Иерархическая игра со случайными ошибками при передаче информации

М.А. Горелов
Вычислительный центр РАН

Будем рассматривать игру двух лиц $\Gamma = \langle U, V, g, h \rangle$, где U и V – компактные метрические пространства, а g и h – непрерывные функции из $U \times V$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$. Элементы множеств U и V интерпретируются как управления первого и второго игроков. Их интересы описываются стремлением к максимизации значений функций g и h соответственно.

Будем считать, что первый игрок до принятия окончательного решения о выборе своего управления может задать n вопросов допускающих ответы типа «да» и «нет» и получить на них ответы. Предположим, ответ на каждый вопрос может быть с вероятностью p искажен при передаче информации. Игрок 1 первым выбирает список вопросов и варианты своих действий при всех возможных ответах и сообщает эту информацию противнику.

В этих условиях второй игрок принимает решение в условиях риска. Будем считать, что он ориентируется на математическое ожидание своего выигрыша, и это известно игроку 1. В таком случае первый игрок может оценить множество рациональных ответов противника. И тогда его выбор происходит в условиях неопределенности выбора противника и неизвестных реализаций случайных ошибок. Будем считать, что он осторожен по отношению к неопределенности первого типа и ориентируется на математическое ожидание по случайным ошибкам.

Эта ситуация формально описывается следующим образом.

Список вопросов отождествим с функцией $P : V \to \{0,1\}^n$, и пусть выбор управлений задается отображением $u_* : \{0,1\}^n \to V$.

Пусть $B(u_*, P) = \left\{ v \in V : \tilde{h}(u_*, P, v) \geq \sup\limits_{w \in V} \tilde{h}(u_*, P, w) - \delta(u_*, P) \right\}$ – множество его рациональных откликов игрока 2 на стратегию (u_*, P), где $\delta(u_*, P) = 0$, если верхняя грань в определении

$B\left(u_*,P\right)$ достигается и $\delta\left(u_*,P\right)=\kappa$ в противном случае (здесь $\tilde{h}(u_*,P,v)=\sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))}h(u_*(r),v)$, κ – заданное положительное число, а χ – расстояние Хэмминга).

Максимальный гарантированный результат первого игрока будет равен $R=\sup_{(u_*,P)}\inf_{v\in B(u_*,P)}\sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))}g(u_*(r),v)$.

Лемма. Для любой стратегии $\left(w_*,Q\right)$ найдется такая стратегия $\left(u_*,P\right)$, что верхняя грань $\sup_{w\in V}\tilde{h}(u_*,P,w)$ достигается и

$$\inf_{v\in B^p(u_*,P)}\sum_{r\in N} p^{\chi(r,P(v))}(1-p)^{n-\chi(r,P(v))}g(u_*(r),v)\geq$$
$$\geq\inf_{v\in B^p(w_*,Q)}\sum_{r\in N} p^{\chi(r,Q(v))}(1-p)^{n-\chi(r,Q(v))}g(w_*(r),v).$$

Данная лемма играет ключевую роль при доказательстве следующего утверждения.

Теорема. Обозначим $m=2^n$,

$$\Phi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)=\sum_{b\in N} p^{\chi(r,b)}(1-p)^{n-\chi(r,b)}g(u^b,v),$$

$$\Psi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)=\sum_{b\in N} p^{\chi(r,b)}(1-p)^{n-\chi(r,b)}h(u^b,v)).$$

Максимальный гарантированный результат R первого игрока является решением уравнения

$$\sup_{u^0\in U}\sup_{u^1\in U}\dots\sup_{u^{m-1}\in U}\sup_{\lambda\in\mathbb{R}}\min$$
$$\Big\{\sup_{v\in V}\max_{r\in N}\min\Big[\Psi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)-\lambda,\ \Phi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)-\gamma\Big],$$
$$\inf_{v\in V}\max_{r\in N}\max\Big[\min\Big(\Psi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)-\lambda),\Phi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)-\gamma\Big),$$
$$\Big(\lambda-\Psi(p,r,u^0,u^1,...,u^{m-1},v)\Big)\Big]\Big\}=0,$$

Зная решение этого уравнения уже несложно найти оптимальную стратегию первого игрока.