Теоретико-множественная постановка задачи синтеза рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц[1]

М. А. Горелов
(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)
email: griefer@ccas.ru

Поступила в редакцию 27.03.02 г.
Исправленный вариант 22.05.02 г.

Исследуются две задачи синтеза рациональных способов обмена информацией в простейшей двухуровневой игре. Рациональность оценивается по двум критериям: максимальному гарантированному результату центра и сложности способа обмена информацией, которая характеризуется мощностью множества возможных сообщений. Библ. 3.

Введение

Данная статья является продолжением работы [1], в которой приведены содержательная мотивировка рассматриваемых задач и краткая история вопроса.

Рассмотрим иерархическую систему, состоящую из двух элементов: центра и элемента нижнего уровня. Известно, что квазиинформационное расширение Ю. Б. Гермейера Γ_2 является оптимальным в том смысле, что максимальный гарантированный результат центра в любом другом квазиинформационном расширении не превосходит результата, который может обеспечить себе центр в игре Γ_2 (см. [2]). Однако при этом, возможно, придется передавать слишком большие объемы информации. Возникает желание учесть это обстоятельство.

Будем оценивать квазиинформационное расширение по двум критериям: качеству управления системой и объему передаваемой информации. Качество управления, как и в [1], количественно оценим с помощью максимального гарантированного результата центра в соответствующей игре. Второй критерий формализуем иначе, чем в [1]. Считаем, что квазиинформационное расширение задается отображением P, ставящим в соответствие выбранному игроком нижнего уровня управлению v сообщение w из некоторого множества W. Мощностью множества W будем оценивать объем передаваемой информации. (Заметим, что множество W отражает синтаксический аспект, а отображение P отвечает за семантику.)

При наличии двух критериев оптимальность квазиинформационных расширений можно определять по-разному. Ниже рассмотрено два варианта, которые кажутся наиболее естественными:

1) при нижнем ограничении на качество управления системой минимизируется объем передаваемой информации;

2) при верхнем ограничении на объем передаваемой информации максимизируется качество управления системой.

1. Постановки задач

Перейдем к точным определениям. Пусть задана игра $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$. Будем считать U и V компактными топологическими пространствами, а функции g и h - непрерывными.

Зададим произвольное множество W и выберем какую-нибудь функцию $P{:}V\to W$. Определим квазиинформационное расширение $\Gamma_P=\langle U_P,V_P,g_P,h_P\rangle$ следующим образом. Пусть $V_P=V$, $U_P=\Phi(W,U)$ (здесь и далее $\Phi(X,Y)$ обозначает множество всех функций из X в Y).

[1] Работа выполнена при финнасовой поддержке РФФИ (код проекта 99–01–00791).

Функции g_P и h_P , отображающие $U_P \times V_P$ в множество действительных чисел **R** определим условиями

$$g_P(u_P,v_P)=g(u_P(P(v_P)),v_P), \quad h_P(u_P,v_P)=h(u_P(P(v_P)),v_P).$$

Положим $\pi_P(u_P,v_P)=(u_P(P(v_P)),v_P)$. Пусть c_P ставит в соответствие элементу $u \in U$ функцию $u_P: W \to U$, тождественно равную u, $d_P: V \to V_P = V$ - тождественное отображение. Непосредственно проверяется, что $<\Gamma_P, \pi_P, c_P, d_P>$ - квазиинформационное расширение игры Г (см. [2]).

В случае, когда $W=V$, а P - тождественное отображение, получим стандартное квазиинформационное расширение $<\Gamma_2, \pi, c, d>$, где $\Gamma_2 = <U_2, V_2, g_2, h_2>$. Непосредственно проверяется, что Γ_2 можно рассматривать как квазиинформационное расширение игры Γ_P для любой функции P.

Для игры Γ_P стандартным образом (см., например, [2], [3]) определим множество $B(u_P)$ рациональных ответов второго игрока на стратегию u_P и максимальный гарантированный результат первого игрока $R(\Gamma_P)$. Фиксируем произвольное положительное число α. Положим

$$B(u_P) = \{v_P \in V_P : h_P(u_P, v_P) = \max_{v \in V} h_P(u_P, v)\},$$

если верхняя грань $\sup\limits_{v \in V} h_P(u_P, v)$ достигается, и

$$B(u_P) = \{v_P \in V_P : h_P(u_P, v_P) > \sup_{v \in V} h_P(u_P, v) - \alpha\}$$

в противном случае. Пусть

$$R(\Gamma_P) = \sup_{u_P \in U_P} \inf_{v_P \in B(u_P)} g_P(u_P, v_P).$$

Нетрудно видеть, что построенное выше квазиинформационное расширение Γ_P удовлетворяет следующему условию свободы выбора: для любой стратегии $u_* \in U_*$ и любой функции $\varphi: U \to U$ существует стратегия $w_* \in U_*$ такая, что для любого $v_* \in V_*$ выполняется равенство

$$(\varphi(p(\pi(u_*,v_*))),v_*)=\pi(w_*,v_*),$$

где p обозначает проекцию декартова произведения множеств U и V на первый сомножитель.

Обратно, в [1] было показано, что если игра Γ_* является квазиинформационным расширением игры Г, причем оно удовлетворяет условию свободы выбора, и, кроме того, игра Γ_2 является квазиинформационным расширением игры Γ_*, то игра Γ_* изоморфна игре Γ_P при некотором P.

Сказанное дает нам основание ограничиться рассмотрением только таких расширений Γ_P, которые получаются описанным выше способом. В таком случае можно охарактеризовать сложность квазиинформационного расширения Γ_P сложностью функции P или множества W. Если множество W не наделено никакой дополнительной структурой и, соответственно, функция P абсолютно произвольна, то можно говорить, пожалуй, только об одной характеристике их сложности – мощности множества W. Соответственно мы приходим к постановке двух задач.

Задача 1. Задано число γ. Требуется найти множество наименьшей мощности W и функцию $P: V \to W$ такие, чтобы соответствующее квазиинформационное расширение Γ_P удовлетворяло условию $R(\Gamma_P) \geq \gamma$.

Задача 2. Задана мощность m. Требуется найти множество W, мощность которого не превосходит m, и функцию $P: V \to W$ такие, чтобы величина $R(\Gamma_P)$ была максимальной.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

$$L = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u, v),$$

$$E = \{v \in V: \min_{u \in U} h(u,v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u,v)\},$$

$$D=\{(u,v) \in U \times V: h(u,v)>L\},$$

$$K = \sup_{(u,v) \in D} g(u,v), \tag{1.1}$$

$$M = \min_{v \in E} \max_{u \in U} g(u,v).$$

Известно (см., например, [3]), что максимальный гарантированный результат $R(\Gamma_2)$ в игре Γ_2 равен наибольшему из чисел K и M. Этот результат достигается тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

1) $K \leq M$,

2) верхняя грань в определении (1.1) величины K достигается.

2. Решение задачи 1 в регулярном случае

Здесь и ниже рассмотрим лишь такие игры Γ, для которых $K>M$ (такие игры называют регулярными).

В силу теоремы о монотонной зависимости максимального гарантированного результата от объема передаваемой информации (см. [2]) имеем $R(\Gamma_P) \leq R(\Gamma_2)$, для любого множества W и любой функции P. Следовательно, если $\gamma>K = R(\Gamma_2)$ или $\gamma=K$, но верхняя грань в (1.1) не достигается, то задача (I) решения не имеет.

Остается рассмотреть случай, когда $\gamma<K$ или $\gamma=K$ и верхняя грань в (1.1) достигается. Покажем, что в этом случае задача 1 имеет решение, причем соответствующее множество W конечно.

При сделанных предположениях о величине γ множество

$$\{(u,v,): h(u,v)>L,\ g(u,v) \geq \gamma\}$$

непусто. Пусть (u_0,v_0) - любая точка этого множества и $H=h(u_0,v_0)$. Очевидно $H>L$.

Рассмотрим множества

$$O(u)=\{v \in V: h(u,v)<H\}.$$

Так как функция h непрерывна, то все множества $O(u)$ являются открытыми.

Пусть v - любой элемент множества V, и в точке u_1 реализуется минимум

$$\min_{u \in U} h(u,v).$$

Тогда

$$h(u_1,v) = \min_{u \in U} h(u,v) \leq \max_{v \in V} \min_{u \in U} h(u,v) = L < H.$$

Следовательно, $v \in O(u_1)$. Так как v - произвольная точка множества V, совокупность открытых множеств $O(u)$ покрывает пространство V.

Поскольку V компактно, то из его открытого покрытия множествами $O(u)$ можно выбрать конечное подпокрытие $O(u_1),\ldots,O(u_m)$.

Положим $W=\{0,1,\ldots,m\}$. Пусть P – произвольная функция из V в W, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $P^{-1}(0)=v_0$,

б) $P^{-1}(i) \subset O(u_i)$ для $i=1,2,\ldots,m$.

Покажем, что для этого квазиинформационного расширения Γ_P выполняется условие $R(\Gamma_P) \geq \gamma$. Рассмотрим стратегию $u_P \in U_P=\Phi(W,U)$, определенную условием $u_P(i)=u_i$. Множество

$$B(u_P) = \{v \in V: h_P(u_P,v) = \max_{v' \in V} h_p(u_p,v)\}$$

рациональных ответов второго игрока на эту стратегию состоит из одной точки v_0. В самом деле,

$$h_P(u_P,v_0)=h(u_P(P(v_0)),v_0)=h(u_P(0),v_0)=h(u_0,v_0)=H$$

в силу условия а). С другой стороны, для $v\neq v_0$ имеем

$$h_P(u_P,v)=h_P(u_P(P(v)),v)<H$$

в силу условия б) и определения множеств $O(u)$.

Таким образом, $B(u_P)=\{v_0\}$. Следовательно,

$$\inf_{v\in B(u_P)} g_P(u_p,v)=g_P(u_P,v_0)=g(u_0,v_0)\geq\gamma$$

и тем более

$$R(\Gamma_P)=\sup_{u_P\in U_P}\inf_{v_P\in B(u_P)} g_P(u_P,v_P)\geq\gamma.$$

Построенное конечное множество W и функция $P:V\rightarrow W$ такие, что $R(\Gamma_P)\geq\gamma$. В оптимальном квазиинформационном расширении мощность множества W не больше, чем в расширении, построенном нами. Решение задачи 1 заведомо существует, поскольку в любом непустом множестве натуральных чисел существует наименьшее.

3. Решение задачи 2

Из сказанного выше следует, что основной интерес представляет случай конечной мощности m, который мы и рассматрим.

Не ограничивая общности, можно считать, что $W=\{0,1,...,m\}$, где m может принимать значения $0,1,...$. Требуется найти отображение $P:V\rightarrow W$, для которого значение $R(\Gamma_P)$ максимально (P не обязательно отображает V на все множество W).

Случай $m=0$ тривиален. Для него существует всего одно отображение $P:V\rightarrow W,$ и соответствующий максимальный гарантированный результат равен (см. [3])

$$R(\Gamma_1)=\sup_{u\in U}\min_{v\in G(u)} g(u,v),$$

где

$$G(u)=\{v\in V: h(u,v)=\max_{v\in V} h(u,v)\}.$$

Пусть

$$\gamma=\sup_{P\in\Phi(V,W)}\sup_{u_*\in\Phi(W,U)}\inf_{v\in B(u_*)} g_P(u_*,v) \tag{3.1}$$

есть оптимальное значение критерия в задаче 2.

Зафиксируем элементы $u_0,...,u_m$ множества U и пусть $U_m(u_0,...,u_m)=\{u_0,...,u_m\}$. Рассмотрим игру

$$\Gamma(u_0,u_1,...,u_m)=<U_m(u_0,u_1,...,u_m),V,g_m,h_m>,$$

где g_m и h_m - сужения функций g и h соответственно на множество $U_m(u_0,...,u_m)\times V$.

Пусть $\gamma_m(u_0,...,u_m)$ - максимальный гарантированный результат первого игрока в стандартном квазиинформационном расширении $\Gamma_2(u_0,...,u_m)$ игры $\Gamma(u_0,...,u_m)$, а стратегия $u_m:V\rightarrow U_m(u_0,...,u_m)$ позволяет гарантировано получить, быть может с ε-точностью, этот результат. Определим функцию $P:V\rightarrow W$ условием: $P(v)=i$ тогда и только тогда, когда $u_m(v)=u_i$. Положим $u_*(i)=u_i$. Очевидно, что стратегия u_* позволяет гарантированно получить в игре Γ_P такой же результат, какой гарантирует в игре $\Gamma_2(u_0,...,u_m)$ стратегия u_m. Поэтому

$$\gamma\geq\sup_{(u_0,u_1,...,u_m)\in U^{m+1}}\gamma_m(u_0,...,u_m).$$

Обратно, пусть функция P и стратегия u_* реализуют, быть может, с ε-точностью, верхнюю грань в определении величины γ (3.1). Композицию $u_* \circ P$ можно рассматривать, как одну из стратегий в игре $\Gamma_2(u_0,u_1,...,u_m)$, где $u_i=u_*(i)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что множество $B_P(u_*)$ совпадает с множеством рациональных ответов второго игрока на стратегию $u_* \circ P$ в игре $\Gamma_2(u_0,...,u_m)$. Поэтому

$$\inf_{v\in B_P(u_*)} g_P(u_*,v) \le \gamma_m(u_0,...,u_m).$$

В силу выбора функции P и стратегии u_* имеем отсюда

$$\gamma \le \sup_{(u_0,...,u_m)\in U^{m+1}} \gamma_m(u_0,...,u_m).$$

Таким образом,

$$\gamma = \sup_{(u_0,...,u_m)\in U^{m+1}} \gamma_m(u_0,...,u_m).$$

Но решение игры Γ_2 известно (см.,[3]), следовательно, величины $\gamma_m(u_0,...,u_m)$ мы находить умеем. Поэтому задачу 2 можно считать решенной.

Как следствие получаем алгоритм решения задачи 1. Начнем с $m=0$ и, постепенно увеличивая m, вычисляем оптимальное значение критерия в задаче 2. В силу результатов из разд. 2, если задача 1 вообще имеет решение, то через конечное число шагов оптимальное значение критерия в задаче 2 превысит нужную нам величину, что и дает решение задачи 1. Если решения задачи 1 нет, то алгоритм может работать до бесконечности, но результаты разд. 2 позволяют заранее установить наличие решения, решив игру Γ_2.

4. Сравнение теоретико-множественной и категорной постановок

Задачи данной работы и статьи [1] отличаются лишь способом оценки сложности квазиинформационных расширений, поэтому интересно сопоставить найденные решения. Для определенности будем говорить о задаче 1. Задача 2 рассматривается аналогично.

Решение задачи 1 и решения задач, поставленных в начале статьи [1] заведомо не совпадают, поскольку первое, очевидно, удовлетворяет условию свободы выбора, а последние – заведомо нет (как показано в [1]). Гораздо интереснее сравнить решение задачи 1 и задачи, поставленной в разд. 8 статьи [1]. Мы ограничимся рассмотрением регулярных игр.

Напомним, что в разд. 8 статьи [1] для заданного числа γ мы искали такую игру $\Gamma_*=\langle U_*,V_*,g_*,h_*\rangle$ чтобы выполнялось следующее

1) Γ_* является квазиинформационным расширением игры Γ;

2) это квазиинформационное расширение удовлетворяет условию свободы выбора (см. пункт 1 выше).

3) выполнено неравенство $R(\Gamma_*)\ge\gamma$;

4) игра Γ_* не является нетривиальным квазиинформационным расширением никакой другой игры, удовлетворяющей трем предыдущим условиям.

Такую задачу ниже будем называть категорной.

Покажем, что всякое решение задачи 1 является также и решением категорной задачи.

Пусть Γ_P – решение задачи 1 ($P{:}V\to W$), а $\langle\Gamma_\#,\pi_\#,c_\#,d_\#\rangle$ – такое квазиинформационное расширение игры Γ, что выполняются условие свободы выбора, неравенство $R(\Gamma_\#)\ge\gamma$, а также $\langle\Gamma_P,\pi_{\#P},c_{\#P},d_{\#P}\rangle$ является квазиинформационным расширением игры $\Gamma_\#$. Нам нужно доказать, что игра $\Gamma_\#$ в свою очередь является квазиинформационным расширением игры Γ_P.

Пусть p – проекция декартова произведения $U\times V$ на первый сомножитель. Будем говорить, что две стратегии v и v' второго игрока в игре $\Gamma_\#$ эквивалентны, если для любой стратегии первого игрока в той же игре выполняется равенство

$$p(\pi_{\#}(u_{\#},v))=p(\pi(u_{\#},v')).$$

Обозначим через Ω множество всех классов эквивалентности, а T – каноническую проекцию V в Ω. В [1] показано, что $\Gamma_{\#}$ изоморфна Γ_T.

Так как Γ_P – квазиинформационное расширение игры $\Gamma_{\#}$, то любые две стратегии v и v', для которых $P(V)=P(v')$, являются эквивалентными. Поэтому существует единственное отображение $f{:}W\to\Omega$ такое, что $T=f\circ P$. Так как Γ_P – квазиинформационное расширение игры $\Gamma_{\#}$, отображение f сюръективно. Игру Γ считаем регулярной, поэтому множество W конечно. А так как Γ_P – решение задачи 1, то мощность множества Ω не меньше мощности множества W. Следовательно, отображение f инъективно, и игра Γ_P изоморфна игре Γ_T, а значит, и $\Gamma_{\#}$, что и требовалось доказать.

Как следствие мы получаем метод построения некоторых решений категорной задачи, исследование которой в [1] не было доведено до конца.

Решения категорной задачи, вообще говоря, не являются решениями задачи 1.

Пример 1. Пусть $U=\{0,1,2,3,4,5\}$; $V=\{0,1,2,3,4,5,6\}$;
$g(0,0)=1$, $g(u,v)=0$ во всех остальных случаях;
$h(0,0)=1$, $h(0,v)=0$ для остальных v,
$h(1,1)=h(1,4)=0$, $h(1,0)=h(1,2)=h(1,3)=h(1,5)=h(1,6)=2$,
$h(2,2)=h(2,5)=0$, $h(2,0)=h(2,1)=h(2,3)=h(2,4)=h(2,6)=2$,
$h(3,3)=h(3,6)=0$, $h(3,0)=h(3,1)=h(3,2)=h(2,4)=h(3,5)=2$,
$h(4,1)=h(4,2)=h(4,3)=0$, $h(4,0)=h(4,4)=h(4,5)=h(4,6) =2$,
$h(4,4)=h(4,5)=h(4,6)=0$, $h(4,0)=h(4,1)=h(4,2)=h(4,3) =2$.

Положим $\Omega=\{0,1,2,3\}$ и определим отображение $T{:}V\to\Omega$ условием
$T(0)=0$, $T(1)=T(4)=1$, $T(2)=T(5)=2$, $T(3)=T(6)=3$.

Непосредственно проверяется, что игра Γ_T является решением категорной задачи при$\gamma=1$.

Решение задачи 1 дает множество $W=\{0,1,2\}$ и отображение P, определенное условием
$P(0)=0$, $P(1)=P(2)=P(3)=1$, $P(4)=P(5)=P(6)=2$.

5. Сложность найденных решений

Решение задачи об агрегировании информации в теоретико-множественной постановке в одном отношении выглядит предельно просто: множество возможных сообщений W конечно. Это, кстати, довольно серьезный аргумент в пользу этой постановки. В самом деле, на практике происходит обмен текстами, причем ограниченной длины, а их число конечно.

Эта постановка могла бы быть серьезно дискредитирована, если бы оказалось, что агрегирующее отображение P устроено слишком сложно. Уже из рассуждений разд. 2 видно, что это не так: отображение P устроено достаточно просто, если функция h выглядит не слишком вычурно. Покажем, что если, оставаясь в пределах класса конечных множеств W, не стремиться к минимизации количества элементов множества W, то на сложность функции P можно без потерь накладывать достаточно жесткие ограничения.

Будем считать, что множество V вложено в конечномерное евклидово пространство $\mathbf{R}^n$. Разобьем пространство на кубы с ребром, меньшим ε. Покажем, что если ε достаточно мало, то отображение P можно выбрать так, что оно будет постоянным на каждом из кубов разбиения.

Для определенности будем рассматривать задачу 1. Пусть (u_o,v_0) - такая пара, что

$$h(u_0,v_0)>L, \quad g(u_0,v_0)\geq\gamma.$$

Выберем конечное покрытие $O(u_1),\ldots,O(u_m)$ пространства V открытыми множествами вида

$$O(u_i)=\{v\in V{:}\ h(u_i,v)<h(u_0,v_0)\},\ i=1,2,\ldots,m.$$

Разобьем пространство $\mathbf{R}^n$ на кубы с ребром 1 вида

$$Q=\{(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbf{R}^n{:}\ k^i\leq x^i<k^i+1\},$$

где k^i, i=1,2,...,n, - целые числа. Если для каждого из кубов разбиения Q пересечение QI V целиком содержится хотя бы в одном множестве $O(u_i)$, то задачу можно считать решенной, так как можно положить $P(v)=i$, если $v\in Q$, а QI $V\subset O(u_i)$.

Если же хотя бы один из кубов разбиения не содержится целиком в одном из множеств $O(u_i)$, то заменим исходное разбиение разбиением на вдвое меньшие кубы. Будем проводить такое измельчение разбиений пространства $\mathbf{R}^n$ до тех пор, пока не окажется, что для каждого куба Q разбиения пересечение QI V целиком содержится в одном из множеств $O(u_i)$. Докажем, что этого можно добиться за конечное число шагов.

Допустим противное. Тогда найдется бесконечная последовательность $Q_1,Q_2,...$ вложенных друг в друга кубов вида

$$Q_i = \{(x_i^1,\dots,x_i^n) \in \mathbf{R}^n : k_i^j \le x_i^j < k_i^j + 2^{-i}, j = 1,\dots,n\}.$$

Пусть $k_0^j = \lim\limits_{i\to\infty} k_i^j$. Точка k_0 с координатами $(k_0^1,\dots,k_0^n)$ принадлежит всем кубам из этой последовательности. Пусть она принадлежит множеству $O(u_i)$ и δ - расстояние от точки k_0 до множества $V\backslash O(u_i)$. Так как множество $O(u_i)$ открыто, то $\delta>0$. Но тогда все кубы Q_i с диагональю, меньшей δ, принадлежат $O(u_i)$, что противоречит предположению. Доказательство закончено.

Сложность функции P можно ограничивать и другими способами. Предположим, например, что V - метрическое пространство с метрикой ρ. Зададим в нем конечное множество $\{v_1,...,v_m\}$ и разобьем V на множества вида

$$O(v_i)=\{v\in V: \rho(v,v_i)\le \rho(v,v_j),\ j\ne i\}.$$

Потребуем, чтобы отображение P было постоянным на внутренности каждого из таких множеств. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что задача 1 разрешима и на таком классе функций P.

6. Оценка эффективности найденных решений

В конце разд. 3 предложен итеративный алгоритм решения задачи 1 и доказано, что если эта задача имеет решение, то этот алгоритм закончит работу за конечное число шагов. здесь приведем весьма грубую явную оценку этого числа шагов.

Пусть U - метрическое пространство с метрикой ρ, а функция $h(u,v)$ липшицева по u с константой Λ, т. е.

$$|h(u_1,v)-h(u_2,v)|\le \Lambda\rho(u_1,u_2)$$

для любых $u_1,u_2\in U$, $v\in V$.

Введем две величины, характеризующие “массивность” множества U. Подмножество множества U назовем его ε-сетью, если для любой точки $u\in U$ найдется точка из этого подмножества, удаленная от u на расстояние не превосходящее ε. Обозначим через N_ε минимальное число точек ε-сети множества U. Подмножество множества U назовем ε-различимым, если любые две его различные точки лежат на расстоянии, большем ε. Максимальное число точек в ε-различимом подмножестве множества U обозначим через $M_\varepsilon(U)$. Так как пространство U компактно, то числа $N_\varepsilon(U)$ и $M_\varepsilon(U)$ определены корректно.

Так как рассматриваемая нами игра регулярна, а задача 1 имеет решение, то существует точка $(u_0,v_0)\in U\times V$ такая, что

$$g(u_0,v_0)\ge\gamma,\quad h(u_0,v_0)>L.$$

Пусть H - любое число, меньшее, чем $h(u_0,v_0)-L$. Величина H характеризует степень неантагонистичности конфликта. Положим $\varepsilon=H/\Lambda$.

Выберем минимальную ε-сеть U_0 в множестве U. Ее мощность равна $N_\varepsilon(U)$. Покажем, что

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U_0} h(u,v) < h(u_0,v_0). \qquad (6.1)$$

В самом деле, пусть v - любой элемент множества V, а u_* реализует $\min\limits_{u\in U} h(u,v).$ Выберем точку $u_+\in U_0$, находящуюся от u_* на расстоянии, не превосходящем ε. Тогда

$$h(u_+,v) \le h(u_*,v) + \Lambda\varepsilon = \min_{u\in U} h(u,v) + H \le$$

$$\le \max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v) + H = L + H < h(u_0,v_0).$$

Тем более

$$\min_{u\in U_0} h(u,v) < h(u_0,v_0),$$

а в силу произвольности v отсюда следует неравенство (6.1).

Положим $W = U_0 \cup \{u_0\}$. Пусть функция $P\colon U\to W$ ставит в соответствие точке u, отличной от u_0, каую-то точку ε-сети, лежащую от u на расстоянии не большем ε, и точку u_0 в соответствие точке u_0. Определим функцию u_* условием

$$u_*(v) = \begin{cases} u_0, v = v_0, \\ \arg\min\limits_{u\in W} h(u,v), v \ne v_0. \end{cases}$$

В игре Γ_P стратегия u_* гарантирует первому игроку выигрыш $g(u_0,v_0)$. В самом деле, в силу неравенства (6.1), второй игрок получает выигрыш, меньший $h(u_0,v_0)$, если выберет стратегию v, отличную от v_0. Поэтому множество его рациональных ответов на стратегию u_* состоит из одной точки v_0.

Итак, мы построили множество W мощности, не большей $N_\varepsilon(U)+1$, и агрегирующую функцию P такие, что $R(\Gamma_P)\ge\gamma$. Поэтому в решении задачи 1 множество W содержит не более $N_\varepsilon(U)+1$ точек.

Развивая эту идею, можно предложить следующий эвристический алгоритм решения задачи 1.

Выберем точку (u_1,v_1), реализующую

$$\min_{(u,v)\in U\times V} h(u,v).$$

Если

$$\max_{v\in V} h(u_1,v) < h(u_0,v_0), \qquad (6.2)$$

то положим

$$P(v) = \begin{cases} 0, v = v_0 \\ 1, v \ne v_0, \end{cases} \quad u_*(0)=u_0, \quad u_*(1)=u_1.$$

Стратегия u_* гарантирует первому игроку выигрыш $h(u_0,v_0)$в игре Γ_P, поэтому эту игру можно считать приближенным решением задачи 1.

Если неравенство (6.2) не выполняется, то выберем точку (u_2,v_2), реализующую минимум функции $h(u,v)$ на множестве

$$U\times\{v\in V\colon h(u_1,v)\ge h(u_0,v_0)\}.$$

Если выполняется неравенство

$$\max_{v\in V}\min_{i=1,2} h(u_i,v) < h(u_0,v_0),$$

то получаем решение задачи 1, в противном случае продолжаем процедуру, добавляя точку, реализующую минимум $h(u,v)$ на множестве

$$U\times\{v\in V\colon h(u_1,v)\geq h(u_0,v_0),\ h(u_2,v)\geq h(u_0,v_0)\}.$$

Очевидно, что

$$h(u_i,v_i)=\min_{v\in V'}\min_{u\in U}h(u,v)\leq\max_{v\in V'}\min_{u\in U}h(u,v)\leq\max_{v\in V}\min_{u\in U}h(u,v)=L$$

(здесь $V'\subset V$ - соответствующее множество).

При $j<i$ выполняется неравенство $h(u_j,v_i)\ \geq h(u_0,v_0)$ (в силу выбора точки v_i). Поэтому расстояние между точками u_i и u_j больше $\varepsilon=H/\Lambda$.

Следовательно, множество точек $u_1,u_2,...$ ε-различимо, а потому содержит не более $M_\varepsilon(U)$ элементов. Значит, описанная процедура приводит к приближенному решению не позднее $M_\varepsilon(U)$ шагов.

Можно показать, что найденное таким образом решение сильно отличается от точного решения задачи 1 лишь для достаточно экзотических игр Г.

7. Типичность регулярных игр

Выше были рассмотрены лишь такие игры Г, для которых $K>M$. Формально игры Г, для которых $K\leq M$, заслуживают такого же внимания. Покажем, что в некотором смысле почти все игры регулярны. Этим обстоятельством и было обусловлено решение уделить основное внимание исследованию регулярных игр.

Фиксируем метрические пространства (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y). Предположим, что X не содержит изолированных точек. Будем рассматривать такие игры $\Gamma=\langle U,V,g,h\rangle$, для которых U и V - компактные подмножества пространств X и Y соответственно, а функции g и h отображающие $U\times V$ в $\mathbf{R}$ непрерывны.

Зададим на множестве $X\times Y\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ метрику ρ условием

$$\rho((x,y,g,h);(x',y',g',h'))=\max\{\rho_X(x,x'),\rho_Y(y,y'),|g-g'|,|h-h'|\}.$$

Поставим в соответствие игре Г множество

$$\{(u,v,g,h)\in X\times Y\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\colon u\in U,\ v\in V,\ g=g(u,v),\ h=h(u,v)\}.$$

В силу компактности множеств U и V и непрерывности функций g и h это множество компактно в топологии, порожденной метрикой ρ.

Пусть заданы две игры Г и Г′. Определим расстояние $\mu(\Gamma,\Gamma')$, положив его равным расстоянию Хаусдорфа между соответствующими множествами в $X\times Y\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Таким образом, рассматриваемый нами класс игр превращается в метрическое пространство. Покажем, что множество регулярных игр содержит открытое всюду плотное подмножество этого пространства. (Отметим, что само множество регулярных игр не является открытым.)

Определим величину

$$N=\max_{v\in E}\max_{u\in U}g(u,v).$$

Рассмотрим множество игр, для которых $K>N$. Очевидно, что $N\geq M$, поэтому это множество содержится в множестве регулярных игр. Покажем, что оно открыто и всюду плотно в пространстве всех рассматриваемых игр.

Доказательство того, что это множество открыто, сводится к непосредственной проверке следующих утверждений.

1. Функции $\min\limits_{u\in U}h(u,v),\max\limits_{u\in U}g(u,v)$ непрерывно зависят как от $v\in V$, так и от Г.
2. Величина L непрерывно зависит от Г.

3. Зависимость величины K от Г полунепрерывна снизу (доказательство этого факта опирается на утверждение 2 и то обстоятельство, что множество D задается строгим неравенством).

4. Точечно-множественное отображение, ставящее в соответствие игре Г множество E, полунепрерывно сверху (если $v \notin E$, то $\varepsilon = L - \min\limits_{u \in U} h(u,v) > 0$ и, следовательно, для игр, находящихся от Г на расстоянии, меньшем $\varepsilon/2$, v не принадлежит соответствующему множеству E).

5. Зависимости величины N от Г полунепрерывна сверху (сразу следует из утверждения 4).

Докажем, что множество тех игр, для которых $K>N$, всюду плотно в пространстве всех игр. Пусть игра Г такова, что $K \le N$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Построим игру Г′, принадлежащую интересующему нас множеству и находящуюся от игры Г на расстоянии, не превышающем ε.

Начнем с игры Г и за четыре шага изменим ее так, что для полученной игры будет справедливо неравенство $K>N$.

Пусть $u_0 \in U$, $v_0 \in E$ и

$$g(u_0, v_0) = \max_{v \in E} \max_{u \in U} g(u,v).$$

Шаг 1. Если точка u_0 - изолированная точка множества U, то выберем окрестность O точки u_0 такую, что ее диаметр не превосходит ε, и $O \cap U = \{u_0\}$. Заменим множество U на замыкание множества $U \cup O$ и доопределим функции g и h, положив $g(u,v)=g(u_0,v)$, и $h(u,v)=h(u_0,v)$ во всех точках, где эти функции не были определены. Если u_0 - не изолированная точка множества U, то игру Г изменять не будем.

В результате этой модификации величины L,K,M,N и множества D и E существенно не изменятся. Но в полученной игре точка u_0 уже не будет изолированной точкой множества U.

Шаг 2. Пусть $\chi: U \times V \to \mathbf{R}$ - непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $0 \le \chi(u,v) \le 1$ для всех $(u,v) \in U \times V$;

2) $\chi(u,v)=0$ для всех $(u,v) \in \{(u,v) \in U \times V \colon g(u,v) \le g(u_0,v_0)\}$;

3) $\chi(u,v)=1$ для всех $(u,v) \in \{(u,v) \in U \times V \colon g(u,v) \ge g(u_0,v_0)+\varepsilon/4\}$ (такая функция существует в силу леммы Урысона, поскольку соответствующие множества замкнуты).

Заменим функцию h функцией

$$(h(u,v)-\varepsilon)\chi(u,v)+h(u,v)(1-\chi(u,v)).$$

В силу выбора точки (u_0,v_0) и условия $K \le N$ величины L,K,M,N и множества D и E при этом снова не изменятся. Поскольку в старой игре из условия $g(u,v) \ge g(u_0,v_0)$ следовало условие $h(u,v) \le L$, то в новой игре из условия $g(u,v) \ge g(u_0,v_0)+\varepsilon/4$ будет следовать $h(u,v) \le L-\varepsilon$.

Шаг 3. Еще раз поправим функцию h так, чтобы выполнялось следующее

1) в точке (u_0,v_0) и на множестве $\{(u,v) \in U \times V \colon g(u,v) \ge g(u_0,v_0)+\varepsilon/3\}$ ее значения не изменились;

2) значение L уменьшилось, но на величину меньшую, чем ε.

Для этого фиксируем $\eta<\varepsilon$ и выберем положительное Δ так, чтобы из условия $\rho_X(u,u_0)<\Delta$, $\rho_Y(v,v_0)<\Delta$ следовало

$$|h(u,v)-h(u_0,v_0)|<\eta.$$

Зафиксируем положительное $\delta<\Delta$ так, чтобы множество $\{u \in U \colon \delta \le \rho(u,u_0) \le \Delta\}$ было непусто (такое δ существует, так как u_0 - не изолированная точка множества U).

Пусть $\psi: U \times V \to \mathbf{R}$ - непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $0 \le \psi(u,v) \le 1$ для всех $(u,v) \in U \times V$,

2) $\psi(u_0,v_0)=0$,

3) $\psi(u,v)=0$ для $(u,v)\in\{(u,v)\in U\times V: g(u,v)\geq g(u_0,v_0)+\varepsilon/3\}$,

4) $\psi(u,v)=1$ для

$$(u,v)\in\{(u,v)\in U\times V:\ g(u,v)\leq g(u_0,v_0)+\varepsilon/4,\ \rho_X(u,u_0)\geq\delta \text{ или } \rho_Y(v,v_0)\geq\delta\}.$$

Заменим функцию h функцией

$$(h(u,v)-\eta)\,\psi(u,v)+h(u,v)(1-\psi(u,v)).$$

Значение функции h при этой замене не увеличится, но и не уменьшится больше, чем на η. Следовательно, величина L не увеличится, но и не уменьшится больше, чем на $\eta<\varepsilon$. Докажем, что на самом деле величина L уменьшится.

В силу выбора величины δ для старой функции h

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U_\varepsilon} h(u,v)\leq \max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)+\eta/3,$$

где $U_\delta=\{u\in U: \rho_X(u,u_0)\geq\delta\}$

(здесь используется тот факт, что $\{u\in U: \delta\leq\rho_X(u,u_0)\leq\Delta\}\neq\varnothing$).

Но

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U_\delta} h'(u,v)\geq \max_{v\in V}\min_{u\in U} h'(u,v)=L'>L-\varepsilon.$$

Поэтому, если $v_1\in V$ и $u_1\in U_\delta$ удовлетворяют условиям

$$\min_{u\in U_\delta} h'(u,v_1)=\max_{v\in V}\min_{u\in U_\delta} h'(u,v),$$

$$h'(u_1,v_1)=\min_{u\in U_\delta} h'(u,v_1),$$

то $g(u_1,v_1)\leq g(u_0,v_0)+\varepsilon/4$, и потому $h'(u_1,v_1)=h(u_1,v_1)-\eta$.

Тогда

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U_\delta} h'(u,v)=\max_{v\in V}\min_{u\in U_\delta} h(u,v)-\eta\leq \max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v)-\frac{2}{3}\eta,$$

и подавно

$$\max_{v\in V}\min_{u\in U} h'(u,v)<\max_{v\in V}\min_{u\in U} h(u,v).$$

Шаг 4. Пусть $\varphi: U\times V\to\mathbf{R}$ - непрерывная функция удовлетворяющая следующим условиям:

1) $0\leq\varphi(u,v)\leq 1$ для всех $(u,v)\in U\times V$,

2) $\varphi(u,v)=0$ для всех $(u,v)\in\{(u,v)\in U\times V: h(u,v)\geq h(u_0,v_0)$,

3) $\varphi(u,v)=1$ для всех $(u,v)\in\{(u,v)\in U\times V: h(u,v)\leq L\}$.

Заменим функцию g функцией

$$(g(u,v)-\varepsilon)\,\varphi(u,v)+g(u,v)(1-\varphi(u,v)).$$

Пусть

$$A=\{(u,v)\in U\times V: h(u,v)=L\}.$$

В силу построения, в полученной игре имеем

$$\max_{(u,v)\in A} g(u_0,v_0)\leq \sup_{(u,v)\in D} g(u,v).$$

Следовательно, $N<K$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отсутствие изолированных точек в пространстве X принципиально. Если X дискретно, то нетрудно построить пример такой игры, что все близкие к ней игры нерегулярны.

8. Решение задачи 1 в нерегулярном случае

Если $\gamma<K$, то все конструкции разд. 2 и 3 можно применить и в нерегулярном случае и получить одно из решений задачи 1. Разумеется, таким образом будут найдены не все решения задачи 1, но как будет показано ниже, остальные решения устроены, вообще говоря, существенно сложнее.

То же относится и к случаю, когда $\gamma=K$ и верхняя грань в определении величины K достигается. Остается рассмотреть случаи, когда$\gamma>K$ или $\gamma=K$, но верхняя грань в определении величины K не достигается. Заметим, кстати, что в таком случае из условия $h(u,v)>L$ следует неравенство $g(u,v)<\gamma$.

Рассмотрим множество

$$V \setminus E = \{v \in V\colon \min_{u \in U} h(u,v) < L\}.$$

Его можно представить в виде

$$V \setminus E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n ,$$

где

$$\Omega_0 = \{v \in V\colon \min_{u \in U} h(u,v) \le L-1\},$$

$$\Omega_n = \{v \in V\colon L-\frac{1}{n} \le \min_{u \in U} h(u,v) \le L-\frac{1}{n+1}\}, n=1,2,...$$

Каждое из множеств Ω_n компактно, поэтому для него найдется конечное множество $W_n \subset U$ такое, что для любого $v \in \Omega_n$ имеем

$$\min_{u \in W_n} h(u,v) \le L-\frac{1}{n+1} < L.$$

Положим $W_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Тогда, очевидно, для любого $v \in V \setminus E$

$$\min_{u \in W_-} h(u,v) < L.$$

Случай $\gamma>M$ не интересен, так как задача 1 в этом случае решения заведомо не имеет. Поэтому будем считать $\gamma \le M$.

Пусть сначала $\gamma<M$. Для всякого $v \in E$ существует $u \in U$ такое, что

$$g(u,v)=M>\gamma.$$

Следовательно, открытые множества

$$O_u=\{v \in V\colon g(u,v)>\gamma\}$$

покрывают множество E. Но E - замкнутое подмножество компактного пространства V, а потому компактно. Следовательно, можно выбрать конечное множество $W_+ \subset U$ такое, что для любого $v \in E$ получим

$$\max_{u \in W_+} g(u,v) \ge \gamma.$$

Пусть множество W - дизъюнктное объединение множество W_- и W_+. Очевидно, W не более чем счетно. Определим отображение $P\colon V \to W$ следующими условиями:

1) если $v \in V \setminus E$, то найдем $u \in W_-$, для которого $h(u,v)<L$ и положим $P(V)=u$ (если таких u несколько - выбираем любое),

2) если $v \in E$, то найдем $u \in W_+$ такое, что $g(u,v) \ge \gamma$ и положим $P(v)=u$.

Пусть u_* - каноническое вложение W в U (т. е. $u_*(u)=u$). Нетрудно видеть, что стратегия u_* гарантирует первому игроку выигрыш, не меньший γ в игре Γ_P.

В самом деле, если $v\in V\backslash E$, то $h(u_*(P(v)),v)<L$, и, значит, v не является рациональным ответом второго игрока на стратегию u_*. Если же $v\in E$, то по построению функций P и u_* имеем $g(u_*(P(V)),v)\geq\gamma$.

Если удастся найти конечное множество W_- такое, что соответствующие множества O_u покрывают $V\backslash E$, то в оптимальном решении задачи 1 множество W конечно, и тогда решение задачи 1 может быть найдено, например, аналогично тому, как это сделано в разд. 3.

Существуют, однако, игры, для которых множество $V\backslash E$ не покрывается конечным числом множеств O_u. Оптимальному решению задачи 1 для таких игр могут соответствовать как счетные, так и конечные множества W.

Рассмотрим, наконец, случай $\gamma=M$. При этом условии в оптимальном решении задачи 1 множество W может иметь сколь угодно большую мощность.

Пример 2. Пусть $U=V$ - метрическое пространство с метрикой ρ. Положим $g(u,v)=-\rho(u,v)$, $h(u,v)=\rho(u,v)$.

В соответствующей игре Γ_2 стратегия $u_*(v)=v$ гарантирует первому игроку выигрыш 0.

Если отображение P не инъективно и $P(v_1)=P(v_2)$, то в игре Γ_P , очевидно, второй игрок может гарантировать себе выигрыш, равный $\rho(v_1,v_2)$, а значит, первый получит не более $-\rho(v_1,v_2)<0$.

Значит, в оптимальном решении задачи 1 отображение P должно быть инъективным, и, следовательно, мощность множества W равна мощности множества V. Но последняя может быть выбрана сколь угодно большой.

Список литературы

Горелов М. А. Синтез рациональных процедур обмена информацией в иерархической игре двух лиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. Т. 42. № 11.

Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.

Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.