}h_P(u_P,v)-\alpha\}$ в противном случае.

Пусть

$$R(\Gamma_P)=\sup_{u_P\in U_P}\inf_{v_P\in B(u_P)}g_P(u_P,v_P).$$

Очевидно, всякое множество W можно снабдить тривиальной топологией, объявив открытыми пустое множество, само множество W и только их. Тогда любое отображение $P{:}V\to W$ будет непрерывным, и мы придем по существу к задачам, уже рассмотренным в [6]. Чтобы избежать такого рода патологических решений, необходимо наложить какие-то дополнительные ограничения на топологию множества W. Пример с тривиальной топологией наводит на мысль, что это должно быть условие типа отделимости.

В дальнейшем мы будем считать, что пространство W – нормальное. Содержательная интерпретация более общих пространств в контексте задачи об агрегировании информации вызывает определенные затруднения. Поэтому, не имея в том конкретной нужды, мы их рассматривать не станем.

Особый интерес представляют разного рода “естественные” топологии на множествах U и V, то есть самые слабые топологии, в которых непрерывны функции g, h или еще какие-то функции, получаемые на их основе. Для этих топологий аксиомы отделимости, вообще говоря, не выполняются. Поэтому на топологии пространств U и V дополнительных ограничений такого рода накладывать не будем. Впрочем, это не создает больших дополнительных проблем.

Пусть $\varphi{:}W\to W'$– гомеоморфизм и $P' = \varphi \circ P$. Поскольку отображение φ взаимно однозначно, разумно считать, что с помощью отображений P и P' передается одна и та же информация, возможно по-разному закодированная. С другой стороны, топологические свойства пространств W и W' и функций P и P' одинаковы. Это дает основание считать, что сложность способа передачи информации должна выражаться через топологические инварианты множества W и отображения P. Один из возможных и достаточно естественных вариантов постановки задач получается, когда мы принимаем за сложность способа передачи информации размерность пространства W. В случае, когда на множестве W можно ввести координаты, этот способ определения сложности процедуры информационного обмена имеет хорошую содержательную интерпретацию: чем выше сложность, тем больше чисел нужно передавать.

Маловероятно, чтобы пространства, для которых различные определения размерности дают разные результаты, допускали хорошую содержательную интерпретацию. Поэтому, не мудрствуя лукаво, в дальнейшем под размерностью будем понимать размерность в смысле Чеха–Лебега (размерность в смысле покрытий). Стандартное обозначение для этой размерности $\dim W$.

Итак, каждое квазиинформационное расширение Γ_P заданной игры Γ характеризуется двумя показателями: сложностью процесса управления и его эффективностью. Первый количественно измеряется размерностью пространства сообщений W, а второй – максимальным гарантированным результатом центра $R(\Gamma_P)$. Таким образом, задача о рациональном выборе расширения Γ_P становится двухкритериальной. Соответственно, появляется много способов ее конкретизации. Мы рассмотрим два из них, которые представляются наиболее естественными.

Задача 1. Задано число γ. Требуется найти нормальное топологическое пространство W и непрерывную функцию $P{:}V\to W$ такие, чтобы соответствующее квазиинформационное расширение Γ_P удовлетворяло условию $R(\Gamma_P)\geq\gamma$, а размерность пространства W была наименьшей.

Задача 2. Задано неотрицательное целое число m. Требуется найти нормальное топологическое пространство W, размерность которого не превосходит m, и непрерывную функцию $P{:}V\to W$ такие, чтобы величина $R(\Gamma_P)$ была максимальной.

Если в задаче 1 число $\gamma\leq R(\Gamma)$, то решение этой задачи дает множество W, состоящее из одной точки, и (единственное) отображение $P{:}V\to W$. Если $\gamma>R(\Gamma_2)$, то задача 1 решения не имеет (см., например [2]). Следовательно, интерес представляют лишь такие значения γ, для которых выполняется неравенство

$$R(\Gamma)< \gamma\leq R(\Gamma_2). \tag{1.1}$$

Очевидно, с ростом m выигрыш первого игрока $R(\Gamma_P)$ на оптимальном решении задачи 2 не уменьшается. Предположим, мы умеем решать задачу 2. Будем решать ее последовательно для m=0,1,2,... Как только для очередного оптимального решения Γ_P будет выполнено условие $R(\Gamma_P)\geq\gamma$, будет решена и задача 1. Разумеется, хотелось бы иметь априорную оценку числа шагов в таком алгоритме. Напрашивающееся решение $W=V$ и P – тождественное отображение неудовлетворительно, так как пространство V может не быть нормальным. Поэтому оценка $m\leq\dim V$ не очевидна. Тем не менее, такая оценка может быть получена, по крайней мере, для игр «общего положения». В таком случае решение задачи 1 сводится к решению задачи 2.

В силу монотонности размерности по включению, можно, не ограничивая общности, рассматривать лишь отображения P на все множество W. В таком случае пространство W компактно. Часто будет удобно предполагать это условие выполненным.

Кстати, всякое компактное хаусдорфово пространство нормально (см. [7], глава 2, параграф 6, теорема 5). Кроме того, в силу леммы Урысона, каждое нормальное пространство является вполне регулярным, что для нас особенно важно (см. [8], теорема 1.5.10). Таким образом, произвол в выборе дополнительных ограничений на структуру пространства W меньше, чем представляется на первый взгляд.

В этой связи естественно возникает вопрос: можно ли при решении задачи 2 ограничиться рассмотрением лишь тех пространство, для которых $\dim W=m$? Ответ на этот вопрос положителен, однако простым доказательством этого факта я не располагаю. Известное мне доказательство существенно использует структуру специальных решений задачи 2, найденных ниже.

2. СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ

На протяжении оставшейся части статьи будем считать, что игра Γ – антагонистическая, то есть $\Gamma=\langle U,V,-h,h\rangle$. Таким образом, первый игрок минимизирует значение функции h, а второй максимизирует его. Несколько необычные обозначения объясняются тем, что к исследованию именно такой игры сводится решение общей задачи для игры $\langle U,V,g,h\rangle$.

Рассмотрим задачу 1. Для антагонистического случая она может быть переформулирована следующим образом.

Задано число λ. Требуется найти нормальное топологическое пространство W и непрерывную функцию $P{:}V\to W$ такие, чтобы выполнялось неравенство

$$\inf_{u_P\in\Phi(W,U)}\sup_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)\le\lambda \tag{2.1}$$

и при этом размерность пространства W была минимальной. (Здесь и далее $\Phi(X,Y)$ обозначает множество всех функций из X в Y).

Можно конкретизировать и неравенство (1.1). А именно, интерес представляют лишь значения λ, удовлетворяющие неравенству

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)\le\lambda<\min_{u\in U}\max_{v\in V} h(u,v).$$

Сначала рассмотрим случай

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)<\lambda<\min_{u\in U}\max_{v\in V} h(u,v). \tag{2.2}$$

Для каждого $u\in U$ определим множество

$$O(u)=\{v\in V\colon h(u,v)<\lambda\}.$$

Эти множества открыты в силу непрерывности функции h. Так как выполняется первое из неравенств (2.2), совокупность всех множеств $O(u)$ покрывает множество V. В силу компактности множества V из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 1. Пусть элементы $u_0,u_1,\dots,u_n$ множества U выбраны так, что множества $O(u_0),O(u_1),\dots,O(u_n)$ покрывают множество V. Если кратность этого покрытия равна $m+1$, то существует m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P{:}V\to W$, для которых выполняется неравенство (2.1).

Доказательство. Выберем в n-мерном евклидовом пространстве n-мерный симплекс S. Обозначим его вершины $a_0,a_1,\dots,a_n$.

Определим функции

$$\varphi_i(v)=\max\{\lambda-h(u_i,v),0\}.$$

Так как $O(u_0),O(u_1),...,O(u_n)$ – покрытие множества V, функция

$$\Phi(v)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(v)$$

строго положительна в любой точке $v\in V$. Очевидно, функции φ_i, а значит и Φ непрерывны.

Рассмотрим отображение $P:V\to S$, определенное условием

$$P(v)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi_i(v)}{\Phi(v)}a_i.$$

Очевидно оно непрерывно.

Пусть $I\subset\{0,1,...,n\}$. Если для любого $j\notin I$ точка $v\notin O(u_j)$, то $P(v)$ принадлежит грани симплекса S с множеством вершин $\{a_i: i\in I\}$. Поскольку каждая точка v принадлежит не более чем $m+1$ множеству покрытия, ее образ содержится в грани симплекса S, размерности не выше m.

Обозначим W образ множества V при отображении P. Как мы только что установили, W компактно и вложено в m-мерный подкомплекс симплекса S, а потому не более чем m-мерно.

Определим функцию $u_P:W\to U$ следующим образом. Для каждой точки w выберем наименьшую по включению грань симплекса S, которая содержит эту точку. Возьмем произвольную вершину a_i этой грани и положим $u_P(w)=u_i$.

Пусть v – произвольная точка множества V, $w=P(v)$, а $u_P(w)=u_i$. По построению функции u_P точка w принадлежит грани симплекса S с вершиной a_i. Но тогда по определению отображения P точка v принадлежит множеству $O(u_i)$. Следовательно,

$$h(u_P(P(v)),v)=h(u_i,v)<\lambda.$$

Но точка v выбрана произвольно, значит

$$\sup_{v\in V}h(u_P(P(v)),v)<\lambda,$$

и тем более выполняется неравенство (2.1). Теорема доказана.

Усилим ее. Назовем множество $\Omega\subset V$ хорошим, если существуют $u_1,...,u_k,u_{k+1},...,u_n\in U$ и $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ такие, что

$$\Omega=\{v\in V:\ h(u_i,v)<\lambda_i,\ i=1,...,k,\ h(u_i,v)>\lambda_i,\ i=k+1,...,n\}.$$

В силу непрерывности функции h любое хорошее множество открыто. Справедлива

Лемма 1. Пусть Ω – хорошее множество. Тогда существует непрерывная функция $\varphi:V\to\mathbb{R}$ такая, что $\varphi(v)>0$, если ,$v\in\Omega$, и $\varphi(v)=0$, если $v\notin\Omega$.

Доказательство. Для $i=1,...,k$ положим

$$\varphi_i(v)=\max\{\lambda-h(u_i,v),\ 0\},$$

а для $i=k+1,...,n$ положим

$$\varphi_i(v)=\max\{h(u_i,v)-\lambda,\ 0\}.$$

Остается определить $\varphi(v)$ равенством $\varphi(v)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(v)$. Легко видеть, что функция φ удовлетворяет условиям леммы.

Теорема 2. Пусть $u_1,u_2,...,u_n$ выбраны так, что множества $O(u_1),O(u_2),...\ ...,O(u_n)$ покрывают пространство V. Если существует вписанное в это покрытие подпокрытие множества V хорошими множествами $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ кратности $m+1$, то существуют m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P:V\to W$, для которых выполняются неравенства (2.1).

Доказательство мало отличается от доказательства теоремы 1. С помощью леммы 1 строится отображение пространства V в m-мерный подкомплекс k-мерного симплекса S^k. Определение функции u_P очевидным образом модифицируется с тем, чтобы из условия $u_P(P(v))=u_i$ следовало $v\in O(u_i)$.

Аналогично доказывается

Теорема 3. Пусть V – вполне регулярное (тихоновское) пространство, а $u_1,u_2,...,u_n$ выбраны так, что множества $O(u_1),O(u_2),...,O(u_n)$ покрывают V. Если существует вписанное в это покрытие открытое покрытие пространства V множествами $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ кратности $m+1$, то существует m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P{:}V\to W$, для которых выполняются неравенства (2.1).

Следующая теорема обобщает предыдущие.

Теорема 4. Пусть существуют элементы $u_1,u_2,..,u_n$ множества U, открытые подмножества $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ пространства V и непрерывные функции $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_k$ из V в $\mathbb{R}$ такие, что

1) $\bigcup_{i=0}^{k}\Omega_i = V$;
2) покрытие $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ вписано в покрытие $O(u_1),O(u_2),...,O(u_n)$;
3) кратность покрытия $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ не превосходит $m+1$;
4) $\varphi_i(v)>0$, при $v\in\Omega_i$, $\varphi_i(v)=0$, при $v\in V\setminus\Omega_i$.

Тогда существуют m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P{:}V\to W$, для которых выполняется неравенство (2.1).

Доказательство по существу не отличается от доказательства теоремы 1.

Замечание 1. Из доказательства теорем 1–4 легко видеть, что для построенных множеств W и отображений P выполняется не только неравенство (2.1), но и строгое неравенство

$$\inf_{u_P\in\Phi(W,U)}\sup_{v\in V} h(u_P(P(v)),v) < \lambda. \tag{2.3}$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что в предыдущих теоремах с ростом номера повышается общность, но снижается конструктивность. Поэтому и приведено сразу несколько формулировок, а не только последняя. Теорема 4 уже является максимально общей, как это видно из результатов следующего раздела.

3. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ НАЙДЕННОЙ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЙ

Обратим утверждение теоремы 4.

Теорема 5. Пусть существуют m-мерное нормальное пространство W и непрерывная функция $P{:}V\to W$, для которых выполняется неравенство (2.3). Тогда существуют элементы $u_1,u_2,..,u_n$ множества U, открытые подмножества $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ пространства V и непрерывные функции $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_k$ из V в $\mathbb{R}$ такие, что

1) $\bigcup_{i=0}^{k}\Omega_i = V$;
2) покрытие $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ вписано в покрытие $O(u_1),O(u_2),...,O(u_n)$;
3) кратность покрытия $\Omega_0,\Omega_1,...,\Omega_k$ не превосходит $m+1$;
4) $\varphi_i(v)>0$, при $v\in\Omega_i$, $\varphi_i(v)=0$, при $v\in V\setminus\Omega_i$.

Доказательство. Для каждого $u\in U$ определим множество

$$F(u)=\{v\in V\colon h(u,v)\geq\lambda\}$$

Множество $F(u)$ замкнуто, а значит компактно. Пусть $Z(u)$ – образ множества $F(u)$ при отображении P. Множество $Z(u)$ компактно и, следовательно, замкнуто. Тогда множество $Y(u)=W\setminus Z(u)$ открыто.

Пусть функция u_P настолько хорошо реализует нижнюю грань в (2.3), что выполняется неравенство

$$\sup_{v\in V} h(u_P(P(v)),v) < \lambda.$$

Тогда для любого v выполняется неравенство

$$h(u_P(P(v)),v) < \lambda.$$

Поэтому $P(v)\in Y(u_P(P(v)))$. Так как v – произвольная точка, множества $Y(u)$ покрывают все множество W.

Поскольку пространство W компактно, можно выбрать конечное число элементов $u_1,u_2,...,u_n$ множества U так, что множества $Y(u_1),Y(u_2),...,Y(u_n)$ будут по-прежнему покрывать W.

Пространство W m-мерно, следовательно, в покрытие $Y(u_1),Y(u_2),...,Y(u_n)$ можно вписать открытое покрытие $G_1,G_2,...,G_k$, кратность которого не превосходит $m+1$.

Пусть $\Omega_i=P^{-1}(G_i)$, $i=1,2,...,k$. Множества Ω_i открыты и покрывают пространство V. Кратность покрытия $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_k$ равна кратности покрытия $G_1,G_2,...,G_k$, а значит, не превосходит $m+1$. Наконец, если $G_i\subset Y(u_j)$, то $\Omega_i\subset O(u_j)$, то есть покрытие $\Omega_1,\Omega_2,...,\Omega_k$ вписано в покрытие $O(u_1),O(u_2),...,O(u_n)$.

По условию пространство W нормально, значит, для открытого множества G_i существует непрерывная функция ψ_i такая, что $\psi_i(w)>0$, при $w\in G_i$, и $\psi_i(w)=0$, при $u\in W\setminus G_i$. Положим $\varphi_i=\psi_i\circ P$. Очевидно, $\varphi_i(v)>0$, при $v\in\Omega_i$, $\varphi_i(v)=0$, при $v\in V\setminus\Omega_i$.

Теорема доказана.

Аналогичным образом может быть обращена и теорема 3.

4. УПРОЩЕНИЕ РЕШЕНИЙ

При доказательстве теорем 1–4 мы строим отображение P множества V в m-мерный подкомплекс K^m симплекса S. На самом деле, для «наиболее экономных» подкомплексов K^m отображение P будет отображением на весь комплекс K^m.

Данный симплекс S имеет конечное число подкомплексов. Поэтому, если найдется подмножество W симплекса S и отображение $P{:}V\to W$, для которых выполнено неравенство (2.3), то найдется подкомплекс K^m симплекса S такой, что

1) существуют множество $W\subset K^m$ и отображение $P{:}V\to W$, для которых выполняется неравенство (2.3);
2) ни для какого собственного подкомплекса K комплекса K^m нельзя подобрать множество $W\subset K$ и отображение P так, чтобы по-прежнему было справедливо неравенство (2.3).

Для такого подкомплекса K^m выполняется условие: если $W\subset K^m$, $P{:}V\to W$ и имеет место неравенство (2.3), то $W=K^m$ и отображение P сюръективно.

Допустим противное. Тогда найдется симплекс S_0 комплекса K^m такой, что множество W содержит внутренние точки симплекса S_0, но не покрывает его целиком. Выберем точку $a\in S_0\setminus W$ и пусть Q – проекция симплекса S из точки a на его границу. Функция $Q\circ P$ отображает множество V в некоторый подкомплекс K комплекса K^m. Этот подкомплекс собственный, так как S_0 входит в комплекс K^m, но не входит в K. При отображении Q каждый симплекс комплекса K^m переходит в свою (быть может несобственную) грань. Поэтому, если стратегия u_P построена как при доказательстве теоремы 1 и для нее выполняется неравенство

$$\sup_{v\in V} h(u_P(P(v)),v) < \lambda,$$

то для нее будет выполняться и неравенство

$$\sup_{v\in V} h(u_P(Q(P(v))),v) < \lambda.$$

Получено противоречие.

При постановке задач 1 и 2 мы допускали к рассмотрению произвольные нормальные пространства W. Среди них много пространств, устроенных весьма причудливо. Результаты данного раздела показывают, что среди решений задач 1 и 2 всегда найдутся такие, что соответствующие пространства W устроены совсем просто. А это уже существенный аргумент в пользу рассматриваемых постановок.

5. ПРИМЕРЫ

Первый пример показывает, что утверждение теоремы 1, вообще говоря, обратить нельзя.

Пример 1. Пусть V – отрезок действительной прямой V=[1,14]. Рассмотрим функции

$$f_1(v)=(2-v)(v-10),$$
$$f_2(v)=v-8,$$
$$f_3(v)=(v-4)(v-6)(v-12).$$

Пусть топология на V задается предбазой, состоящей из трех множеств

$$O_i=\{v\in V: f_i(v)<0\},\ i=1,2,3.$$

Непосредственно проверяются следующие три свойства:

1) если открытое множество содержит точку v=13, то оно содержит и точку v=1;
2) если открытое множество содержит точку v=5, то оно содержит и точку v=1;
3) если открытое множество содержит точку v=9, то оно содержит и точку v=1;

Очевидно, что если покрытие $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ вписано в покрытие O_1,O_2,O_3, то ни одно из множеств Ω_i не содержит более одной из точек v=5, v=9, v=13.

Поэтому всякое открытое покрытие, вписанное в покрытие O_1,O_2,O_3, имеет кратность не ниже трех.

Таким образом, наше пространство V нельзя непрерывно отобразить на одномерное нормальное пространство W. Очевидно, его можно отобразить на двумерный треугольник. Отметим, что в обычной евклидовой топологии множество V одномерно.

Итак, если заданная на множестве стратегий второго игрока топология строго сильнее топологии, предбазу которой образуют множества

$$O(u)=\{v\in V: h(u,v)<\lambda\},$$

то конструкции теоремы 1 не дают, вообще говоря, оптимального решения задачи 1.

Пример 2. Пусть V – треугольник в трехмерном евклидовом пространстве, заданный условиями

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$$

и снабженный обычной евклидовой топологией. Рассмотрим покрытие V тремя множествами

$$O_1=\{(x,y,z)\in V: y<2/3,\ z<2/3\},$$
$$O_2=\{(x,y,z)\in V: x<2/3,\ z<2/3\},$$
$$O_3=\{(x,y,z)\in V: x<2/3,\ y<2/3\}.$$

Это покрытие имеет кратность три.

Однако в него можно вписать открытое покрытие

$$\Omega_1=O_1,\ \Omega_2=\{(x,y,z)\in V: y>1/2\},\ \Omega_3=\{(x,y,z)\in V: z>1/2\},$$

имеющее кратность два.

Пространство V очевидно регулярно, поэтому существуют и функции φ_i такие, что

$$\Omega_i=\{v\in V\colon \varphi_i(v)>0\}\ (i=1,2,3).$$

Этот пример показывает, что в решении задачи 1 множества $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_n$, вообще говоря, не совпадают с множествами $O_1,O_2,\ldots,O_n$.

Пример 3. Пусть по-прежнему V – треугольник

$$V=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3\colon x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\},$$

снабженный евклидовой топологией. Рассмотрим его покрытие множествами

$$O_1=\{(x,y,z)\in V\colon x>1/4\},$$
$$O_2=\{(x,y,z)\in V\colon y>1/4\},$$
$$O_3=\{(x,y,z)\in V\colon z>1/4\},$$
$$O_4=\{(x,y,z)\in V\colon x<4/5,\ y<4/5,\ z<4/5\}.$$

В него можно вписать покрытие кратности два

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\in V\colon x>3/4\}\subset O_1,$$
$$\Omega_2=\{(x,y,z)\in V\colon y>3/4\}\subset O_2,$$
$$\Omega_3=\{(x,y,z)\in V\colon z>3/4\}\subset O_3,$$
$$\Omega_4=O_4.$$

Покрытие O_1,O_2,O_3,O_4 избыточно: множества O_1,O_2,O_3 также покрывают V. Однако в покрытие O_1,O_2,O_3 нельзя вписать открытое покрытие кратности меньше трех.

В самом деле, пусть $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ – открытые множества, $\omega_1\subset O_1$, $\omega_2\subset O_2$, $\omega_3\subset O_3$. В данном примере пространство V нормально, поэтому в покрытие $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ можно вписать замкнутое подпокрытие F_1,F_2,F_3 так, что $F_1\subset\omega_1$, $F_2\subset\omega_2$, $F_2\subset\omega_2$ (см. [8], теорема 1.5.18). Множества F_1,F_2,F_3 удовлетворяют условиям теоремы Куратовского–Кнастера–Мазуркевича (см. [8], теорема 4 на с. 609), а потому их пересечение не пусто. Следовательно, покрытие $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ имеет кратность три.

Пример показывает, что если задано избыточное покрытие $O_1,O_2,\ldots,O_n$, то, решая задачу 1, вообще говоря, нельзя избавиться от “лишних” множеств.

Этот же пример демонстрирует еще одно обстоятельство. Используя покрытие $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ можно построить отображение множества V на множество W состоящее из трех отрезков, имеющих общий конец. Это множество одномерно, но не может быть вложено в евклидову прямую.

Можно утверждать несколько больше. Пусть $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$, а функция $h\colon U\times V\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $h(u_i,v)=0$, если v принадлежит замыканию O_i, и $h(u_i,v)>0$ в противном случае. Построенное с помощью покрытия $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ и теоремы 4 множество W («треххвостка») и отображение P обеспечивают равенство

$$\min_{u_P\in\Phi(W,U)}\ \max_{v\in V} h(u_P(P(v)),v)=0.$$

Пусть теперь Q – любое непрерывное отображение треугольника V в прямую $\mathbb{R}$. Обозначим вершины треугольника V через a_1,a_2,a_3. Не ограничивая общности, можно считать, что точка $Q(a_3)$ лежит между точками $Q(a_1)$ и $Q(a_2)$. Образ $Q([a_1,a_2])$ отрезка $[a_1,a_2]$ связен и компактен, а потому представляет собой отрезок. Отрезок $Q([a_1,a_2])$ содержит $Q(a_1)$ и $Q(a_2)$, а значит и a_3. Следовательно, на отрезке $[a_1,a_2]$ найдется точка b такая, что $Q(b)=Q(a_3)$.

Пусть $u_Q\in\Phi(\mathbb{R},U)$ – любая стратегия. Если $u_Q(Q(a_3))=u_3$, то $h(u_Q(Q(b)),b)>0$, а если $u_Q(Q(a_3))\neq u_3$, то $h(u_Q(Q(a_3)),a_3)>0$. В любом случае

$$\max_{v\in V} h(u_Q(Q(v)),v)>0,$$

а поскольку u_Q – любая стратегия, то и

$$\inf_{u_Q\in\Phi(\mathbb{R},U)}\ \max_{v\in V} h(u_Q(Q(v)),v)>0.$$

Следовательно, для нашей игры есть «хороший» одномерный агрегат, но ни один «хороший» агрегат не может быть вложен в прямую.

Пример 4. Определим два треугольника

$$T_1=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3: x+y+z=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\},$$
$$T_2=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3: x+y+z=1,\ x>1/5,,\ y>1/5,\ z>1/5\}.$$

Пусть $V=T_1\backslash T_2$ и снабжено евклидовой топологией. Рассмотрим покрытие множества V множествами

$$O_1=\{(x,y,z)\in V: x>1/6\},$$
$$O_2=\{(x,y,z)\in V: y>1/6\},$$
$$O_3=\{(x,y,z)\in V: z>1/6\}.$$

Кратность этого покрытия равна трем, но в него можно вписать покрытие кратности два:

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\in V: x>1/3\}\subset O_1,$$
$$\Omega_2=\{(x,y,z)\in V: y>1/3\}\subset O_2,$$
$$\Omega_3=\{(x,y,z)\in V: z>1/3\}\subset O_3.$$

Сравнение этого примера с предыдущим показывает, что наличие двукратного покрытия тесно связано с тем, что множество V имеет «дырку».

Анализ примеров 3 и 4 показывает, что нерв исходного покрытия $O_1,O_2,...,O_n$ еще не определяет структуру решения задачи 1. Приведем еще один пример того же рода.

Пример 5. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве заданы точки A_1,A_2,A_3,B,C общего положения. Обозначим B_i середину отрезка A_iB, а C_i – середину отрезка A_iC, D_i – середину отрезка B_iB, E_i – середину отрезка C_iC (i=1,2,3). Пространство V представляет собой объединение треугольников A_1BC, A_2BC, A_3BC, снабженное индуцированной топологией. Рассмотрим покрытие V множествами

$$O_1=V\setminus\left[\operatorname{conv}\{A_1B_1C_1\}\bigcup\operatorname{conv}\{A_2D_2E_2\}\right],$$
$$O_2=V\setminus\left[\operatorname{conv}\{A_2B_2C_2\}\bigcup\operatorname{conv}\{A_3D_3E_3\}\right],$$
$$O_3=V\setminus\left[\operatorname{conv}\{A_3B_3C_3\}\bigcup\operatorname{conv}\{A_1D_1E_1\}\right]$$

(здесь conv$X$ обозначает выпуклую оболочку множества X).

Нерв этого покрытия такой же, как и у неизбыточного покрытия в примере 3. Однако в него можно вписать покрытие кратности два:

$$\Omega_1=O_1,\ \Omega_2=O_2,\ \Omega_3=\operatorname{conv}\{A_2D_2E_2\}\setminus\operatorname{conv}\{D_2E_2\}.$$

Интересно отметить, что пространство V этого примера имеет тривиальные группы гомотопий, так же как и пространство V в примере 3.

6. ЗАДАЧА 2 И ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВОК

Как было показано выше, задача 1 может быть сведена к задаче 2. Возможна и обратная редукция.

В самом деле, при заданном значении m неравенство (2.2) дает верхнюю $\lambda^*=\min\limits_{u\in U}\max\limits_{v\in V}h(u,v)$ и нижнюю $\lambda_*=\max\limits_{v\in V}\min\limits_{u\in U}h(u,v)$ оценки оптимального значения λ в задаче 2. Решим задачу 1 с $\lambda=(\lambda^*+\lambda_*)/2$.Если размерность найденного пространства W будет больше m, то мы сможем уточнить нижнюю оценку, а в противном случае – верхнюю. Проделывая эту процедуру многократно, можно получить сколь угодно точные оценки оптимального значения λ в задаче 2 и найти приближенные решения этой задачи.

А к задаче 2 могут быть сведены многое другие варианты постановок. Для примера рассмотрим следующую (здесь удобно вновь вернуться к рассмотрению неантагонистического случая).

Задача 3. Задано положительное число π. Найти нормальное топологическое пространство W и непрерывную функцию $P{:}V\to W$ такие, чтобы величина $R(\Gamma_P)-\pi\dim W$ была максимальной.

Эта постановка имеет прозрачную экономическую интерпретацию. В самом деле, если величина $R(\Gamma_P)$ имеет смысл дохода, а за получение информации приходится платить, то $R(\Gamma_P)-\pi\dim W$ будет прибылью, если за каждое купленное число платится сумма π.

Задача 3 легко сводится к задаче 2. Последовательно перебирая значения m и решая соответствующие задачи 2, можно найти решение задачи 3. При этом достаточно рассмотреть значения m, удовлетворяющие неравенству $m \le (R(\Gamma_2) - R(\Gamma))/\pi$.

В этих рассуждениях использовалось по сути лишь то обстоятельство, что параметр m принимает лишь натуральные значения. Поэтому они без труда переносятся на многие другие случаи.

Разумеется, такие способы редукции не слишком конструктивны. Однако они позволяют выяснить некоторые качественные особенности решений рассматриваемых задач. В частности, можно понять, что решения следует искать среди симплициальных комплексов и отображений весьма специального и достаточно простого вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. *Келдыш Л. В.* Топологические вложения в евклидово пространство // Труды математич. ин-та АН СССР. 1966. Т. 81.
4. *Алиев В.С.*, *Кононенко А. Ф.* Об агрегировании в динамических играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 8. С. 1245–1259.
5. *Алиев В*. С., *Кононенко А. Ф.* Некоторые вопросы принятия решений в играх двух лиц при агрегированной информации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1163–1173.
6. *Горелов М. А*. Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ.2003.Т. 43.№ 3. С.376 – 387.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
8. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.