

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР ИМ. А.А. ДОРОДНИЦЫНА**

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Е.И.АЛЕКСЕЕВА

**ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ НА СЕТЯХ**

**Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
Российской академии наук**

Москва 2010

УДК 519.685

Ответственный редактор
доктор техн. наук Ф.И. Ерешко

В работе содержится обзор исследований автора, посвященных анализу поведения материально связанных динамических систем. Развитые в прежних работах автора основные принципы теории динамических систем на сетях (или графах) изложены с позиций их практической применимости в различных областях моделирования. В качестве систем, функционирующих на основе коллективного поведения, рассмотрены как биологические системы, так и социально-экономические системы. Рассмотрены возможности применения разработанной теории для моделирования экономического кризиса.

Ключевые слова: динамические системы, устойчивость, сети, приложения в экономике, биофизике

Рецензенты: Ю.Н. Иванов,
А.Н. Соломатин

Научное издание

© Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 2011

Введение

Под динамической системой будем понимать систему, в которой, во-первых, определено в каждый момент времени ее состояние и, во-вторых, это состояние изменяется со временем. Для согласования интуитивного понимания с данным определением можно привести большое количество примеров.

В области химии таким примером является любая химическая реакция. Состоянием системы при этом можно считать концентрации реагирующих веществ в каждый момент времени. Ясно, что в ходе реакции эти концентрации меняются, что и позволяет считать эту систему динамической в смысле данного выше определения. Уже на этом примере можно заметить, что если реагирующих компонентов больше одного, то состояние системы в каждый момент времени представляет собой некоторый конечный набор чисел — значения концентраций веществ в этот момент времени. Этот набор можно отождествить с точкой линейного пространства соответствующей размерности. Тогда последовательные изменения состояния системы образуют некоторую последовательность точек в этом пространстве, называемую траекторией системы, а само пространство — фазовым пространством системы. Как правило, траекторию системы можно представлять в виде кривой в фазовом пространстве, имеющей начальную точку и изменяющейся с течением времени. Однако практически в каждой реакции существуют наборы значений концентраций (состояния), которые не меняются в ходе реакции. Такие состояния называются равновесными (или стационарными). Замечательное свойство равновесных состояний заключается в том, что если начальное состояние системы есть некоторое равновесное, то и все последующие — тоже равновесные. Если же в качестве начального состояния взято состояние вблизи равновесной точки, то различают три основных возможных варианта развития событий. Первый: каждая такая траектория (выходящая из любой точки, близкой к равновесной) стремится вернуться в близкую к равновесной. Тогда такая равновесная точка (состояние) называется

притягивающей. Второй: каждая траектория (выходящая из точки, близкой к равновесной) стремится от нее удалиться. Такая равновесная точка называется отталкивающей. И наконец, третий: в окрестности равновесной точки наблюдаются оба типа поведения; такая точка называется седловой.

Формально говоря, будет ли данная точка равновесной для данной системы, зависит от значений параметров системы: структуры взаимодействия различных реагентов, скоростей реакций и т. п. С практических позиций описанные три возможных типа равновесных точек не равноценны: устойчивость точки означает, что малые отклонения от равновесного состояния, обусловленные различными внешними причинами, не приводят к «уходу» траектории системы из окрестности данной точки — система устойчива в этом состоянии. Неустойчивость равновесной точки означает, что малейшая флуктуация состояния приведет к уходу траектории из окрестности, то есть произойдет (быть может) значительное изменение состояния. В случае седловой точки случайное отклонение может и не привести к подобным далеко идущим последствиям. Однако из общей теории следует, что вероятность такого поведения траектории равна нулю (если специально не контролировать смещение из седловой точки). Таким образом, практически можно различать два типа равновесных точек — устойчивые и остальные.

1. Динамические системы и устойчивость

Упомянутые выше понятия траектории, равновесных точек, их классификации и т. п. относятся, разумеется, не только к системам химической кинетики, а являются понятиями из теории динамических систем, общими для динамических систем любой природы. Приведем еще один пример динамической системы без подробных пояснений. Речь идет о биологической популяции. Каждая особь такой популяции имеет некоторый генотип, и полный набор количеств особей каждого генотипа в данный момент времени

можно считать состоянием популяции в этот момент. Под влиянием смертности и рождаемости состав популяции меняется, так что возникает траектория популяции. Здесь также можно выделить стационарные состояния, когда количество различных генотипов не меняется со временем, и т. п. Может быть также рассмотрена и популяция клеток определенного вида. Здесь состоянием можно считать количество клеток.

Обходя молчанием интересные современные результаты по предельному поведению траекторий динамических систем, автор возвращается к известной уже в прошлом веке теории равновесных точек динамических систем. Несмотря на такой почтенный возраст, эта теория все еще очень популярна при анализе прикладных и связанных с приложениями теоретических задач, поскольку хорошо объясняет поведение динамических систем, точнее, локальное поведение динамических систем. Дело в том, что большинство используемых в практической деятельности динамических процессов «работают» вблизи равновесной точки. Это естественно, поскольку мы хотим получать от этих процессов предсказуемые результаты. Природные процессы в норме также находятся вблизи состояния равновесия. Во всяком случае, из сказанного должна быть понятна важность задачи выяснения динамики системы вблизи ее равновесного состояния. Существует общая теория, принадлежащая А. А. Ляпунову и позволяющая установить характер равновесной точки. Методы теории Ляпунова широко развиты в большом количестве последующих работ.

В дальнейшем будут рассматриваться только динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для таких систем, согласно теории, критерием устойчивости равновесного состояния является расположение некоторого конечного множества (спектра линейного приближения) на плоскости. Если все это множество расположено строго слева от мнимой оси — равновесная точка устойчива, если точки по обе стороны мнимой оси — седло. Если все точки справа от мнимой оси

— неустойчивая равновесная точка. Если же весь спектр лежит слева от мнимой оси, а хотя бы одна точка спектра на оси, установить характер поведения траектории системы в окрестности равновесной точки только по линейному приближению невозможно. Такая равновесная точка называется нейтральной, и ее анализ на устойчивость представляет известную математическую проблему.

В данной работе нас будет интересовать поведение траекторий динамических систем вблизи равновесной точки при следующих специальных обстоятельствах. Предположим, что имеется некоторое (как правило, конечное) количество динамических систем, однотипных в том смысле, что каждая есть один и тот же динамический процесс, имеющий, быть может, разные значения параметров. Например, одна и та же химическая реакция с разными значениями параметров (если этого можно достигнуть) и при разных начальных состояниях, популяции особей одного вида с разным, например, характером отбора и т. п. Такие системы в дальнейшем будем называть элементарными или точечными (геометрически «сосредоточенными» в небольшой компактной области).

Предположим далее, что существует некоторая структура попарного обмена веществом между динамическими системами этого множества. Такая структура может быть задана указанием списка пар динамических систем, между которыми происходит обмен, наименованием субстрата обмена и указанием интенсивности. Простейшие примеры такого обмена — обмен одноименными реагентами между однотипными химическими реакциями, миграция особей в подразделенной на ареалы популяции. В дальнейшем описание такой структуры связи мы будем проводить с использованием понятий теории графов, с помощью которых удобно описывать структуры связи (рис. 1). Подчеркнем, что в данной модели речь идет именно о материальном обмене, так что верен закон сохранения. При информационном обмене, очевидно, этот за-

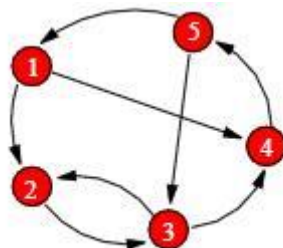


Рис. 1. Пример структуры связи. Каждой вершине соответствует элементарная система, каждой дуге – скорость потока элементов из одной вершины в другую

кон не выполняется (если не выбрасывать всякий раз черновик сообщения).

Такую систему — конечный набор динамических систем (моделей) и структуру связи между ними — естественно назвать коллективом и подчеркнуть это определение следующей символической формулой: коллектив = конечный набор объектов + структура связи между объектами.

Цель настоящей работы — исследование влияния произвольной структуры связи на стабильность неподвижной точки системы взаимодействующих элементарных моделей (стабильность коллектива). Именно, если хотя бы одна из элементарных систем находится в положении нейтрального равновесия, а остальные в положении устойчивого равновесия, то возникновение структуры связи может, вообще говоря, либо стабилизировать всю систему, либо сделать ее неустойчивой. Более того, даже если все элементарные системы находятся в положении устойчивого равновесия, то возникновение структуры связи может увеличить или уменьшить расстояние между спектром и мнимой осью (расстояние измеряется как расстояние между двумя множествами). В этом случае будем говорить, что структура связи соответственно повышает или понижает устойчивость всего набора элементарных систем.

Такая постановка задачи возникала в различных областях математических приложений и, как всякая абстрактная модель, может быть применима к различным по своей содержательной природе динамическим системам [1 - 3]. В настоящее время хорошо известны динамические эффекты в биологических объектах, возникающие при взаимодействии однотипных динамических систем в рамках модели активной среды. По-видимому, первой биологической задачей, где эффекты взаимодействия были исследованы на модельном уровне, стало распространение электрического возбуждения в сердечной мышце. Модель этого явления, предложенная Н. Винером и А. Розенблютом (1961), была развита далее в работах В. И. Кринского с соавторами (1978). В дальнейшем эта область интенсивно развивалась, а формирование общей идеологии связано в основном с работами И. Пригожина. В подавляющем большинстве предлагаемых в этом направлении работ на основе элементарных (точечных) моделей определялась непрерывная среда с некоторым законом взаимодействия близлежащих элементов. Как правило, это взаимодействие носит диффузионный характер, а сами модели представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных (см., например, Дж. Марри, 1983). Дискретный аналог такого типа моделей — бесконечный коллектив точечных систем, находящихся в узлах некоторой равномерной сетки и связанных между собой ребрами этой сетки. Таким образом, взаимосвязь, обусловленная диффузией, накладывает значительные ограничения на структуру связи элементарных систем в таком коллективе.

Существуют, однако, системы, где коллектив с произвольной структурой взаимосвязи возникает естественным образом. Стандартный пример такой биологической ситуации — миграция в подразделенной популяции [4]. Здесь элементарной динамической системой является часть популяции, сосредоточенная внутри некоторого ареала. Связь этой части с однотипными субпопуляциями из других ареалов определяется возможностью и интенсивностью

миграции, в частности геометрией пространства расположения популяции (ландшафт, наличие дорог, рек, оврагов и пр.). Интересный пример такого взаимодействия популяций возникает в модели «хищник — жертва», когда миграция происходит по различным законам у хищников и у жертв. Уже для этого примера характерна возможность реализации любой структуры связи, определяемой, в частности, и дальностью действия, и асимметрией в обмене при весьма широком выборе эволюционных соотношений. На уровне организма наличие дискретных взаимосвязанных структур можно предполагать в разнесенных пространственно однотипных элементах ткани — лимфатических узлах, например. Возникновение нетривиальной структуры связи на уровне организма может быть обусловлено и чисто анатомическими причинами, например, для микробных популяций в лицевых пазухах. В случае мультицентрической злокачественной опухоли, модель которой подробно рассматривается в настоящей работе, имеются экспериментальные основания считать, что в пределах ткани может происходить миграция и обмен между очагами как клетками иммунной системы, так и опухолевыми клетками.

Автор располагает опытом исследования химических и биологических приложений и видит их естественное распространение на экономические, где появился новый пул моделей экономического кризиса (например, [5, 6]), о чем пойдет речь далее в п. 10).

Таким образом, содержательная постановка задачи описана, приложения намечены, и можно приступить к изложению более математизированной части.

2. Формальная постановка задачи

Приведенный ниже обзор теоретических результатов максимально приближен к формальному математическому [8].

Пусть имеется некоторый двухкомпонентный динамический процесс, состояние которого в каждый момент времени описывается

значением двумерного вектора $X = (x, y)$, а эволюция во времени описывается динамической системой $\dot{X} = f(X, P)$, где $f = (f_1, f_2)$ — также двумерная вектор-функция. P — набор параметров данного процесса, выделяющий его в ряду однотипных. Пусть далее задан конечный набор динамических систем вида

$$\dot{X}_i = f_i(X_i, P_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Системы, входящие в этот набор, будем называть элементарными.

Этот набор можно рассматривать как единую динамическую систему, однако при отсутствии дополнительных требований к нему эволюция каждой элементарной системы осуществляется независимо от остальных и определяется начальным состоянием $X(0)$ и значением набора параметров P . В этих условиях равновесное состояние $\bar{X}$ системы (1.1) определяется, очевидно, равновесными состояниями элементарных систем, ее составляющих: $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N)$. Аналогично, спектр линейного приближения набора (1.1) в равновесной точке является объединением спектров линейных приближений элементарных систем в соответствующих равновесных точках $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_N$. Описанное конечное множество динамических систем не является коллективом в принятом нами смысле. Поэтому назовем эту систему «предколлективом». Далее будем считать, что спектр линейного приближения каждой из элементарных систем не кратен и не содержит нуля.

Положим теперь, что между элементарными системами осуществляется взаимосвязь путем обмена «веществом» по одноименным компонентам вектора X . По каждой компоненте взаимосвязь между системами определяется списком номеров пар, между которыми производится обмен (с учетом направления потока вещества) и значением интенсивности такого обмена для каждой пары (также с учетом направления). Такую структуру удобно описывать с помощью сети S , представляющей собой, по

определению сети, взвешенный граф $G = (N, \Gamma, C)$, где N — множество вершин (элементарных систем). Γ — множество дуг графа, описывающих пути обмена между всевозможными парами элементарных систем, C — набор интенсивностей обмена по каждой дуге $\gamma \in \Gamma$ (слово «взвешенный» как раз и означает, что каждой дуге графа сопоставлено число — «вес» дуги). Таким образом, если в данной компоненте существует поток вещества из s -й в i -ю элементарную систему, то существует дуга $\gamma_{is} \in \Gamma$ и положительное число $c_{is} \in C$, отражающее интенсивность этого потока.

Очевидно, что структура обмена в данной компоненте зависит, в частности, от содержательного характера этой компоненты, т. е. различные компоненты могут иметь различные структуры обмена. Наличие обмена порождает новую динамическую систему (назовем ее G -связной системой), которая в координатной записи имеет вид

$$\dot{X}_{ij} = f_{ij}(X_i, P_i) - c_{ii}^j X_{ij} + \sum_{\vartheta \in \Gamma_j^{-1}(i)} c_{i\vartheta}^j X_{\vartheta i},$$

$$j = 1, 2; i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

где $\Gamma(i)$ и $\Gamma^{-1}(i)$ — множество дуг, соответственно выходящих и входящих в вершину i , c_{ii} — суммарный объем вытекающего (по данной компоненте) вещества из вершины i во все остальные. Принимаем, что имеет место закон сохранения

$$c_{ii}^j = \sum_{\vartheta \in \Gamma_j(i)} c_{\vartheta i}^j.$$

Таким образом, соотношение (1.2) определяет новую динамическую систему — коллектив элементарных динамических систем. В дальнейшем, описывая общие результаты, будем предполагать, что константы, определяющие интенсивность обмена между системами, достаточно малы. Это предположение удобно по многим причинам. Во-первых, оно позволяет более корректно поставить задачу, поскольку равновесная точка такого коллектива

(G -связной системы) получается малым смещением равновесной точки предколлектива (1.1) и, таким образом, не теряется соответствие между равновесными точками элементарных систем и равновесной точкой коллектива. Во-вторых, для анализа системы в этом случае можно применить технику теории возмущений. Очевидный недостаток такого подхода — отсутствие данных о поведении коллектива при произвольных интенсивностях обмена — можно несколько компенсировать либо мысленным переносом качественных особенностей динамики системы при малых интенсивностях на произвольный случай, либо результатами компьютерных экспериментов. Можно также попытаться получить общие результаты и аналитическим образом (насколько известно автору, этого еще никто не делал).

Применение к системе (1.2) теории возмущений позволяет получить критерий стабилизирующего действия структуры связи. При обмене только по одной компоненте (например, x) в случае комплексного спектра он имеет вид

$$\Omega_i(c_{ii}\bar{x}_i - \sum_{s=1, s \neq i} c_{is}\bar{x}_s) - \Delta_i c_{ii} < 0, i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

где $\bar{x}_i$ — равновесные значения компоненты x_i ,

Δ_i — определитель якобиана i -й элементарной системы в равновесной точке $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, Ω_i — скобка Пуассона в точке $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$:

$$\Omega_i = [\sigma_i, \psi_i](\bar{x}_i, \bar{y}_i, P_i),$$

σ_i — след указанного якобиана.

Смысл критерия (1.3) в следующем: если все неравенства (1.3) удовлетворяются, то коллектив более стабилен, чем предколлектив (первоначальный набор), т. е. структура связи приводит к стабилизации системы. Геометрически факт стабилизации выражается в смещении под действием малых связей исходного

спектра влево (рис. 2). Такую структуру будем называть стабилизирующей сетью (или *ST*-сетью).

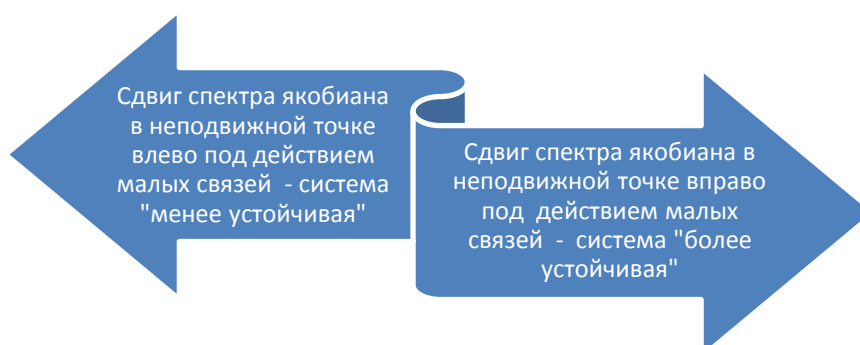


Рис.2. Сдвиг спектра якобиана в неподвижной точке под действием малых связей

Если хотя бы одно из неравенств (1.3) не удовлетворяется, то коллектив менее стабилен, чем предколлектив, т. е. структура связи в этом случае привела к некоторой дестабилизации системы.

В качестве простейшего примера применения описанных в этом пункте понятий приведем конечную систему взаимосвязанных брюсселяторов. Элементарная система в этом случае — модельная биофизическая система, предложенная брюссельской школой И. Пригожина, имеет (согласно Дж. Марри) вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= 1 - (b_i + 1)x_i + a_i x_i^2 y_i, \\ \dot{y}_i &= b_i x_i - a_i x_i^2 y_i.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Сопоставляя форму (1.4) с записью системы (1.1) в общем виде, отметим, что (x, y) - двумерный вектор состояния элементарной

системы, обозначенный в (1.1) через X , правая часть формул (1.4) определяет двумерную вектор-функцию (f_1, f_2) , а набор параметров (a_i, b_i) описан выше как набор P .

У элементарной системы (1.4) равновесные состояния равны $\bar{x}_i = 1, \bar{y}_i = b_i/a_i$ и, как нетрудно вычислить, $\Delta_i = a_i, \Omega_i = 2a_i^2$. При обмене только по компоненте x критерий повышения устойчивости (1.3) принимает вид

$$(1 - 2a_i)c_{ii} + 2a_i \sum_{s=1, s \neq i} c_{is} > 0, i = 1, \dots, N.$$

Нетрудно видеть, что при $a_i < \frac{1}{2}$ критерий выполнен и, следовательно, у набора систем с параметрами, подчиненными указанному ограничению, стабильность повышается при любой структуре связи. Если же все ненулевые интенсивности обмена равны между собой, то критерий (1.3) преобразуется к виду $n_i^+ > n_i^- \left(1 - \frac{1}{2a_i}\right)$, $i = 1, \dots, N$, где n_i^- — число дуг, выходящих из вершины i , n_i^+ — число дуг, входящих в вершину i в графе G .

Из приведенного соотношения ясно, что локально-однородный граф связи (в каждую вершину входит и выходит одинаковое количество дуг) повышает устойчивость набора брасселяторов при любом значении $a > 0$. При нарушении условия однородности, за счет выбора значения параметров a , критерий может нарушаться, т. е. такая связывающая сеть может дестабилизировать систему. Так, например, при $a = \frac{1}{2}$ обмен по кругу между элементарными системами повышает устойчивость, а добавление хорды приводит к понижению устойчивости.

3. Связи и типы точечных систем

Структура и характер связей между элементарными системами зависят от свойств окружающего пространства и механизма переноса вещества. Например, в системе популяционных ареалов, расположенных в некоторой местности (можно представить себе популяцию нелетающих насекомых), обмен может осуществляться вдоль некоторых структур местности и быть запрещен в иных направлениях. В организме такими заранее заданными каналами возможного распространения может быть, например, локальная сеть кровеносных сосудов. Поэтому важным объектом при описании коллектива является структура всех допустимых каналов обмена между системами. Эта структура по существу является объемлющим пространством, внутри которого реализуются различные структуры связи. В рассматриваемой модели коллектива топология объемлющего пространства может быть описана заданием некоторого графа, который назовем графом топологии. В этом графе дугой связаны любые две вершины, между которыми при данном свойстве окружающего пространства и механизме переноса вещества потенциально возможен обмен веществом, причем дуга ориентирована в направлении этого обмена.

Граф топологии описывает все потенциально возможные варианты обмена между элементарными системами. Однако на практике по тем или иным (в том числе случайным) причинам могут реализоваться не все потенциально возможные пути переноса, а только их часть. При этом возникнет структура связи, которая формально является субграфом исходного графа топологии, т. е. связь между элементарными системами происходит по некоторому подмножеству дуг графа топологии. Такую структуру будем называть допустимой (по отношению к заданному графу топологии). Потенциально возможная интенсивность переноса вещества в «разрешенных» направлениях, определяемых графом топологии, содержательно определяется свойствами окружающего пространства и заданным механизмом переноса. Иначе говоря, для каждого ребра

(i, j) сети заданы неотрицательные верхняя и нижняя границы $\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij} (\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij} > 0)$, внутри которых находятся значения интенсивности c_{ij} , пропускной способности ребра (i, j) в данной сети.

Набор интенсивностей $\{c_{ij}\}$ можно рассматривать как элемент векторного пространства соответствующей размерности. Поскольку интенсивности принимают значения в некоторых границах, множество точек пространства, которые могут быть выбраны в качестве допустимого набора интенсивностей для данной структуры связи, образуют параллелепипед в этом линейном пространстве. Если говорить строго, этот параллелепипед есть прямое произведение интервалов, определенных для изменения интенсивностей каждой из дуг. Назовем такой параллелепипед пространством разрешенных интенсивностей. Из вида критерия (1.3) видно, что значения интенсивностей можно нормировать на максимальное значение интенсивности, так что в дальнейшем будем полагать, что множество разрешенных интенсивностей содержится внутри единичного куба соответствующего пространства.

Выбранные граф топологии и пространство разрешенных интенсивностей определяют тип сети. В дальнейшем будем рассматривать следующие основные типы сети.

- ❖ Граф топологии — некоторый ориентированный граф, а множество разрешенных интенсивностей — положительная часть единичного куба. По существу, в этом случае допустимой является связывающая сеть, подчиненная заданной топологии, с любой интенсивностью переноса. Это коллектив в наиболее общем виде, поскольку здесь допустимы любые взаимоотношения между членами коллектива.
- ❖ Граф топологии — некоторый ориентированный граф, однако множество разрешенных интенсивностей — одна точка пространства интенсивностей, причем лежащая на диагонали единичного куба. Из этого ясно, что все ненулевые

интенсивности в этой сети равны между собой. Этот случай возможен, если интенсивности переноса не зависят от направления переноса (точнее — от ребра сети, вдоль которого идет перенос). Эту ситуацию можно интерпретировать как предельную — отношения либо есть, либо их нет.

- ❖ Граф топологии — некоторый неориентированный граф с одинаковыми или различными интенсивностями переноса. Это модель диффузии (возможно, неизотропной).

Свойство диффузии здесь отражено в симметрии обмена (неориентированный граф), неизотропия возникает, если интенсивность обмена неодинакова для всех ребер (т. е. зависит от направления). Содержательная интерпретация диффузионного взаимодействия может быть различной, в частности, это типичная форма взаимодействия в коллективе клеток ткани.

Свойства коллектива, очевидно, зависят не только от структуры связи между членами коллектива, но и от «темпераментов» его участников. Нечто аналогичное темпераменту можно сопоставить и элементарным динамическим системам, составляющим коллектив.

Согласно критерию (1.3) необходимая для оценки устойчивости информация об элементарных системах полностью заключена в значениях величинах $\bar{x}$ и Q , где $Q = \Delta/\Omega$. Форма этого критерия заставляет вспомнить развитую в одной из работ Ю. И. Любича и М. И. Табачникова (1969) [12] по совершенно иному поводу теорию субгармонических функций на графе. В этих рамках значения равновесных концентраций компоненты $\bar{x}_i$, по которой идет обмен, есть функция на графе, а критерий (1.3) определяет функциональное соотношение, связывающее значение функции в каждой вершине графа со значениями этой функции в соседних его вершинах. Знак неравенства в этом соотношении как раз и позволяет считать эту функцию *суб-* (или *супер-*) *гармонической (в вершине)* в смысле указанной теории (в которой название также возникло ввиду явной аналогии с непрерывным случаем). Указанное соответствие не

только по форме, но и по существу адекватно нашей задаче, так что приведенная ниже классификация могла бы появиться и независимо (если бы не была известна заранее).

Опираясь на упомянутую теорию, назовем элементарную систему в соответствующей равновесной точке субдоминантной, если $Q > 0$. Если при этом $\bar{x} < Q$, то такую систему назовем регулярной субдоминантной, а при обратном неравенстве $\bar{x} > Q$ — нерегулярной субдоминантной. Если $Q < 0$, то такую систему назовем супердоминантной. Набор $(\bar{x}, Q)$ можно рассматривать как точку двумерного пространства $\mathbb{R}^2$, лежащую в правой полуплоскости $(\bar{x} > 0, Q)$. Элементарные системы, отвечающие одной такой точке, эквивалентны с точки зрения их реакции на одну и ту же сеть. Поэтому в дальнейшем, говоря о выборе некоторого набора элементарных систем, будем иметь в виду выбор точек $(\bar{x}, Q)$.

Приведенная классификация систем имеет простую физическую интерпретацию:

- ❖ субдоминантные системы повышают свою стабильность при притоке вещества,
- ❖ супердоминантные — при оттоке,
- ❖ а регулярные субдоминантные — при оттоке и при притоке

Уже из этого ясна роль типов систем при их взаимодействии, что и использовано в дальнейшем анализе.

Однако прежде чем интенсивно использовать введенную классификацию, необходимо доказать принципиальную возможность существования уравнений каждого из трех приведенных типов. Дело в том, что величины $\bar{x}$ и Q сложным образом зависят от параметров исходного дифференциального уравнения и, вообще говоря, неизвестно, можно ли подобрать эти параметры так, чтобы выполнялись соответствующие неравенства. Более того, для дальнейшего важно знать, любая ли пара с неотрицательным первым числом может быть выбрана в качестве набора $(\bar{x}, Q)$ некоторого дифференциального уравнения.

Для положительного решения этих вопросов достаточно привести хотя бы один пример, и этот пример доставляет следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax^2 + bxy + cy^2 - x, \\ \dot{y} &= 2x - y.\end{aligned}$$

Чтобы этой системе соответствовал набор $(\bar{x}, Q)$, необходимо взять значения параметров a , b и c в следующем виде:

$$a = \Omega + \frac{2\Delta^2}{\bar{x}}, \quad b = -\Omega - \frac{2\Delta^2}{\bar{x}} - \frac{2\Delta}{\bar{x}}, \quad c = 0.25 \left(\frac{1}{\bar{x}} + \Omega + \frac{2\Delta^2}{\bar{x}} + \frac{3\Delta}{\bar{x}} \right).$$

4. Структуры связи, интенсивности связи, наборы элементарных систем

Мы выделили в коллективе две различные по своей природе составляющие — набор участников (элементарных систем) и структура связи между ними. Роль этих составляющих при содержательной интерпретации модели различна: одна из них может быть основной, на фоне которой проявляется действие второй. Так, в ряде случаев вначале задается некоторый набор элементарных систем, а структура связи между ними является следствием внешних (по отношению к параметрам элементарных систем) условий. В некоторых вариантах модели такую структуру связи можно даже считать случайной. Например, в подразделенной на ареалы популяции летающих насекомых обмен в некотором смысле случаен. Имеются, однако, ситуации, когда задана именно структура связи, а параметры и даже типы (в смысле вида эволюционных уравнений) элементарных систем возникают как следствие некоторых внешних причин, т. е. также в определенном приближении случайно. Например, активная ткань. В этом случае структура связи носит при наличии диффузии вполне закономерный характер, а распределение динамических систем (значений их параметров) в некотором смысле

случайно. Поэтому при одной и той же структуре связи возникает эффект как стабилизации системы, так и ее дестабилизации. Аналогичный пример можно предложить для подразделенной на ареалы популяции: на одной и той же местности (которая определяет структуру миграции) одна популяция может быть стабильной, а другая — вымереть, например.

Вклад указанных составляющих модели в устойчивость конечной структуры можно исследовать в рамках следующих взаимодополнительных задач:

1. Для заданного набора элементарных динамических систем определить существование и особенности структуры связи, повышающей стабильность всей системы.
2. Для заданной структуры связи определить существование и особенности множества элементарных систем, для которых указанная структура связи оказывает стабилизирующее действие на всю систему.

Таким образом, первая задача в основном направлена на описание свойств элементарных систем по отношению к возможности их стабилизации структурами обмена, а вторая задача подчеркивает свойства некоторой сети способствовать стабилизации набора элементарных систем достаточно широкой природы. В частности, первая задача позволяет поставить вопрос о существовании для данного набора элементарных систем хотя бы одной сети (в заданной топологии), повышающей стабильность данного набора. Возникает соблазнительная задача классификации динамических систем на «хорошие», которые стабилизируются хотя бы одной связывающей сетью, и «плохие», не стабилизирующиеся ни одной сетью из допустимого набора. Содержательные оценки типа «хорошие - плохие» могут быть заменены на противоположные, но качественные отличия таких систем очевидны и интересны. Как было показано Алексеевой Е.И. и Киржнером В.М. в работе [8], эта задача в общем случае оказалась, по-видимому, эффективно

неразрешимой (т. е. разрешимой только полным перебором). Это следует из эквивалентности проблемы нахождения такого критерия и задачи о разбиении из теории дискретной оптимизации, которая является *NP*-полной задачей.

Полученное утверждение, как уже отмечено, позволяет не ломать голову в поисках критерия существования хотя бы одной сети, повышающей стабильность, который был бы пригоден для всех топологий сразу. Однако для более узких классов структур связи такого рода критерий в принципе возможен. В связи с этим рассмотрим указанные задачи по отношению к более узким классам допустимых структур связи.

5. Произвольные связи и произвольные интенсивности

Граф топологии — некоторый ориентированный граф, а пространство разрешенных интенсивностей — пересечение единичного куба с первым октантом, т. е. для координат вектора интенсивностей выполнены неравенства $0 < c_{ii} < 1$.

Рассмотрим вначале случай $N=2$, т. е. когда коллектив состоит только из двух взаимодействующих систем. Обозначим их параметры через $\bar{x}_1, Q_1$ и $\bar{x}_2, Q_2$, соответственно интенсивности связей — через c_{12} и c_{21} . Пусть граф разрешенных интенсивностей — полный граф, т. е. допускается двустороннее взаимовлияние. Это наиболее простой для анализа случай и достаточно важный для практических приложений. Покажем прежде всего, что в этом минимально возможном коллективе имеется, по крайней мере, одна структура отношений, приводящая к стабилизации.

Из критерия (1.3) следуют соотношения в вершинах 1 и 2, соответственно

$$\begin{aligned}\Omega_1(c_{21}\bar{x}_1 - c_{12}\bar{x}_2) &< \Delta_1 c_{21}, \\ \Omega_2(c_{12}\bar{x}_2 - c_{21}\bar{x}_1) &< \Delta_2 c_{12}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Легко проверить, что эти соотношения удовлетворяются, если интенсивности c_{12} и c_{21} удовлетворяют равенству $c_{12} = c_{21}\bar{x}_1 / \bar{x}_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае для любых допустимых

значений параметров элементарных систем всегда существует связывающая сеть, повышающая устойчивость системы (при правильно подобранной интенсивности отношений).

В рассматриваемом маленьком коллективе разнообразие отношений в первую очередь зависит от их интенсивности. Возникает справедливый вопрос о количестве связей с различной интенсивностью, стабилизирующих рассматриваемую пару. Чтобы ответить на этот вопрос достаточно строго, рассмотрим множество допустимых интенсивностей в этом случае. Оно состоит из пар (c_{12}, c_{21}) , $0 < c_{12}, c_{21} < 1$. Типичность такой сети, очевидно, сводится к вопросу об объеме множества решений системы неравенств (1.5) в пространстве разрешенных значений интенсивностей. Напомним, что множество решений системы из двух неравенств представляет собой часть плоскости, выделяемую двумя прямыми.

Область решений неравенства (1.5) ограничена лучами, исходящими из начала координат. Естественной мерой объема области решений можно считать угол между этими лучами. Оценим возможные значения объема области решения при всех возможных соотношениях типов двух элементарных динамических систем.

Пусть обе системы — нерегулярные субдоминантные, т. е. $\bar{x}_1 > Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$. Тогда угол γ удовлетворяет следующему соотношению

$$tg(\gamma) = (\bar{x}_1 Q_2 + \bar{x}_2 Q_1 - Q_1 Q_2) / [(\bar{x}_1(\bar{x}_1 - Q_1) + \bar{x}_2(\bar{x}_2 - Q_2))].$$

Из этого соотношения вытекает, что область в пространстве интенсивностей (c_{12}, c_{21}) , повышающих устойчивость всей G -связной системы, может иметь любой объем — от сколь угодно малого до всего пространства при, например, приближении значений $\bar{x}_1$ к $Q_1, \bar{x}_2$ к Q_2 , соответственно.

Если одна из систем, например номер 1, регулярная субдоминантная, а вторая — нерегулярная субдоминантная, т. е. $\bar{x}_1 < Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$, то область в пространстве интенсивностей (c_{12}, c_{21}) повышающих устойчивость всей G -связной системы, ограничена лучами с углом γ между ними, удовлетворяющим соотношению

$$tg(\gamma) = (\bar{x}_2 - Q_2) / \bar{x}_1,$$

и, следовательно, также может иметь любой объем — от сколь угодно малого до всего пространства. Аналогично рассматривается случай соотношений $\bar{x}_1 > Q_1, \bar{x}_2 < Q_2$.

В случае, когда обе системы регулярные субдоминантные, т. е. $\bar{x}_1 < Q_1, \bar{x}_2 < Q_2$, область устойчивости — все пространство интенсивностей, т. е. связь любой интенсивности повышает устойчивость G-структуры в этом случае.

Продолжая анализ возможных ситуаций, рассмотрим случай, когда одна вершина (для определенности — номер 1) субдоминантная, а вторая — супердоминантная. Из критерия (1.5) в этом случае следуют соотношения в вершинах 1 и 2 соответственно:

$$\begin{aligned} c_{21}\bar{x}_1 - c_{12}\bar{x}_2 &< Q_1 c_{21} \\ c_{12}\bar{x}_2 - c_{21}\bar{x}_1 &> -Q_2 c_{12}. \end{aligned}$$

Если вершина номер 1 регулярная, т. е. $\bar{x}_1 < Q_1$, то угол γ определяется из соотношения

$$tg(\gamma) = (\bar{x}_2 + Q_2) / \bar{x}_1,$$

и может быть любым между 0 и $\pi/2$. В нерегулярном случае, когда $\bar{x}_1 > Q_1$, угол γ удовлетворяет условию

$$tg(\gamma) = \min[\bar{x}_2 / (\bar{x}_1 - Q_1), (\bar{x}_2 + Q_2) / \bar{x}_1].$$

Если при этом $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$, то можно показать, что угол γ не меньше $\pi/4$, т. е. область повышения устойчивости в пространстве интенсивностей не менее $1/2$.

$$\begin{aligned} c_{21}\bar{x}_1 - c_{12}\bar{x}_2 &> -Q_1 c_{21}, & Q_1 > 0, \\ c_{12}\bar{x}_2 - c_{21}\bar{x}_1 &> -Q_2 c_{12}, & Q_2 > 0, \end{aligned}$$

и соответствующий угол γ определяется из соотношения

$$tg(\gamma) = (\bar{x}_1 Q_2 + \bar{x}_2 Q_1 + Q_1 Q_2) / [(\bar{x}_1(\bar{x}_1 + Q_1) + \bar{x}_2(\bar{x}_2 + Q_2))].$$

Очевидно, что в зависимости от соотношений параметров область устойчивости может иметь любой объем.

Приведенные выше результаты формально полностью описывают ситуацию, однако что же они, в сущности, означают, требует отдельного пояснения.

Утверждение 1. Если обе системы регулярные субдоминантные, то любая связь в таком коллективе повышает устойчивость. Если одна из систем (номер 1) суб-, а вторая — супердоминантная и выполнено условие $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$, то по крайней мере половина всех возможных систем связи повышает устойчивость такой пары. В остальных случаях мера множества связей, повышающих устойчивость, может быть сколь угодно малой.

Таким образом, если заданы две элементарные системы и случайным образом (равновероятно) выбираются интенсивности связывающей сети, то вероятность получить более устойчивую систему зависит от параметров систем и может быть сколь угодно мала. Однако в случае двух субдоминантных систем при относительно малых (по сравнению с величинами Q_1, Q_2) значениях равновесных концентрации любая связывающая сеть повышает устойчивость, а в случае суб-супердоминантной пары, при определенном соотношении между равновесными концентрациями, вероятность случайного образования стабилизирующей сети не менее $1/2$.

Перейдем теперь к описанию общего случая, т. е. коллектива с любым конечным числом участников. Рассмотрим отдельно случай, когда граф топологии — полный граф. В содержательном плане можно считать, что в этом случае допустимой структурой связи является любая сеть.

Утверждение 2. Если допустимой структурой связи является любая сеть, то:

- 1) при выполнении неравенств $\Delta_i > 0$ ($i = 1, \dots, N$) всегда существует структура связи, повышающая устойчивость G-системы;
- 2) при выполнении неравенств $\Delta_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, N$), если хотя бы в одном случае имеется строгое неравенство, всегда

существует структура связи, повышающая устойчивость G-системы;

- 3) при выполнении равенств $\Delta_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$), если существуют и суб- и супердоминантные вершины, всегда существует структура связи, повышающая устойчивость G-системы;
- 4) при выполнении равенств $\Delta_i = 0$ ($i = 1, \dots, N$), если все вершины только суб- или только супердоминантные, не существует структуры связи, повышающей устойчивость G-системы.

Таким образом, и в случае, когда допустимой является любая структура связи с любой интенсивностью, для любого предколлектива всегда существует хотя бы одна сеть, повышающая устойчивость. В некотором плане это неудивительно, так как существование хотя бы одной сети, повышающей устойчивость тем вероятнее, чем больше класс допустимых сетей. Поэтому предыдущее утверждение устанавливает существование таких сетей «практически всегда» для самого широкого из возможных классов сетей. Однако для более узкого класса сетей (т. е. для специальных графов топологии) вопрос существования необходимо решать отдельно.

Интересным графом топологии является граф, у которого структура связей носит «взаимообратный» характер — если есть связь с ненулевой интенсивностью в одну сторону, то также есть связь с ненулевой (возможно, с другой) интенсивностью в противоположную сторону. Это более узкий класс по сравнению с рассмотренным выше, однако и в таких коллективах также всегда имеется хотя бы одна стабилизирующая сеть.

В некотором роде противоположной топологией обладает обычный односторонний цикл и односторонняя цепочка, т. е. структуры, в которых связь между элементарными системами осуществляются односторонне вдоль некоторого цикла или цепочки. Для этих типов связи хотя бы одна стабилизирующая структура

существует не всегда, о чем свидетельствует следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любого набора элементарных систем, соединенных в цикл, существует такой набор интенсивностей, что структура связи повышает устойчивость. Для любого набора элементарных систем, соединенных в цепочку, существует такой набор интенсивностей, что структура связи повышает устойчивость, если начальная система цепочки регулярная субдоминантная или супердоминантная, а конечная система цепочки — субдоминантная. В противном случае при любом наборе интенсивностей такая цепочка дестабилизирует систему, однако можно выбором интенсивностей добиться нарушения устойчивости только в начальной и конечной вершинах.

Это утверждение можно пояснить следующим образом. В случае связи по циклу у каждой элементарной системы есть источник и сток (предшествующая по циклу и следующая по циклу системы, соответственно). Если системы соединены по циклу, например, в порядке нумерации, то функциональные соотношения в вершинах имеют вид

$$\begin{aligned} c_{21}\bar{x}_1 - c_{1N}\bar{x}_N &<_{\Omega_1} Q_1 c_{21}, \\ c_{32}\bar{x}_2 - c_{21}\bar{x}_1 &<_{\Omega_2} Q_2 c_{32}, \quad \dots \\ c_{1N}\bar{x}_N - c_{NN-1}\bar{x}_{N-1} &<_{\Omega_N} Q_N c_{1N}. \end{aligned}$$

Здесь знак неравенства согласован со знаком Ω : если $\Omega > 0$, то знак неравенства следует брать, как в формуле, если $\Omega < 0$, то знак неравенства следует заменить на противоположный. Легко проверить, что набор интенсивностей c_{ii}

$$c_{ii-1} = c_{1N}\bar{x}_N / \bar{x}_{i-1}$$

удовлетворяет приведенным функциональным соотношениям для обмена по циклу. Если обмен идет по цепочке (разомкнутый цикл),

то существуют две крайние вершины, в которых соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned} -c_{NN-1}\bar{x}_{N-1} &<_{\Omega_N} 0, \\ c_{21}\bar{x}_1 &<_{\Omega_1} Q_1 c_{21} \end{aligned}$$

в конечной и начальной вершинах соответственно. Для начальной вершины это соотношение не выполняется, когда $\bar{x}_1 > Q_1 > 0$, т. е. при нерегулярной субдоминантной вершине, а для конечной — в случае ее супердоминантности, что также можно легко проверить. И наконец, важное для дальнейшего замечание: нарушения критерия устойчивости бывает невозможно избежать только в крайних вершинах, что следует из структуры связи во внутренних точках, аналогичной приведенной для цикла.

Таким образом, для специальных типов топологий даже при произвольном, по существу, наборе интенсивностей, существование хотя бы одной связывающей сети не гарантировано. Общий результат о существовании стабилизирующих сетей в классах топологий с произвольными интенсивностями содержится в следующем утверждении.

Утверждение 4. Чтобы для заданного набора элементарных систем в заданном классе сетей существовала хотя бы одна сеть, повышающая устойчивость этого набора, необходимо и достаточно, чтобы в графе топологии, определяющем класс, каждой начальной вершине соответствовала регулярная субдоминантная или супердоминантная вершина, а тупиковой — субдоминантная.

Это утверждение, по существу, является обобщением уже замеченного для цикла и цепочки свойства и, как мы увидим, может быть даже получено из этих результатов. Однако вначале приведем конструкцию, имеющую и самостоятельный интерес. Именно введем операцию суммы двух сетей. Под суммой двух сетей S_1 и S_2 на одном множестве вершин X будем понимать сеть S_3 на том же множестве, у которой интенсивность каждого ребра равна сумме интенсивностей в сетях S_1 и S_2 одноименных ребер (т. е. ребер,

соединяющих пару вершин с одинаковыми номерами). Чтобы это утверждение было полностью корректным, заметим, что отсутствие ребра здесь понимается как ребро с нулевой интенсивностью.

Заметим, что, определив сумму двух сетей, мы на самом деле определили сумму любого конечного набора сетей — это всегда так при определении суммы.

Утверждение 5. Сумма двух сетей, повышающих устойчивость, также повышает устойчивость.

Это утверждение легко следует из определения суммы сетей и линейности критерия повышения устойчивости.

Теперь можно наметить доказательство утверждения 4. Возьмем граф исходной топологии и выделим в нем произвольный цикл, если он есть. Представим далее этот граф в виде суммы выделенного цикла и соответствующего субграфа (т. е. того же графа, однако уже без ребер, входящих в выделенный цикл). Повторим эту операцию до тех пор, пока не получим некоторый набор циклов и субграф, в котором уже нет циклов. Этот субграф, действуя аналогично, можно также «разобрать» на цепочки. Таким образом можно провести разборку любого графа на циклы и цепочки. Далее, для циклов согласно утверждению 3 можно указать такие интенсивности, что они приводят к стабилизации на данном множестве элементарных систем. Поэтому и сумма их дает сеть, повышающую устойчивость, согласно утверждению 5. Если бы не было цепочек, утверждение 4 было бы этим доказано. Для цепочек выберем такие интенсивности обмена, чтобы нарушения неравенств были только в крайних вершинах, но выберем эти интенсивности достаточно малыми. Тогда при сложении цепочек с уже полученной сетью неравенства основного критерия повышения устойчивости не будут нарушаться, если концевые вершины цепочек «совместятся» с вершинами, уже имеющими ненулевые интенсивности обмена с другими, т. е. заведомо не тупиковыми.

Из утверждения 4, в частности, следует, что если в графе топология нет начальной и конечной вершин, то при любом наборе

элементарных систем существует сеть из данного класса и допустимые значения интенсивностей, повышающие устойчивость этого набора. Таким образом, например, структура связи, не допускающая источников и стоков, более предпочтительна в плане стабилизирующего воздействия.

Вопрос типичности в данном классе структур связи, повышающих устойчивость, существенно зависит, как это было показано при $N=2$, от типов элементарных систем, входящих в заданный набор, и от значений параметров этих систем. В некоторых случаях, однако, можно оценить объем множества повышающих устойчивость сетей в достаточно общем виде. Примером может служить следующее утверждение.

Утверждение 6. Если все элементарные системы, входящие в заданный набор, регулярные субдоминантные, то любая связывающая сеть стабилизирует такую систему.

Приведенные свойства стабилизирующих сетей и соответствующих коллективов позволяют наметить вопрос об образовании таких сетей в эволюционном плане. Действительно, как было показано уже для двух взаимосвязанных систем, при некоторых их темпераментах случайным образом практически невероятно из некоторого допустимого набора получить стабилизирующую сеть. С другой стороны, при соответствующих темпераментах партнеров каждая допустимая связывающая сеть порождает устойчивое сообщество. Качественно близкие тенденции можно усмотреть и из результатов в общем случае. Если связывающая сеть устанавливается одномоментно для заданного набора элементарных систем, причем эта сеть выбирается случайным образом из множества допустимых, то вероятность того, что эта сеть будет стабилизировать систему, прямо пропорциональна относительному количеству систем регулярного субдоминантного типа и обратно пропорциональна общему количеству систем. Иначе говоря, при таком механизме образования коллективов наиболее часто встречались бы коллективы с небольшим количеством членов,

состоящие в основном или полностью из регулярных субдоминантных систем. Можно, однако, представить модель «эволюционного» образования сложной сети при суммировании малых стабилизирующих сетей, заданных на частях всего набора элементарных систем. В этом случае сеть растет «согласованно» с ростом и типами элементарных систем и возможно получение сложной стабилизирующей сети. Отметим, что минимальным набором таких стабилизирующих сетей, составляющим базис для образования стабилизирующих сетей любой сложности, являются всевозможные сети, связывающие только пары элементарных систем.

6. Произвольные связи, одинаковые интенсивности

Граф топологии — некоторый ориентированный граф, пространство разрешенных интенсивностей — одна точка. Существование структур связи, повышающих устойчивость, в предыдущем пункте было в основном связано с подбором соответствующих значений интенсивностей. Однако в определенных ситуациях может оказаться допустимой только структура связи с близкими (в пределе — одинаковыми) интенсивностями обмена по подмножеству тех направлений, которые имеются в соответствующем графе топологии. Такой вид связи в модели описан сетью с единичной интенсивностью каждой дуги. Это более узкий класс структур связи, чем рассмотренный выше, так что полученные там утверждения о существовании и типичности структур связи, повышающих устойчивость, здесь неприменимы и требуется самостоятельное исследование. Это исследование начнем с полного разбора простейшего случая $N=2$.

Пусть параметры соответствующих элементарных систем равны $\bar{x}_1, Q_1$ и $\bar{x}_2, Q_2$. Для них существуют три возможных сети соединения:

перенос вещества из второй вершины в первую (сеть S_1 , формально соответствующая значениям интенсивностей $c_{12} = 1, c_{21} = 0$); перенос вещества из первой вершины во вторую (сеть S_2 , $c_{12} = 0, c_{21} = 1$); обмен между системами ($c_{12} = 1, c_{21} = 1$, сеть S_3).

Если обе системы субдоминантные, т. е. $Q_1 > 0$ и $Q_2 > 0$, то соотношения в вершинах сети имеют в зависимости от структуры сети следующий вид:

$$-\bar{x}_2 < 0, \bar{x}_2 < Q_2, \quad (S_1)$$

$$-\bar{x}_1 < 0, \bar{x}_1 < Q_1, \quad (S_2)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < Q_1, \bar{x}_2 - \bar{x}_1 < Q_2. \quad (S_3)$$

Если исходные элементарные системы также и регулярные субдоминантные, то согласно приведенным соотношениям любая связывающая сеть повышает устойчивость.

Если теперь $\bar{x}_1 < Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$, то сеть S_2 повышает устойчивость. Если $\bar{x}_1 > Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$, то сети S_1 и S_2 заведомо понижают устойчивость, а для сети S_3 этот вопрос зависит от более тонких соотношений параметров элементарных систем.

Если одна из вершин — для определенности «номер 1» — субдоминантная ($Q_1 > 0$), а вторая — супердоминантная ($Q_2 < 0$), то соотношения в вершинах сети в зависимости от структуры имеют следующий вид:

$$-\bar{x}_2 < 0, \bar{x}_2 > Q_2, \quad (S_1)$$

$$-\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_1 < Q_1, \quad (S_2)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < Q_1, \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > Q_2. \quad (S_3)$$

Очевидно, что неравенства первой строки выполняются всегда, т. е. сеть S_1 всегда повышает устойчивость такого набора. Сеть S_2 всегда понижает устойчивость системы в этом случае. Для сети S_3 этот вопрос зависит, как и выше, от более тонких соотношений параметров элементарных систем.

Пусть теперь обе системы супердоминантные ($Q_1 < 0, Q_2 < 0$). Функциональные соотношения при этом имеют вид:

$$-\bar{x}_2 > 0, \bar{x}_2 > Q_2, \quad (S_1)$$

$$-\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_1 > Q_1, \quad (S_2)$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > Q_1, \bar{x}_2 - \bar{x}_1 > Q_2. \quad (S_3)$$

Очевидно, что сети S_1 и S_2 всегда только понижают устойчивость, а для сети S_3 этот вопрос зависит от более тонких соотношений параметров элементарных систем.

Полученные результаты удобно свести в следующее утверждение.

Утверждение 7. Для двух элементарных систем с параметрами $\bar{x}_1, Q_1$ и $\bar{x}_2, Q_2$ связывающая сеть, повышающая устойчивость, существует в следующих случаях:

- 1) Если обе вершины субдоминантные: тогда при $\bar{x}_1 < Q_1, \bar{x}_2 < Q_2$ — это все возможные сети;
 при $\bar{x}_1 < Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$ — сеть S_2 , а также сеть S_3 (если дополнительно $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 < Q_2$);
 при $\bar{x}_1 > Q_1, \bar{x}_2 < Q_2$ — сеть S_1 , а также сеть S_3 (если дополнительно $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < Q_1$);
 при $\bar{x}_1 > Q_1, \bar{x}_2 > Q_2$ сеть S_3 (если $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < Q_1$ и $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 < Q_2$ одновременно).
- 2) Вершина с номером 1 субдоминантная, а с номером 2 — супердоминантная.
 Тогда сеть S_1 всегда повышает устойчивость;
 сеть S_2 всегда понижает устойчивость;
 сеть S_3 повышает устойчивость (если $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 > Q_2, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < Q_1$).
- 3) Обе вершины супердоминантные. Тогда сети S_1 и S_2 всегда понижают устойчивость;
 сеть S_3 повышает устойчивость (если $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 < Q_2, \bar{x}_1 - \bar{x}_2 > Q_1$).

Таким образом, по сравнению с моделью с произвольными интенсивностями здесь возможны случаи, когда для некоторых пар элементарных систем вообще не существует сети, повышающей

устойчивость. Существование и типичность таких «плохих» пар элементарных систем в каждом конкретном случае зависит от структуры множества $(\bar{x}, Q)$ в пространстве параметров модели, т. е. вида эволюционных уравнений и их зависимостей от параметров. Иначе говоря, для решения вопроса о существовании и особенно о типичности определенных пар элементарных систем должно быть задано распределение вероятностей в пространстве параметров модели. Очевидно, что могут быть задачи, в которых ни при каких значениях содержательных параметров не возникает подобных пар и, наоборот, только такие пары. Тем не менее некоторой характеристикой типичности такого поведения может служить оценка объема таких плохих пар во всем множестве допустимых пар элементарных систем. В содержательной ситуации такая оценка может возникнуть при равномерном распределении вероятности в пространстве параметров элементарных систем.

Очевидно, что каждой паре систем можно сопоставить вектор $(\bar{x}_1, Q_1, \bar{x}_2, Q_2)$ четырехмерного пространства с ограничениями $0 \leq \bar{x}_1, \bar{x}_2 \leq 1, 0 \leq Q_1, Q_2 \leq 1$, вытекающими из однородности критерия (1.5).

Утверждение 8. Если обе элементарные системы случайным образом выбраны из множества субдоминантных пар, то вероятность повышения устойчивости такой системы при структуре связи S_1 или S_2 равна 0.5, а при структуре связи S_3 — 2/3.

Если обе элементарные системы случайным образом выбраны из множества супердоминантных пар, то вероятность повышения устойчивости такой системы при структуре связи S_1 или S_2 равна нулю, а при структуре связи S_3 — 2/3.

Если одна из системы случайным образом выбрана из множества субдоминантных, а вторая — супердоминантных вершин, то вероятность повышения устойчивости такой системы при структуре связи S_1 или S_2 равна нулю или единице, в зависимости от направления переноса вещества — из субдоминантой вершины в

супердоминантную или в противоположном направлении соответственно. При структуре связи S_3 вероятность равна $3/4$.

Если типы компонентов пары не заданы заранее, то случайный выбор пары при сетях S_1 или S_2 с вероятностью $3/8$ приводит к стабилизации системы, а при сети S_3 вероятность повышения устойчивости равна $17/34$.

Если и пара элементарных систем и структура связи случайны (при равномерном распределении вероятности в соответствующих пространствах событий), то вероятность получить структуру, повышающую устойчивость, равна $35/72$.

Полученные результаты могут быть интерпретированы в рамках следующей модели. Пусть структура связи задана заранее, а тип элементарных систем определяется случайным образом, равновероятно из заданного класса. Тогда приведенное утверждение определяет вероятности образования структур, повышающих устойчивость. В частности, видно, что обмен в обе стороны играет более благоприятную роль в стабилизации, чем односторонний обмен.

В общем случае, при $N > 2$, вопрос существования стабилизирующей сети достаточно сложен, так как именно в системах этого типа и получен отмеченный выше результат — эквивалентность вопроса существования ST -сети и решения задачи разбиения. Ниже приведены некоторые достаточные условия существования стабилизирующих сетей.

Утверждение 9. Если в наборе элементарных систем имеется хотя бы одна субдоминантная и хотя бы одна супердоминантная системы, то существует связывающая сеть, повышающая устойчивость.

Если набор элементарных систем получается небольшой флуктуацией некоторого исходного значения параметров, то можно считать, что значения равновесных концентраций близки между собой.

Утверждение 10. Если в наборе элементарных систем выполнены условия

$$N|\bar{x}_i - \bar{x}_j| < \min[Q_1, \dots, Q_N], i, j = 1, \dots, N,$$

то любая связывающая сеть с равным количеством входящих и выходящих дуг для каждой вершины (локально-однородная сеть) повышает устойчивость системы.

Можно исследовать аддитивность рассматриваемых сетей, определив сумму двух сетей как сеть, у которой множество дуг является объединением множества дуг слагаемых (интенсивности, однако, по-прежнему равны единице). По индукции определение распространяется на конечное множество слагаемых. Содержательно такая ситуация может возникнуть при объединении сетей с предельно насыщенными каналами связи (т. е. интенсивности не увеличиваются при наложении связей). Можно показать, что и в этом случае сумма конечного набора сетей, повышающих устойчивость, также повышает устойчивость. Здесь, однако, в отличие от случая с произвольными интенсивностями, набор стабилизирующих пар не является базисом для построения сети любой сложности. И вообще, вопрос существования такого базисного набора сетей ограниченной размерности остается открытым. В связи с этим остается также открытым вопрос об «эволюционном» механизме получения больших, по количеству элементарных систем, сетей рассматриваемого типа.

7. Неориентированный граф

Граф топологии — некоторый неориентированный граф с одинаковыми или различными интенсивностями переноса. Это модель диффузии (возможно, неизотропной). Аналогия с диффузией здесь возникает потому, что в силу неориентированности связи каждой пары вершин перенос вещества происходит в обе стороны обязательно с равной интенсивностью. Диффузия неизотропна, так как даже при равных интенсивностях переноса по всем имеющимся в

сети ребрам, как правило, могут быть запрещенные пути. Изотропной диффузии соответствует полный граф с одинаковыми интенсивностями переноса по всем ребрам. Случай $N = 2$ сводится здесь к единственной взаимнообратной связи $c_{12} = c_{21} = c$ (вспомним сеть S_3). Здесь, по сути дела, наличие соответствующей интенсивности c , повышающей устойчивость пары элементарных систем, не гарантировано и зависит от соотношения параметров этих систем.

Также можно получить и ряд достаточных условий.

Утверждение 11. При достаточно малых значениях величин $|Q|$ любая диффузия на множестве только суб или только супердоминантных вершин понижает стабильность системы.

Утверждение 12. Если вершина с максимальной равновесной концентрацией супердоминантная, а вершина с минимальной равновесной концентрацией субдоминантная, то существует связывающая сеть, повышающая устойчивость.

Вернемся теперь к упомянутому ранее соответствию между стабильностью коллектива и динамическими эффектами в активной ткани, где связь между клетками осуществляется диффузией. Одной из излюбленных моделей активной ткани является среда, организованная на основе точечной модели Белоусова—Жаботинского. Именно на этой модели получены наиболее яркие пространственные эффекты. Оказывается, что коллектив элементарных систем Белоусова—Жаботинского также демонстрирует склонность к подвижности. Несмотря на то, что модель трехмерна, для нее в рамках той же идеологии можно провести классификацию по «темпераментам». При этом оказывается, что система Белоусова—Жаботинского при реальных значениях параметров не бывает регулярной субдоминантной. Поэтому шансов на образование стабильной сети здесь относительно немного.

8. Влияние экстремальных условий окружающей среды на иммунные сети

Моделирование дискретных иммунных сетей в данной работе приводится как иллюстрация прикладных возможностей разработанной нами общей теории динамических систем на сетях. С одной стороны, это демонстрирует возможность управления сложной системой путем формирования путей и интенсивностей обмена между подсистемами, с другой – возможность классификации объектов (динамических систем и структур связи), позволяющая в определенной мере предсказать динамику порождаемого этими объектами коллектива.

Важную роль в адаптации человека к экстремальным условиям окружающей среды играет система иммунитета. Одной из основных функций этой гомеостатической системы является защита организма от бактерий и вирусов, а также от внутренних врагов, таких как опухолевые клетки. Так, иммунологическое обследование космонавтов выявило ряд признаков функциональной перестройки в этой системе: снижении функциональной активности Т-лимфоцитов, угнетении активности лимфоцитов-естественных киллеров и повышении продукции высокоактивных кислородных радикалов. Важную роль в регуляции иммунного ответа имеют цитокины. Цитокины продуцируются и секретируются иммунокомпетентными клетками и выполняют функции медиаторов иммунной системы, обеспечивающих межклеточные кооперации, позитивную и негативную иммунорегуляцию. Функциональные сдвиги в организме человека, возникающие под влиянием комплекса специфических условий космического полета (невесомость, нервно-эмоциональное напряжение, искусственная среда обитания и проч.), представляют собой сочетание специфических изменений, обусловленных физической природой воздействующего фактора, и вторичных неспецифических проявлений, имеющих приспособительное значение. В связи с этим возникает необходимость детального изучения продукции этих биологически активных веществ у

человека, находившегося в экстремальных условиях (например, в условиях космического полета).

Одной из ведущих причин, приводящих организм опухоленосителей к гибели, является множественный рост пространственно разнесенных очагов опухолевых клеток. Под множественностью злокачественных новообразований понимают возникновение и существование в организме нескольких опухолей, которые могут появляться одновременно или через определенные промежутки времени. В ряде экспериментов показано, что дремлющее состояние опухоли может быть обусловлено взаимодействием макрофагов и иммунных лимфоцитов, преимущественно цитотоксических Т-лимфоцитов, с опухолевыми клетками. Благодаря высокой способности к миграции Т-лимфоциты могут циркулировать в ткани, пораженной множественными опухолями. Для теоретической и клинической онкоиммунологии представляют интерес вопросы устойчивости и дестабилизации множественных дремлющих опухолей в условиях наличия миграции цитотоксических Т-лимфоцитов между очагами опухоли. Математическое моделирование указывает на важность проведения экспериментальных исследований по учету влияния факторов, влияющих на функциональную активность клеточных элементов в системах множественных иммунозависимых опухолей и позволяет сформулировать вполне обоснованное предположение о том, что одним из механизмов, лежащих в основе формирования сдвигов в системе иммунитета при действии на организм человека факторов космического полета, являются изменения цитокинового статуса.

Формальная модель множественной опухоли в контексте модели дискретных иммунных сетей использует в качестве точечной модель локального клеточного противоопухолевого иммунитета.

С учетом миграции цитотоксических Т-лимфоцитов (ЦТЛ) между локальными очагами модель имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= P_i(x_i, y_i, \Theta_i) - c_{ii}x_i + \sum_{\substack{i \neq s, \\ s=1}}^N c_{is}x_s, \\ \frac{dy_i}{dt} &= Q_i(x_i, y_i, \Theta_i), \\ s &= 1, \dots, N,\end{aligned}$$

где в соответствии с выбором точечной модели

$$\begin{aligned}P_i(x_i, y_i, \Theta_i) &= j_i + \alpha_i x_i y_i / (1 + y_i) - \beta_i x_i y_i - \gamma_i x_i, \\ Q_i(x_i, y_i, \Theta_i) &= y_i(1 - \mu_i / (1 + \nu_i y_i) - x_i).\end{aligned}$$

Здесь x_i, y_i - количество ЦТЛ и опухолевых клеток в i -м очаге, соответственно $\Theta_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \mu_i, \nu_i, j_i)$ - вектор внутренних параметров модели: α_i - скорость наработки ЦТЛ, β_i - скорость убыли ЦТЛ в результате супрессорного действия опухолевых клеток, γ_i - скорость естественной гибели ЦТЛ, j_i - скорость стационарного (фоновое) потока ЦТЛ в очаг из окружающих тканей, μ_i и ν_i - показатели соответственно естественной резистентности организма и супрессии этой системы опухолевыми клетками, $\{c_{is}\}_1^N$ - неотрицательные коэффициенты интенсивности миграции ЦТЛ между очагами, N - количество очагов.

Состояние опухоли, при котором она не растет или растет очень медленно и в течение долгого времени не выявляется клинически, называется дремлющим. Дремлющему состоянию очага соответствует единственный топологический узел в точечной системе. Для такой точечной модели проявляются все свойства общей теории, разработанной нами для динамических систем на сетях (см., например, [10, 11]).

Согласно классификации возможных типов точечных систем все множество внутренних параметров $\{\theta_i\}_1^N$ системы (1) может быть разбито на непересекающиеся подмножества, соответствующие трем возможным случаям: регулярному субдоминантному, нерегулярному субдоминантному и супердоминантному. Эти области определяются достаточно сложными нелинейными неравенствами, зависящими от большого количества параметров. Поэтому точное описание этих областей представляет очень сложную задачу. Можно показать, что эти области не пусты.

Значения многих параметров в биологических системах могут довольно сильно варьировать и их конкретные значения определяются многими, в том числе и случайными, факторами. Поэтому часто для биологических систем определяющими для их поведения являются не те или иные значения их параметров, а области, в которых эти параметры находятся.

Для оценки объема и геометрии трех исследуемых областей в пространстве параметров были проведены численные эксперименты. Для этого в заданном объеме пространства параметров (параллелепипеде заданных размеров) случайным образом, равномерно, выбирались точки и затем проверялся основной критерий устойчивости, по значению которого выбранная точка относилась к одному из трех типов. Частота типов точечных систем - регулярный субдоминантный, субдоминантный, супердоминантный - при варьировании шести параметров точечной модели может распределяться следующим образом: подавляющее большинство систем (около 80%) относится к регулярному типу, и, следовательно, склонны к стабилизации множественной системы в целом; незначительный процент – субдоминантные системы, и ничтожный процент – супердоминантные.

Так, например, если все очаги относятся к регулярному субдоминантному типу, что можно связать с высокой супрессией опухолевыми клетками исходно низкого показателя естественной резистентности организма, то при этом любой малый обмен ЦТЛ

будет, как следует из теории динамических систем на сетях (1), стабилизировать множественную опухоль. Иммунологическая интерпретация этого факта заключается в том, что интенсификация процессов миграции ЦТЛ или их переноса жидкими средами организма с высокой вероятностью будет увеличивать стабильность существующих дремлющих опухолей и являться поэтому благоприятной для организма опухоленосителя. В настоящее время нет еще прямых экспериментальных подтверждений непосредственного влияния факторов экстремальных условий окружающей среды на перенос ЦТЛ средами. Однако есть основания полагать [9,10], что указанные факторы могли бы оказывать влияние на внутренние параметры точечных моделей, а именно на снижение фоновой активности ЦТЛ в очаге, а также на снижение показателя естественной резистентности и изменение уровня супрессии системы естественной резистентности опухолевыми клетками. Можно проиллюстрировать возможность учета влияния указанных факторов путем формирования направленного сдвига в системе естественной резистентности (агрегированные внутренние параметры μ_i и V_i , как диаграммы чередования типов при направленном изменении какого-либо внутреннего параметра - см., например, [11]).

При наличии очагов разных типов обмен ЦТЛ повышает устойчивость, если супердоминантные очаги являются источниками потоков ЦТЛ, а субдоминантные – стоками этих потоков. Эффектом такой стабилизирующей системы обмена может стать накопление ЦТЛ в определенных опухолевых очагах по сравнению с остальными очагами той же множественной опухоли.

Выше мы уже упоминали, что в биологических системах относительные вариации параметров нередко велики и лежат в интервале от одного до трех и более порядков. Это создает огромные трудности в проблеме формулировки состояний «нормы» и «патологии». В таком контексте приведенные выше результаты численных экспериментов имеют важное биологическое значение. Они позволяют говорить о том, с какой вероятностью в сложных

системах, организованных в виде сети, реализуется тот или иной тип точечных систем. А это, в свою очередь, дает ключ для оценки состояния сложной системы в целом и разработки рациональных путей управления ею.

Численные эксперименты для модели множественной опухоли наглядно демонстрируют возможность учета факторов, которые прямо или опосредованно изменяют параметры естественной резистентности иммунной системы. Кроме того, при наличии количественного подтверждения влияния факторов космического полета на интенсификацию переноса ЦТЛ жидкими средами организма и/или миграцию ЦТЛ между очагами можно оценить «знак» такого эффекта.

9. Моделирование электорального поведения населения в условиях альтернативных выборов

Проблема социальной безопасности общества в последнее время приобретает все большую актуальность. При этом социальная безопасность трактуется как результат взаимодействия угроз с управляемыми воздействиями государства, направленными на их разрешение, а также как уровень реализации жизненных интересов большинства членов общества. Когда государству не удается подавлять различные угрозы обществу, в нем нарастает социальная напряженность в виде различных социальных конфликтов, вплоть до массовых беспорядков или организованных акций протеста. Отсюда тот интерес, который вызывают попытки математического исследования вопросов социальной безопасности или причин и процессов проявления социальной напряженности в обществе.

В качестве приложения за основу в модельном описании выбран социально-психологический потенциал данного социального субъекта или социальной общности (см., например, [7]). Социально-психологический потенциал определяется как готовность данного социального субъекта или социальной общности осуществлять поведение в защиту выбранной системы ценностей или направления

своего развития. Мера величины такого потенциала определяется как функция от Q и S , где S есть производная от Q по времени, т.е. скорость изменений соотношения между сторонниками и противниками в электорате. В предлагаемой работе мы ограничиваемся достаточно специфическим классом моделей, порождаемым требованиями сохранения максимального значения социально-психологического потенциала P в условиях мобилизации ничем не ограничиваемых ресурсов для его поддержания в некотором определенном регионе.

Как правило, территориальные общности в социально-экономической действительности не только граничат между собой, но и обмениваются как материальными, так и миграционными потоками. Эти потоки представляют собой как собственно миграцию, приводящую к изменению в численном балансе между сторонниками и противниками, так и политическое влияние, выражающееся в возможности "открепительного" голосования и в прямой "покупке" голосов избирателей. Проблемной ситуацией в данном контексте является критическое влияние обозначенных выше факторов — их мы в контексте данной работы назовем трансграничными потоками — на устойчивость социально-экономических и социально-психологических процессов, как в отдельных очагах, так и в системе в целом.

Эффективный алгоритм для исследования влияния потоков между связанными очагами на устойчивость как отдельных очагов, так и системы в целом был разработан нами, как указывалось выше, в рамках теории динамических систем на сетях. Актуальный интерес представляет выяснение вопроса об изменении социально-психологического потенциала на фоне медленно меняющейся социально-экономической ситуации в отдельных регионах. Как было упомянуто, применение общей теории позволяет заключить, что при любых значениях внутренних параметров, характеризующих локальное состояние каждого из очагов, описываемых системой с переменными Q и S , появление миграции

неизбежно приводит к сдвигу рассматриваемой точки потенциального выбора в область устойчивости параметрического пространства. Таким образом, всякое межочаговое взаимодействие электоратов, динамика которых отвечает описанным выше условиям, приводит к обязательному снижению неопределенности электорального выбора.

Также моделировалось взаимодействие двух очагов. Рассматривались случаи, когда количество очагов равно двум и параметры обмена не только малые, но и большие, а также случаи, когда траектории стартовали вдали от локального равновесия. Так, был рассмотрен ряд ситуаций, где в роли очагов выступали конкретные республиканские электораты. Для иллюстрации среди них были выбраны достаточно типичные варианты. Компьютерное моделирование было проведено с использованием пакета Mathcad. Результаты моделирования позволяют сделать вывод о стабилизирующем воздействии межэлекторальных потоков на исход электорального выбора. Иными словами, при наличии ненулевых констант обмена на соответствующих интегральных кривых быстрее происходит затухание со временем амплитуды колебаний позиций электората. Компьютерные исследования различных вариантов обмена приводят к заключению, которое не противоречит выводам, полученным на основе критерия устойчивости, а именно: и при большой интенсивности обмена голосов сторонников и противников между очагами поведение электората выходит на более устойчивую определенность в выражении своей позиции при наличии ненулевых трансграничных потоков между регионами.

Таким образом, с помощью математического моделирования получены результаты, демонстрирующие влияние трансграничных потоков между регионами на электоральное поведение населения. Тем самым продемонстрировано, что структура и интенсивность трансграничных потоков (граф связи) могут приводить к качественным изменениям в поведении системы в целом — бифуркациям. Этот результат представляет большой интерес, так как

он демонстрирует принципиальную возможность управления процессом снижения социальной напряженности с помощью формирования и интенсивности трансграничных потоков между регионами.

10. Динамические модели экономических систем на сетях

Похож ли экономический кризис на эпидемию? В работе [5] Дж. Стиглицем с соавторами анализируется проблема возможности стабилизации финансовой системы путем предотвращения кризиса, опираясь на аппарат анализа экономических моделей на сетях. Рассматриваются две подсети, которые получаются из общей сети путем проекции на множество банков (подсеть банков) и множество фирм (подсеть фирм) соответственно. В этих подсетях объекты, находящиеся в узлах, уже однотипны, что позволяет, в принципе, подобрав подходящую для описания точечную модель (скажем, для регионального производства – см., например, [13, 14]) и, сделав соответствующую формализацию, опираясь на теории G-связных систем, получить серию математических результатов, содержательно интерпретирующих поведение как самых слабых («передовых») в отношении потери устойчивости (бифуркации) узлов (hubs), так и всей системы в целом – см. рис.3.

Дж. Стиглицем с соавторами проведен содержательный анализ сущности нового подхода в описании экономических процессов, а именно сделан упор на имманентно присущий экономическим взаимоотношениям, основанным на монетарной торговле, эффект самовоспроизведения. Именно существование автокаталитического процесса в экономических взаимоотношениях подразумевает, что взгляд на «усредненное» или «наиболее вероятное» поведение рассматриваемых экономических единиц не отражает динамику системы в целом. Автокаталитичность подразумевает, что поведение системы в целом подталкивается самыми «передовыми» (с наиболее интенсивным ростом) элементами сильнее, нежели типическими или «усредненными» элементами. Такой неформальный, практически физико-химический взгляд на экономические феномены и

использование теории систем на сетях, возможно, позволит дать новую содержательную интерпретацию некоторым кризисным явлениям в современной экономике.

Интересно упомянуть несколько примеров формального применения результатов теории G-связных систем к гипотетической сети, состоящей из однотипных двумерных точечных динамических систем, описывающих региональные фирмы. Так, согласно упомянутой теории если равновесные значения переменных во всех очагах региональной сети близки (т.е. набор участников достаточно гомогенный), то наличие связей повышает устойчивость такой региональной сети фирм. А если эти значения переменных существенно различаются и достаточно велики (набор фирм

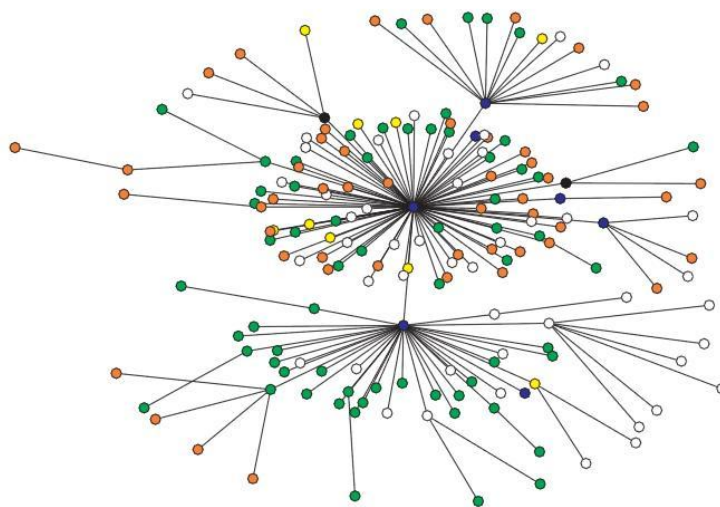


Рис.3. Пример минимального остовного дерева (субграф из 178 банков), Япония, 2004 год (по Стиглицу)

достаточно гетерогенный и сами фирмы довольно крупные), то связи между очагами в подсети Стиглица дестабилизируют такую

региональную сеть фирм. Если же в региональной сети присутствует большое количество очагов различных типов (участники сети очень разношерстны — есть и крупные и мелкие), то согласно теории факторы, облегчающие связи между участниками, способствуют стабилизации всей региональной сети. Наличие узлов, для которых возможен только односторонний поток (фирмы-доноры или фирмы-акцепторы), может привести к дестабилизации всей сети. Это, однако, не означает, что обмен, повышающий устойчивость, обязательно связан с наличием ребер обмена между всеми узлами сети фирм. При наличии узлов разных типов ребра обмена (связи) при определенных (указанных в теории) условиях могут как повышать, так и понижать устойчивость. Эффектом такой стабилизирующей системы обмена может стать накопление прибыли (денежных активов) в определенных узлах по сравнению с остальными узлами той же региональной сети фирм. Указанные модельные эффекты, возможно, найдут свое экспериментальное подтверждение. Это наше будущее исследование.

Заключение

В работе рассмотрены только некоторые особенности коллективного поведения динамических систем, связанные с конкретным моментом в «жизни» элементарных систем - возможностью потери устойчивости в коллективе под действием организации обмена определенной структуры. Оказалось, что эта возможность существенно зависит от типа элементарных систем — нами выделены три таких типа. Удалось также получить представление о преимущественном характере влияния структур связи того или иного вида на стабилизацию системы. Иначе говоря, возникла некоторая классификация объектов — динамических систем и структур связи, позволяющая в определенной мере предсказать динамику порождаемого этими объектами коллектива. Это очень важный момент всего исследования, так как классификация — это язык. А язык — это возможность перейти от

констатации фактов к их объяснению. И в этом — центральный момент применения «чистой» теории. Понятие выходит далеко за область формальной применимости.

Представленная теория лишь часть направления, в котором могут развиваться идеи синтеза и анализа динамических систем на графах. Биолог хотел бы получить строгий критерий потери устойчивости при больших интенсивностях обмена, а математик, указав на значительную сложность этой задачи, предпочитает формально более простой резонансный случай. Экономисту интересен перенос теории на модель с большим количеством нечетко определенных параметров (у него сейчас такая элементарная модель), а математик заинтересовался сопряженностью различных элементарных систем в коллективе. Дальнейшие исследования должны сформировать общий язык.

Литература

1. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. Изд. 2-е. М.: УРСС, 2004 г., [ISBN 5-354-00241-9](#).
2. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. Введение. М.; Мир. 1990.
3. Базыкин А.Д., Кузнецов Ю.А., Хибник А.И. Портреты бифуркаций. М.: Знание, 1989.
4. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М: Наука, 1978.
5. De Masi G., Fujiwara Y., Gallegati M., Greenwald B., Stiglitz J.E. An Analysis of the Japanese Credit Network.// arXiv:0901.2384v1 [q-fin.ST] 16 Jan 2009. 21 p.
6. R.D. Smith. The Spread of the Credit Crisis: View from a Stock Correlation Network.// arXiv:0901.1392, V1 [cond-mat.stat-mech] 10 Jan 2009.
7. Алексеева Е.И., Медведев И.Г. Математическая модель выборов в экстремальных ситуациях с трансграничными

- потоками // Прикладная нелинейная динамика, 2002. Т. 10. №1-2. С.137-145.
8. Алексеева Е.И., Киржнер В.М. Зависимость устойчивости набора динамических систем от структуры связи между ними // Доклады Академии наук СССР, 1990. Том 313, № 3. С. 521-524.
 9. Моруков Б.В., Рыкова М.П., Антропова Е.Н. Регуляция иммунной функции организма человека в условиях космического полета. Материалы XXX академических чтений по космонавтике. М., январь-февраль 2007 г. С. 458-459.
 10. Алексеева Е.И. Учет влияния экстремальных условий окружающей среды при моделировании дискретных иммунных сетей // Тр. ИСА РАН 2008. Т. 32(2). С. 279-285.
 11. Алексеева Е.И., Кузнецов В.А. Влияние миграции клеток на стабильность иммуногенных мультицентрических опухолей. БИОФИЗИКА. Том 35. Вып.3. С. 509-512.
 12. Любич Ю.И., Табачников М.И. Субгармонические функции на ориентированном графе // Сибирский математический журнал, 1969.Т. 10, №3. С. 600-613.
 13. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Описание целей деятельности фирмы в динамической модели экономического равновесия. М.: Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2009. 76 с.
 14. Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Исследование моделей рефлексивных стратегий в управляемых системах // М.: Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, 2001. 38 с.

Оглавление

Введение -----	3
1. Динамические системы и устойчивость -----	4
2. Формальная постановка задачи -----	9
3. Связи и типы точечных систем -----	15
4. Структуры связи, интенсивности связи, наборы элементарных систем-----	19
5. Произвольные связи и произвольные интенсивности-----	21
6. Произвольные связи, одинаковые интенсивности -----	30
7. Неориентированный граф-----	35
8. Влияние экстремальных условий окружающей среды на иммунные сети -----	37
9. Моделирование электорального поведения населения в условиях альтернативных выборов-----	42
10. Динамические модели экономических систем на сетях -----	45
Заключение -----	47
Литература-----	48