

УДК 519.634

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ НА ОКЕАНИЧЕСКОМ ШЕЛЬФЕ. ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ РАССЕЙЯНИЕ¹⁾

© 2010 г. В. Н. Котеров, Ю. С. Юрезанская

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: kotеров@ccas.ru, july@ccas.ru

Поступила в редакцию 13.07.2009 г.

Рассматривается задача моделирования переноса взвешенных веществ в водных объектах в тех случаях, когда размер ареала их распространения значительно превышает глубину акватории. Формулируется и анализируется модель горизонтального рассеяния загрязняющих субстанций. Обсуждаются вычислительные подходы к расчету переноса взвешенных веществ в водной среде. Предлагается бессеточный стохастический численный алгоритм, наследующий достоинства двух известных методов: метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц. Путем сравнения результатов расчетов с точным решением модельной задачи о турбулентном рассеянии шлейфа загрязнения, возникающего в результате действия непрерывного источника взвеси, демонстрируется работоспособность и особенности предложенного метода. Библ. 23. Фиг. 4.

Ключевые слова: численные методы, уравнение переноса и диффузии, шельф, взвешенные вещества, турбулентное перемешивание, закон 4/3 Ричардсона, продольная дисперсия, эффект сдвига, стохастические методы.

1. ВВЕДЕНИЕ

При проведении работ на океаническом шельфе, например при строительстве буровых платформ, прокладке подводных трубопроводов, дноуглубительных работах и т.п., возникает необходимость в оценке влияния этих антропогенных воздействий на окружающую среду. Подобные оценки, предваряющие осуществление любого крупного проекта, выполняются методами математического моделирования. Практический интерес, в частности, представляет расчет распределения минеральной взвеси сложного фракционного состава на больших расстояниях от источника загрязнения, где концентрации субстанций невелики. В этой дальней зоне применим принцип суперпозиции, означающий, что концентрация полидисперсной взвеси, возникающая в результате действия распределенного и/или непрерывного источника, представима в виде суммы концентраций от распределенных по пространству и/или по времени мгновенных точечных источников монодисперсной взвеси.

Многие задачи расчета распространения загрязняющих веществ на океаническом шельфе характеризуются малостью глубины акватории $H(\mathbf{x})$ по сравнению с горизонтальным размером ареала их распространения (здесь и далее $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — горизонтальные декартовы координаты). Мал также уклон дна ($|\partial H/\partial x_i| \ll 1$). В подобных случаях в [1] для описания распределения усредненной по глубине концентрации $G(\mathbf{x}, t, t_0)$ полидисперсной взвеси в облаке, возникающем в результате действия в момент времени $t = t_0$ мгновенного точечного источника единичной массы, предложено использовать следующее уравнение:

$$\frac{\partial H(\mathbf{x})G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{H(\mathbf{x})(u_i(\mathbf{x}, t)G + J_i[G])\} + W(t-t_0)G = 0 \quad \text{при } t > t_0, \quad (1.1)$$

$$G = \frac{1}{H(0)}\delta(\mathbf{x}) \quad \text{при } t = t_0, \quad G \equiv 0 \quad \text{при } t < t_0.$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 08-07-00118, 08-01-00435) и Программы № 3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Здесь δ – дельта-функция, u_i (далее $(u_1, u_2) = \mathbf{u}$) и $J_i[G]$ – усредненные по глубине компоненты скорости течения и компоненты потока взвешенного вещества, обусловленные горизонтальным перемешиванием. Предполагается, что источник взвеси действует в точке $\mathbf{x} = 0$. Функция W – меняющаяся со временем эффективная гидравлическая крупность (скорость осаждения) полидисперсной взвеси, зависящая от начального дисперсного состава взвеси, от положения источника взвеси над дном акватории, от интенсивности вертикального турбулентного обмена и от адсорбирующих свойств дна. Для ее нахождения достаточно решить N одномерных эволюционных задач (см. [1], N – количество фракций взвеси).

После решения задачи (1.1) усредненная по глубине концентрация взвеси C [кг/м³] от пространственно распределенного и/или непрерывно действующего источника загрязнения может быть найдена с помощью упоминавшегося выше принципа суперпозиции. Например, для случая непрерывного точечного источника взвеси, начинающего действовать в момент времени $t = 0$, имеем

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \dot{M}(t_0) G(\mathbf{x}, t, t_0) dt_0, \quad (1.2)$$

где \dot{M} [кг/с] – мощность источника.

Настоящая работа является продолжением публикации [1]. Она характерна следующим.

1. Рассматривается эмпирическая модель горизонтальной турбулентной диффузии на океаническом шельфе, определяющая структуру операторов $J_i[G]$.

2. Обсуждаются три распространенных вычислительных подхода к моделированию переноса взвешенных веществ в водной среде:

а) сеточные методы, связанные с численным интегрированием полуэмпирического уравнения переноса и турбулентной диффузии, называемого также транспортно-диффузионной моделью (см., например, [2], [3]);

б) метод дискретных облаков, основанный на прослеживании траекторий движения отдельных облаков взвеси, распределение концентрации вещества в которых представляется в виде гауссовых функций (см., например, [4]);

в) метод дискретных частиц, представляющий собой стохастический метод, связанный с рассмотрением ансамбля “блуждающих частиц” (см., например, [5]–[7]).

3. Предлагается новый стохастический численный алгоритм расчета переноса взвеси, являющийся комбинацией второго и третьего подходов и наследующий их достоинства.

4. На модельных примерах путем сравнения результатов расчетов с точным решением задачи переноса и диффузии взвеси демонстрируется работоспособность предложенного метода.

2. ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ ТУРБУЛЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ В ОДНОРОДНОМ И ИЗОТРОПНОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим прежде всего модельную задачу о рассеянии консервативной (т.е. не осаждающейся) пассивной примеси в не меняющемся по глубине z потоке жидкости, который движется с постоянной скоростью U в направлении оси x_1 горизонтальной декартовой системы координат (x_1, x_2) . Пусть этот двумерный турбулентный поток однороден и изотропен. Тогда, в соответствии с классическими представлениями, усредненная по стохастическому ансамблю возможных реализаций концентрация G примеси, возникающая в результате действия в момент времени $t = 0$ в точке $\mathbf{x} = 0$ мгновенного изотропного источника единичной массы, может быть описана функцией

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi H \sigma^2(t)} \exp \left[-\frac{(x_1 - Ut)^2 + x_2^2}{2\sigma^2(t)} \right], \quad (2.1)$$

в которой $\sigma^2(t)$ представляет собой дисперсию распределения вещества примеси, $\sigma(t)$, соответственно, определяет характерную полуширину облака загрязнения, а H – постоянная глубина потока.

Нетрудно проверить, что функция (2.1) при $t > 0$ удовлетворяет уравнению переноса и диффузии

$$\frac{\partial G}{\partial t} + U \frac{\partial G}{\partial x_1} = K^T(t) \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.2)$$

с зависящим от времени коэффициентом горизонтального турбулентного обмена

$$K^T(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Зависимость K^T от времени в данном случае эквивалентна зависимости коэффициента турбулентного обмена от размера $l(t) = 2\sigma(t)$ диффундирующего облака. Действительно, пусть

$$\sigma^2(t) = A_n t^n, \quad A_n, n = \text{const}. \quad (2.4)$$

Тогда, согласно (2.3), $K^T(t) = 0.5nA_n t^{n-1}$ и

$$K^T(t) = B_\omega t^\omega, \quad \omega = \frac{2(n-1)}{n}, \quad B_\omega = \frac{n}{2^{(3n-2)/n}} A_n^{1/n}. \quad (2.5)$$

Если в (2.4) положить $n = 3$, то $\omega = 4/3$. Зависимость (2.5) в этом случае выражает так называемый “закон 4/3” (см. [8]), сформулированный Ричардсоном в 1926 г. с помощью анализа доступных ему в то время экспериментальных данных о турбулентной диффузии компактных объектов различного пространственного масштаба в атмосфере. Случай $n = 1$, т.е. $\omega = 0$, соответствует не зависящему от размера эволюционирующего облака коэффициенту диффузии (далее он будет называться *обычной диффузией*).

Следует, однако, подчеркнуть, что уравнение (2.2) с изотропным коэффициентом диффузии $K^T(t)$ неприменимо для решения задачи турбулентного рассеяния взвешенного вещества от непрерывно действующего источника. Действительно, с помощью фундаментального решения (2.1) и принципа суперпозиции (1.2) распределение концентрации $C(\mathbf{x}, t)$ взвеси в этом случае можно записать в виде

$$C(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \dot{M}(t_0) G(x_1 - U(t-t_0), x_2, t-t_0) dt_0. \quad (2.6)$$

Можно показать (см. [9]), что функция (2.6) вне точки $\mathbf{x} = 0$ удовлетворяет следующему уравнению переноса и диффузии:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} K_{11} \frac{\partial C}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} K_{22} \frac{\partial C}{\partial x_2},$$

в котором компоненты тензора диффузии K_{ii} являются функционалами, зависящими как от динамики изменения мощности источника $\dot{M}(t)$, так и от скорости потока U , а именно:

$$K_{ii} = \frac{\int_0^t \dot{M}(t_0) K^T(t-t_0) G'_{x_i}(x_1 - U(t-t_0), x_2, t-t_0) dt_0}{\int_0^t \dot{M}(t_0) G'_{x_i}(x_1 - U(t-t_0), x_2, t-t_0) dt_0}, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Здесь штрихи над функцией G означают частные производные от функции (2.1) по ее аргументам, указанным подстрочными индексами.

Формула (2.7) показывает, что даже в простейшем случае однородного и изотропного турбулентного течения коэффициент турбулентного обмена не может считаться локальной изотропной функцией состояния потока, если рассматривается протяженный во времени источник взвешенного вещества, а диапазон размеров вихревых структур, определяющих зависимость $\sigma^2(t)$, широк и в масштабах задачи не ограничен сверху. (Более точно нужно, конечно, говорить об ограниченности спектра волновых чисел турбулентных пульсаций.)

Предположение об изотропии горизонтальной океанической турбулентности в достаточно больших пространственных масштабах, которое позволяет ввести понятие скалярного коэффициента обмена K^T , может быть подвергнуто критике. Однако представляется, что приводимые далее экспериментальные данные позволяют принять это предположение, по крайней мере в первом приближении.

Для таких задач свойство локальности и изотропии коэффициента обмена выполняется лишь в случае обычной диффузии, когда дисперсия $\sigma^2(t)$ является линейной функцией времени, т.е. когда коэффициент K^T в (2.7) не зависит от времени и $K_{ii} = K^T$. Конечно, в каждом конкретном случае путем подбора эффективного коэффициента диффузии можно добиться соответствия результатов расчетов по моделям турбулентной и обычной диффузии в нескольких удачно расположенных контрольных точках, если полагать этот эффективный эмпирический коэффициент зависящим от масштаба изучаемого явления, т.е. от рассматриваемой задачи. Однако в других точках расхождение может быть значительным. Соответствующий пример приведен в [6], [7].

3. ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Реальная трехмерная океаническая турбулентность обладает рядом специфических особенностей, описанных, например, в [5]. Строго говоря, она может считаться локально однородной и изотропной лишь в масштабах, значительно меньших глубины акватории, так как стратификация воды в глубоких водоемах или глубина хорошо перемешанного мелкого водоема ограничивают максимальный вертикальный размер турбулентных вихрей. Считается, что по последней причине процесс турбулентного перемешивания можно разделить на горизонтальный турбулентный обмен и вертикальную турбулентную диффузию.

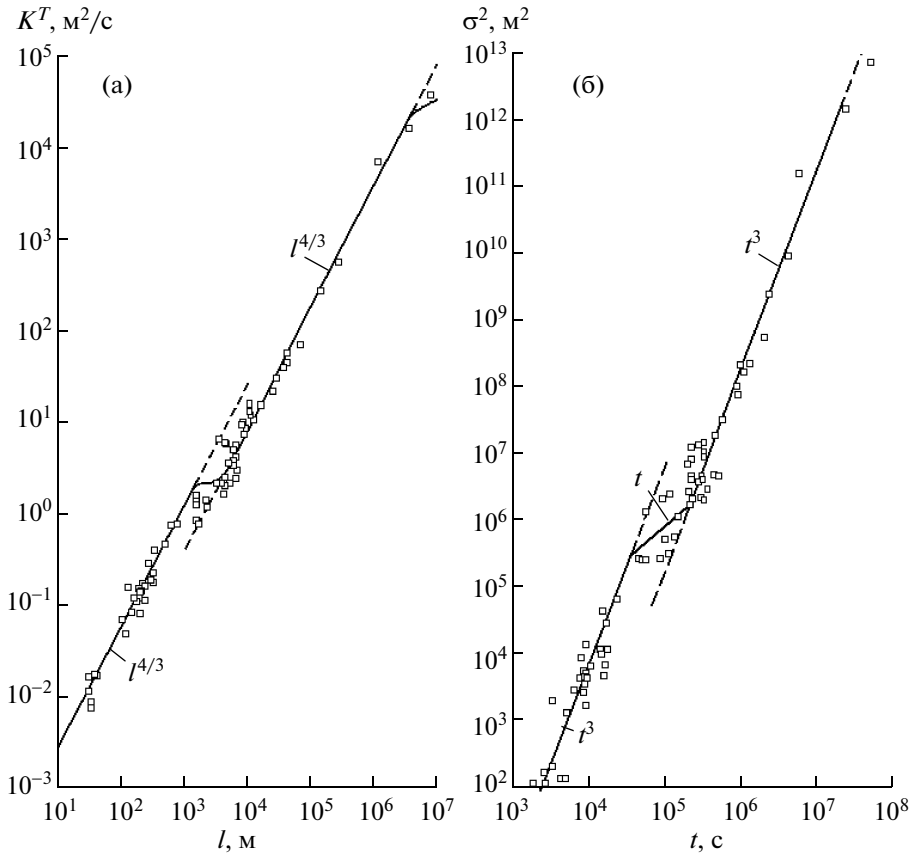
Диапазон горизонтальных размеров вихревых структур океанической турбулентности чрезвычайно широк. Вследствие этого коэффициент горизонтального турбулентного обмена K^T существенным образом зависит от масштаба l изучаемого явления. Зависимость $K^T(l)$ может быть получена в опытах с диффузией пятен трассеров (см., например, [5]). Такие экспериментальные данные систематизированы в [10], [11]. Результат представлен на фиг. 1а (см. [12], а также [5], [13]).

Фиг. 1а хорошо согласуется с предложенной в [14], [15] теоретической схемой распределения кинетической энергии по разномасштабным горизонтальным турбулентным движениям в океане. Согласно этой схеме, в спектре океанической турбулентности можно ожидать трех различных зон притока энергии, а именно: в глобальных масштабах $l \sim a_1 = 10^6$ м, в масштабах инерционных и приливных колебаний $l \sim a_2 = 10^4$ м и в масштабах ветровых волн $l \sim a_3 = 10$ м. В промежутках между зонами энергоснабжения приток внешней энергии невелик, и здесь для горизонтальной океанической турбулентности могут приближенно выполняться универсальные законы инерционного интервала спектра турбулентных пульсаций, такие как “закон 5/3” Колмогорова для энергии турбулентности и вытекающий из него “закон 4/3” Ричардсона для коэффициента турбулентной диффузии (см., например, [16]). Из фиг. 1а видно, что в диапазоне масштабов $10-10^3$ м и 10^4-10^6 м имеется приемлемое согласие экспериментальных точек с локальными прямыми (в логарифмическом масштабе), выражающими “закон 4/3”.

При построении графика, представленного на фиг. 1а, в работе [12] использовался следующий способ обработки экспериментальных данных. Исходными данными служили последовательные съемки диффундирующих пятен трассеров, по которым определялась дисперсия σ^2 их горизонтальных распределений как функция времени t . Затем с помощью формулы $K^T = \sigma^2/(4t)$ определялся коэффициент K^T , а соответствующая величина масштаба l принималась равной 3σ .

Для целей численного моделирования процесса рассеяния загрязняющих веществ наиболее удобной характеристикой горизонтального турбулентного обмена является зависимость $\sigma^2(t)$, отражающая структуру горизонтальных турбулентных пульсаций и непосредственно определяемая в экспериментах. Однако работы [10], [11], содержащие исходные экспериментальные данные, нам недоступны. Поэтому эта зависимость восстанавливалась нами по фиг. 1а с учетом принятого в [12] способа обработки экспериментальных данных. Результат представлен на фиг. 1б.

Показанные на фиг. 1б локальные прямые (в логарифмическом масштабе) соответствуют характерной для “закона 4/3” кубической ($n = 3$) зависимости (2.4) дисперсии σ^2 от времени t со значением параметра $A_3 = 8 \times 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}^3$ в наиболее интересующей нас области промежуточных масштабов $10-10^3$ м и с $A_3 = 2 \times 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с}^3$ в области больших масштабов 10^4-10^6 м. В зоне энер-



Фиг. 1.

госнабжения на фиг. 1б принят линейный закон роста дисперсии ($\sigma^2 = A_1 t$, $A_1 = 9 \text{ м}^2/\text{с}$), характерный для не зависящего от пространственного масштаба коэффициента горизонтального турбулентного обмена.

Следует подчеркнуть, что представленная на фиг. 1б зависимость $\sigma^2(t)$, которую можно называть *стандартной эмпирической моделью горизонтального турбулентного обмена*, количественно оправдывается лишь для средних условий, существующих в океане. В случае конкретных регионов из-за специфики ряда факторов, таких, например, как орография дна, погодные условия и т.п., в формуле (2.4) может меняться не только величина коэффициента A_n , но и сам показатель степени n . Данный эффект особенно сильно должен проявляться во внутренних водоемах, в которых циркуляция вод и энергоснабжение турбулентных движений определяется не приливными и инерционными колебаниями, а синоптическими процессами (см., например, [17], [18]). Поэтому перед проведением расчетов распространения взвешенных веществ в конкретном регионе желательно по возможности экспериментальным путем определить характерный для данного региона вид зависимости $\sigma^2(t)$ с целью выявления отличий от средних ситуаций, адекватных стандартной эмпирической модели.

Обобщая изложенное выше, линейные операторы в (1.1), определяющие компоненты горизонтального турбулентного потока взвешенного вещества, будем задавать в виде

$$J_i[G] = J_i^T[G] = -K^T(\mathbf{x}, t) \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad K^T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} n(\mathbf{x}, t) A_n(\mathbf{x}, t) t^{n(\mathbf{x}, t)-1}, \quad (3.1)$$

где эмпирические параметры n и A_n могут быть, вообще говоря, медленно меняющимися функциями координат \mathbf{x} и времени t , устанавливаемыми по экспериментальным данным о горизонтальной дисперсии $\sigma^2(t)$ пятен трассеров в рассматриваемом регионе. Подчеркнем еще раз, что выражение (3.1) может быть применено только для моделирования распространения взвешенных веществ от мгновенных точечных источников.

4. ЭФФЕКТ СДВИГА И ПРОДОЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ

Существенным недостатком модели (1.1), (3.1) является то, что при ее выводе было использовано допущение о независимости горизонтальной скорости \mathbf{u} потока от вертикальной координаты z (см. [1]), хотя в реальности из-за наличия придонного пограничного слоя величина \mathbf{u} всегда меняется от практически нулевых значений у дна до конечных значений у поверхности акватории. Известно (см. [19]), что в подобном случае значительный вертикальный градиент (сдвиг) горизонтальных компонент скорости потока приводит к существенному изменению законов рассеяния взвешенных веществ, интенсифицируя перенос взвеси в направлении скорости усредненного по глубине течения. Данный эффект называется продольной дисперсией или *эффектом сдвига* (см., например, [20]).

На океаническом шельфе величина эффекта должна прежде всего зависеть от вертикального сдвига горизонтальной скорости потока, т.е. от глубины H , и от скорости потока на поверхности акватории, которая по порядку величины совпадает с усредненной по глубине скоростью $|\mathbf{u}|$. Простейшая модель (см., например, [20]) заключается в добавлении к горизонтальным компонентам турбулентного потока взвеси (3.1) дополнительного диффузионного члена, действующего в направлении вектора скорости усредненного по глубине течения. Коэффициент этой продольной дисперсии определяется выражением $K^D = \gamma H |\mathbf{u}|$ (вид этого выражения легко установить, например, с помощью теории размерностей). В нем характеризующий рассматриваемый регион безразмерный фактор γ зависит от нормированного на свое среднее значение вертикального распределения горизонтальной скорости потока (фактор γ обращается в ноль, если это распределение однородно) и от безразмерного распределения коэффициента вертикальной диффузии. Например, согласно [20], [21], для Северного моря $\gamma = 0.45$.

Итак, следуя изложенным концепциям, в (1.1) компоненты потока взвешенного вещества, обусловленные горизонтальным перемешиванием, в настоящей работе будем представлять в виде

$$J_i[G] = -K_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_j}, \quad K_{ij} = K^T(\mathbf{x}, t) \delta_{ij} + K_{ij}^D(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{K}^D = \left\| K_{ij}^D \right\| = \gamma H |\mathbf{u}| \begin{vmatrix} \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Здесь K_{ij} – компоненты тензора горизонтальной дисперсии, являющегося суммой тензора горизонтальной турбулентной диффузии (δ_{ij} – символ Кронекера) и тензора продольной дисперсии \mathbf{K}^D ($\varphi = \arccos(u_1/|\mathbf{u}|)$) – угол наклона вектора скорости потока к оси x_1 системы координат.

Подчеркнем, что понятие продольной дисперсии имеет чисто математическую природу и возникает при попытках описания распространения взвеси с помощью осредненных по глубине уравнений. Физической причиной возникновения в этих моделях данного диффузионного механизма продольного переноса вещества являются реальные вертикальные неоднородности горизонтальной скорости потока.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЕРЕНОСА ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

Вычислительные подходы к моделированию переноса взвешенных веществ в водной среде при пространственно распределенном и/или непрерывно действующем источнике загрязнения можно разделить на три основные группы, обсуждаемые ниже.

Сеточные численные методы интегрирования транспортно-диффузионной модели эффективны, если коэффициент горизонтального турбулентного обмена считается локальной мгновенной функцией состояния потока или если для его расчета применяются полуэмпирические дифференциальные модели турбулентности (см., например, [22]). Такой подход, однако, не дает возможности учесть характерную для рассматриваемых задач зависимость коэффициента турбулентной диффузии от размера диффундирующего объекта (см. разд. 2 и 3 настоящей работы). Есть, конечно, возможность численного интегрирования большой совокупности задач (1.1), (4.1), описывающих распространения отдельных облаков взвеси, с последующим суммированием их решений (см. (1.2)). Однако ясно, что подобный алгоритм крайне неэффективен с точки зрения вычислительных затрат.

Метод дискретных облаков использует приближенное представление распределения концентрации взвеси в отдельном облаке, возникающем в результате действия мгновенного точечного источника, гауссовой функцией. Положение центра \mathbf{x}_0 этой функции прослеживается с помощью уравнения $d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$. Существует обобщение метода, учитывающее поправки, возникающие в случае акваторий с медленно меняющимся дном и слабо неоднородным (в масштабах размера облака) полем скорости потока (см. [4]). Вычислительная эффективность такого подхода довольно высока. Например, в простейшем случае непрерывного точечного источника в однородном и изотропном потоке (см. разд. 2) метод эквивалентен расчету интеграла (2.6) методом прямоугольников. Однако так как с течением времени размеры облаков сильно увеличиваются, то метод дискретных облаков неприменим в случае сильно неоднородных полей скорости \mathbf{u} , содержащих области возвратных течений и/или застойные зоны.

Стохастический метод дискретных частиц основан на рассмотрении ансамбля точечных “блуждающих частиц”, каждой из которых приписывают определенную массу загрязняющего вещества. Концентрацию $C = M/\Delta x$ взвеси в точке \mathbf{x} акватории определяют путем введения вокруг этой точки малого контрольного объема Δx и подсчета полной массы взвеси M , принадлежащей попавшим в контрольный объем дискретным частицам. В силу своей стохастической природы этот метод свободен от указанного выше недостатка, присущего методу дискретных облаков. Однако по этой же причине для достижения приемлемой точности расчета на больших расстояниях от источника загрязнения, где концентрация взвеси мала, требуется очень большое количество дискретных частиц.

Замечание. При конкретной реализации стохастического метода дискретных частиц часто не принимают во внимание необходимость использования специального закона случайных блужданий (см. [6], [7]), обеспечивающего специфическую для горизонтальной океанической турбулентности зависимость $\sigma^2(t)$.

6. СТОХАСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОБЛАКОВ

Опишем основные моменты вычислительной методики, совмещающей, как нам представляется, достоинства метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц. Для простоты глубину акватории H будем считать постоянной.

Представим распределение загрязняющей взвеси в акватории совокупностью дискретных облаков, порождаемых действием мгновенных точечных источников. Каждое облако будем характеризовать моментом его возникновения t_0 , координатами центра облака $\mathbf{x}_0(t)$, массой взвеси $m(t)$ и дисперсией распределения вещества $\sigma_c^2(t)$. Распределение взвеси в облаке опишем гауссовой функцией:

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{m(t)}{2\pi H \sigma_c^2(t)} \exp \left[-\frac{[x_1 - x_{01}(t)]^2 + [x_2 - x_{02}(t)]^2}{2\sigma_c^2(t)} \right]. \tag{6.1}$$

Значение полной концентрации взвеси в произвольной точке акватории будем отыскивать путем суммирования концентраций взвеси в отдельных облаках.

В отличие от метода облаков примем, что центры $\mathbf{x}_0(t)$ испытывают дискретные случайные блуждания с дисперсией $\sigma_x^2(t)$, переходя на каждом временном шаге $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ из положения \mathbf{x}_0^n в положение \mathbf{x}_0^{n+1} по закону

$$\begin{aligned} x_{0i}^{n+1} &= x_{0i}^n + u_i(\mathbf{x}_0^n, t_n) \Delta t_n + N(\sigma_x^2(t_{n+1}) - \sigma_x^2(t_n)) + N(2K_n^D \Delta t_n) s_i^n, \\ K_n^D &= \gamma H |\mathbf{u}(\mathbf{x}_0^n, t_n)|, \quad s_1 = \cos \varphi(\mathbf{x}_0^n, t_n), \quad s_2 = \sin \varphi(\mathbf{x}_0^n, t_n). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь $N(D)$ – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 0 и дисперсией D , φ – угол наклона вектора скорости потока к оси x_1 системы координат (см. (4.1)).

Изменение массы взвеси в облаке будем рассчитывать, например, с помощью соотношения

$$m(t_{n+1}) = m(t_n) \exp \{ -[W(t_{n+1} - t_0) + W(t_n - t_0)] \Delta t_n / (2H) \}.$$

Для окончательной формулировки алгоритма нужно связать дисперсию распределения вещества в облаке $\sigma_c^2(t)$ и дисперсию случайных блужданий центра облака $\sigma_x^2(t)$ с дисперсией $\sigma^2(t)$,

характеризующей спектр горизонтальных турбулентных пульсаций потока (см. разд. 2 и 3 настоящей работы). Положим

$$\sigma_c^2(t) = \alpha \sigma^2(t-t_0), \quad \sigma_x^2(t) = (1-\alpha)\sigma^2(t-t_0),$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ – настроечный параметр алгоритма. Легко видеть, что случай $\alpha = 1$ соответствует методу дискретных облаков (при отсутствии продольной дисперсии, когда в (6.2) будет $\gamma = 0$), а случай $\alpha = 0$ – стохастическому методу дискретных частиц.

Можно ожидать, что если поле скорости \mathbf{u} близко к однородному, то использование параметра α , близкого к единице, будет наиболее экономичным (в смысле минимизации требуемого количества дискретных облаков). Напротив, при сильно неоднородных полях, содержащих области возвратного течения и/или циркуляционные зоны, потребуются расчеты с малыми значениями параметра α . При заданном поле скорости \mathbf{u} проверка достоверности получаемых в результате расчетов результатов может проводиться путем сравнения решений, получающихся при последовательном уменьшении этого параметра.

7. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВЗВЕСИ В ПОТОКЕ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

С целью тестирования предложенного алгоритма рассмотрим задачу расчета переноса примеси в потоке со сдвигом скорости, предполагая, что поток движется параллельно оси x_1 системы координат. Ограничимся здесь случаем консервативной взвеси (пример расчета осаждающейся полидисперсной взвеси в потоке без сдвига и сравнение результатов с точным решением даны в [23]).

В соответствии с моделью (1.1), (4.1), распределение концентрации взвеси в облаке, возникающем в результате действия в момент времени $t = 0$ мгновенного точечного источника единичной массы, в данном случае описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + U(1+ax_2)\frac{\partial G}{\partial x_1} = [K^T(t) + \gamma HU|1+ax_2|]\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + K^T(t)\frac{\partial^2 G}{\partial y_2^2}, \quad (7.1a)$$

$$G = \frac{1}{H}\delta(\mathbf{x}) \quad \text{при } t = 0,$$

$$K^T(t) = \frac{n-1}{2}A_n t^{n-1}, \quad A_n, n = \text{const}. \quad (7.1b)$$

Здесь параметры a и γ задают величины горизонтального и вертикального сдвига скорости.

Нам не удалось проинтегрировать задачу (7.1) в элементарных функциях для общего случая $a \neq 0, \gamma \neq 0$. Поэтому рассмотрим далее два частных примера.

Вертикальный сдвиг скорости отсутствует ($\gamma = 0$). Заменой переменных

$$x'_1 = x_1 - U(1+ax_2)t, \quad x'_2 = x_2, \quad t' = t, \quad (7.2)$$

уравнение (7.1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial G}{\partial t} = K_{11}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + 2K_{12}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} + K_{22}(t)\frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2}, \quad (7.3a)$$

$$K_{11}(t) = [1 + (aUt)^2]K^T(t), \quad K_{12}(t) = -aUtK^T(t), \quad K_{22}(t) = K^T(t) \quad (7.3b)$$

(штрихи у новых переменных здесь и далее опущены).

Можно проверить, например непосредственной подстановкой, что решением уравнения (7.3) является следующая гауссова функция:

$$G = \frac{1}{2\pi HS} \exp \left[-\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{S^2} \left(\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{S_{12}x_1x_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \right], \quad S^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - S_{12}^2, \quad H \int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} G dx_1 dx_2 = 1, \quad (7.4a)$$

в которой

$$\frac{d\sigma_1^2}{dt} = 2K_{11}(t), \quad \frac{dS_{12}}{dt} = 2K_{12}(t), \quad \frac{d\sigma_2^2}{dt} = 2K_{22}(t). \quad (7.46)$$

Изолинии функции (7.4а) представляют собой эллипсы, главные оси которых повернуты на угол $\theta = 0.5 \arctg[2S_{12}/(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)]$ относительно осей системы координат (x_1, x_2) .

Интегрируя (7.4б) с учетом (7.1б), (7.3б), получаем

$$\sigma_1^2(t) = A_n t^n + \frac{n}{n+2}(aU)^2 A_n t^{n+2} + \sigma_{10}^2, \quad S_{12}(t) = -\frac{n}{n+1} aUA_n t^{n+1} + S_{120}, \quad \sigma_2^2(t) = A_n t^n + \sigma_{20}^2. \quad (7.5)$$

Постоянные интегрирования σ_{10} , σ_{20} , S_{120} здесь характеризуют размеры и ориентацию мгновенного компактного “не изотропного” источника взвеси. Для точечного источника имеем $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$. Если источник взвеси изотропный и имеет характерный размер σ_0 , то $\sigma_{10} = \sigma_{20} = \sigma_0$, $S_{120} = 0$.

Итак, возвращаясь к исходным переменным с помощью формул (7.2), находим, что решение задачи (7.1) имеет вид

$$G = \frac{1}{2\pi HS} \exp \left[-\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{S^2} \left(\frac{(x_1 - U(1 + ax_2)t)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} - \frac{S_{12}(x_1 - U(1 + ax_2)t)x_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \right], \quad (7.6)$$

$$S^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - S_{12}^2,$$

в котором функции $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $S_{12}(t)$ удовлетворяют соотношениям (7.5) с $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$. При $a = 0$ это решение переходит в выписанную в разд. 2 функцию (2.1), описывающую распределение взвеси, возникающее в результате действия мгновенного точечного источника единичной массы в однородном потоке.

Горизонтальный сдвиг скорости отсутствует ($a = 0$). В этом случае справедливы все приведенные выше выкладки, за исключением того, что

$$K_{11}(t) = K^T(t) + \gamma HU = \frac{n}{2} A_n t^{n-1} + \gamma HU, \quad K_{12}(t) = 0, \quad K_{22}(t) = \frac{n}{2} A_n t^{n-1}. \quad (7.7)$$

Интегрируя (7.4б) с учетом (7.1б), (7.7), находим, что решение сформулированной задачи будет иметь вид (7.6), если

$$\sigma_1^2(t) = A_n t^n + 2\gamma HUt + \sigma_{10}^2, \quad S_{12} = S_{120} = \text{const}, \quad \sigma_2^2(t) = A_n t^n + \sigma_{20}^2.$$

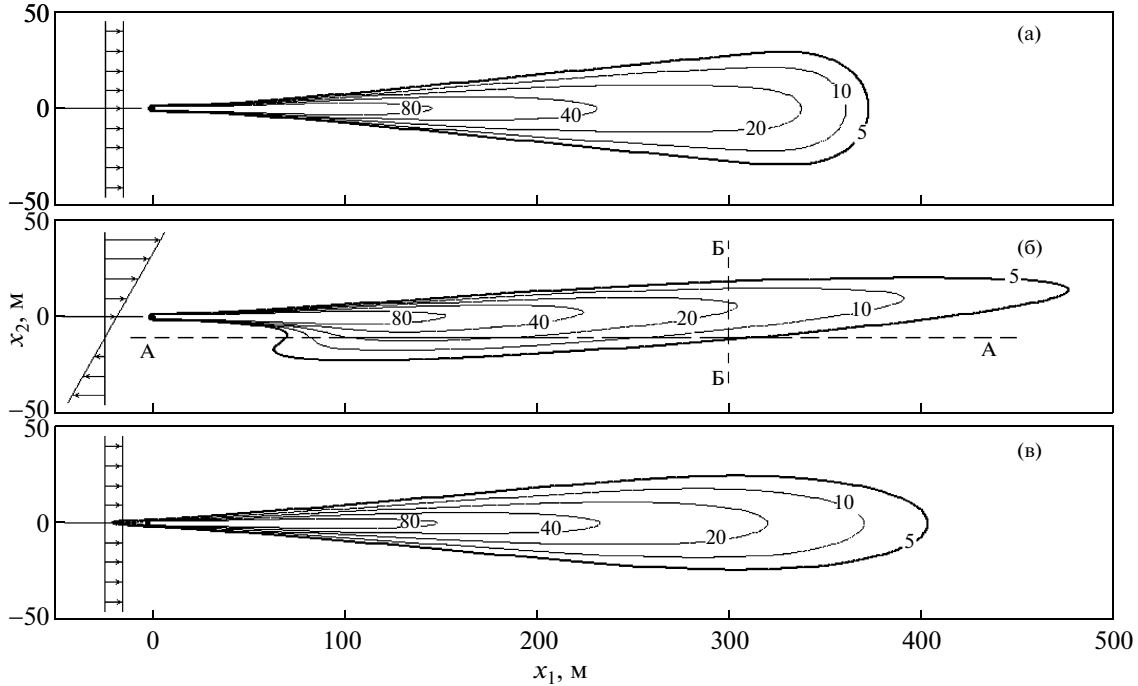
Для точечного источника постоянные интегрирования имеют значения $\sigma_{10} = \sigma_{20} = S_{120} = 0$.

Используя (7.6) и принцип суперпозиции, распределение усредненной по глубине концентрации C взвеси в шлейфах загрязнения, порождаемых источником постоянной интенсивности \dot{M} , который начинает действовать в момент времени $t = 0$, записываем в виде

$$C = \dot{M} \int_0^t G(x, t - t_0) dt_0. \quad (7.8)$$

Интеграл (7.8) рассчитывался методом трапеций. Контроль точности осуществлялся путем увеличения количества узлов интегрирования. Результаты расчетов, выполненных для случая $H = 10$ м, $U = 0.1$ м/с, $\dot{M} = 1$ кг/с, $t = 1$ ч, представлены на фиг. 2 в виде изолиний концентрации C [мг/л] взвеси в шлейфах загрязнения. В расчетах использовалась стандартная эмпирическая модель горизонтальной океанической турбулентности (см. разд. 3 настоящей работы).

На фиг. 2а представлен простейший случай потока без сдвига скорости, когда $a = 0$, $\gamma = 0$. Результаты расчетов потока с горизонтальным сдвигом (при $a = 0.1$ м⁻¹, $\gamma = 0$) показаны на фиг. 2б, а с вертикальным сдвигом (при $a = 0$, $\gamma = 0.45$) – на фиг. 2в.



Фиг. 2.

8. ТЕСТИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОБЛАКОВ

Приведенные на фиг. 2 точные решения использовались для тестирования стохастического метода дискретных облаков. Некоторые результаты приведены на фиг. 3 в виде графиков концентрации C в сечениях А–А и Б–Б, показанных на фиг. 2б. Сплошные кривые – точное решение, зачерненные маркеры – расчет стохастическим методом дискретных облаков с параметром $\alpha = 0.5$, незачерненные маркеры – расчет с параметром $\alpha = 0.1$. Во всех расчетах количество дискретных облаков составляло $N = 10^5$.

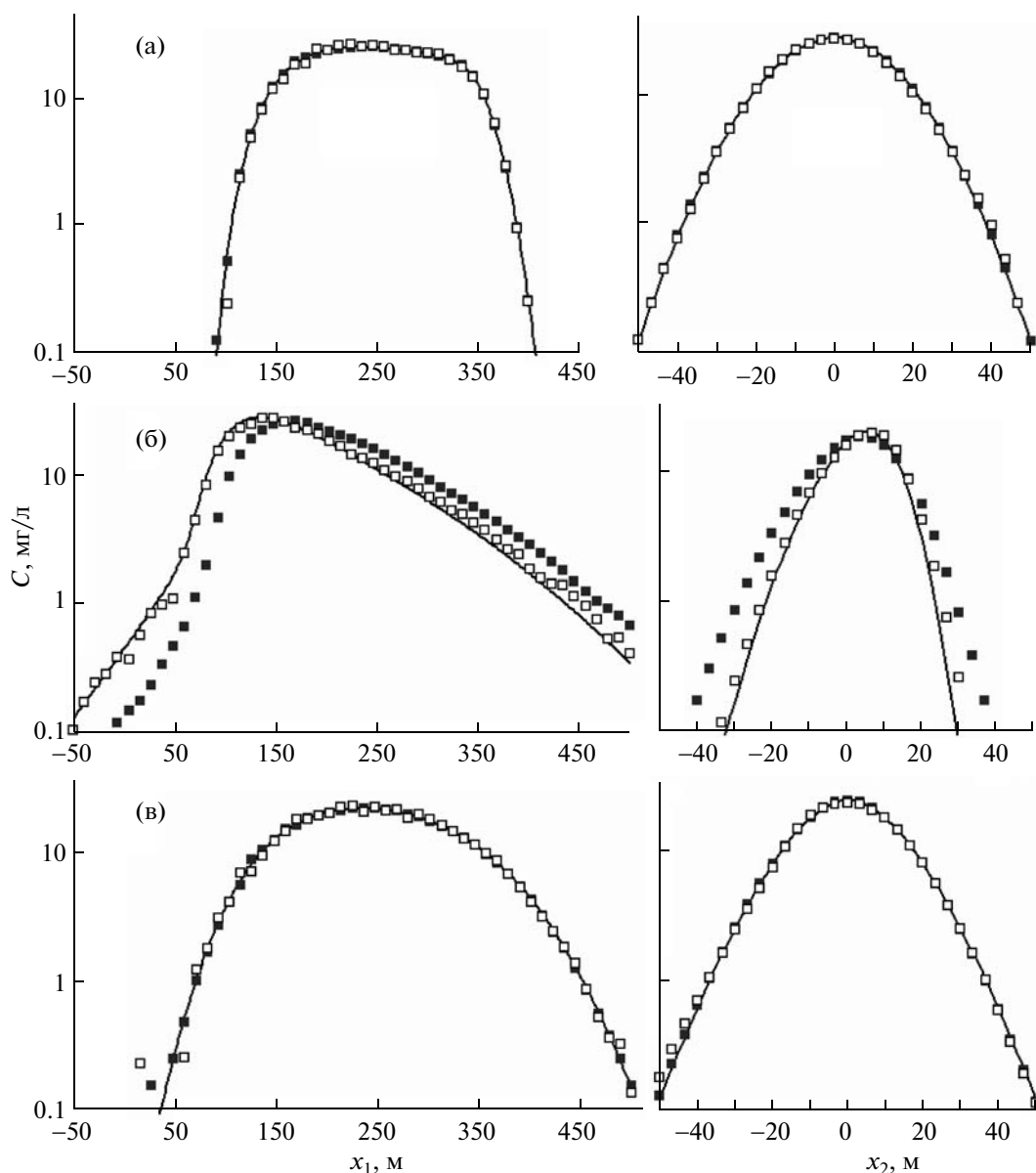
Видно, что в простейшем случае однородного потока (фиг. 3а) вне зависимости от значения α наблюдается хорошее соответствие результатов расчетов точному решению. Укажем, что, согласно нашим расчетам, здесь, как и следовало ожидать, наиболее эффективен обычный метод дискретных облаков ($\alpha = 1$). Соответствующая фиг. 3а точность в данном случае достигается уже при $N = 10^3$ (при $N = 10^2$ вблизи источника в расчетах наблюдаются заметные нефизические колебания концентрации взвеси). В то же время расчет обычным стохастическим методом ($\alpha = 0$) для получения такого же результата требует не менее $N = 10^7$ дискретных частиц.

В случае потока с горизонтальным сдвигом, когда имеется область возвратного течения (см. фиг. 2б), параметр α должен быть достаточно малым (фиг. 3б).

Наконец, в потоке с вертикальным сдвигом скорости (фиг. 3в) в области малых концентраций ($C < 1$ мг/л), как в случае $\alpha = 0.1$, так и при $\alpha = 0.5$, наблюдаются заметные флуктуации маркеров, представляющих результаты расчетов, выполненных тестируемым методом. Это не удивительно, так как в алгоритме (6.2), вне зависимости от величины α , член, описывающий продольную дисперсию, всегда моделируется стохастическим способом. Вероятно, этого можно избежать, если вместо использованных в разд. 6 “круглых” облаков (6.1) применить “эллиптические” облака (7.4). Однако вопрос о вычислительной эффективности такого подхода требует дополнительных исследований.

9. О ПЕРЕНОСЕ ВЗВЕШЕННЫХ ВЕЩЕСТВ В АКВАТОРИИ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Выше при формулировке стохастического метода дискретных облаков и в численных примерах рассматривался случай акватории постоянной глубины H . Обобщение на случай переменной медленно меняющейся глубины $H(x)$ возможно, если в модели (1.1), (4.1) вместо усредненной по



Фиг. 3.

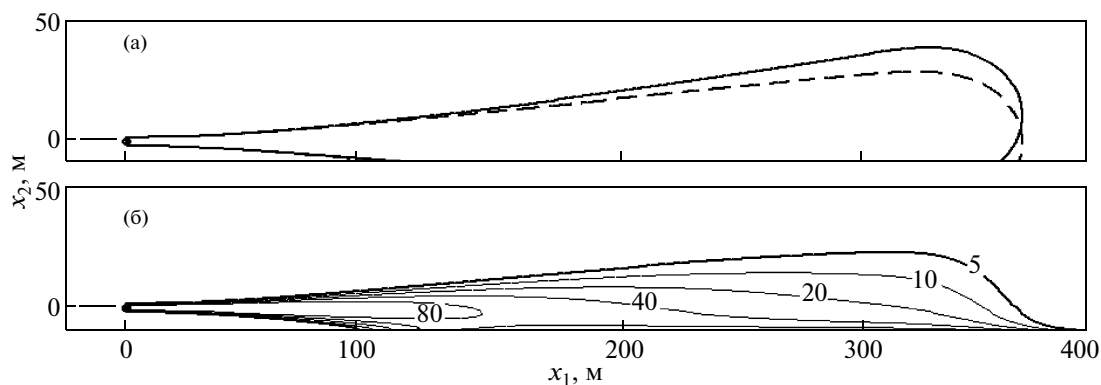
глубине концентрации $G(\mathbf{x}, t)$ рассматривать массу взвеси в единичном столбе воды: μ [кг/м²] = $= G(\mathbf{x}, t)H(\mathbf{x})$. Нетрудно видеть, что уравнение (1.1) тогда преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_i^\mu(\mathbf{x}, t) \mu - K_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \right) + \frac{W(t-t_0)}{H(\mathbf{x})} \mu = 0, \quad \mu = \delta(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t = t_0,$$

$$u_i^\mu = u_i + \Delta u_i, \quad \Delta u_i = K_{ij} \partial \ln H / \partial x_j.$$

Здесь u_i^μ – усредненные по глубине компоненты скорости течения u_i с поправкой Δu_i на процесс горизонтального перемешивания. Величина этой поправки имеет порядок $\max_i |\partial H / \partial x_i|$ и, в соответствии с исходными предположениями, должна быть малой.

На фиг. 4а показана изолиния $\mu = 50$ г/м² (сплошная кривая), рассчитанная методом облаков ($\alpha = 1$) для условий, соответствующих фиг. 2а, при глубине акватории $H(\mathbf{x}) = H(1 + bx_2)$ с $H = 10$ м



Фиг. 4.

и при достаточно большом уклоне дна $b = 0.1 \text{ м}^{-1}$ (штриховая кривая – расчет при постоянной глубине $H = 10 \text{ м}$). Видно, что поправка Δu_i действительно достаточно слабо влияет на распределения погонной (на единицу площади акватории) массы μ взвеси в шлейфе загрязнения. Ею в первом приближении можно пренебречь. Однако усредненная по глубине концентрация $C \text{ [мг/л]} = \mu/H(x)$ взвеси (фиг. 4б) при переменной глубине акватории существенно отличается от концентрации, рассчитанной для акватории постоянной глубины (фиг. 2а).

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована и проанализирована эмпирическая модель горизонтального рассеяния загрязняющих субстанций на океаническом шельфе. Предложен реализующий модель переноса и рассеяния взвешенных веществ бессеточный стохастический численный алгоритм, наследующий достоинства двух известных методов: метода дискретных облаков и стохастического метода дискретных частиц. Путем сравнения результатов расчетов с точным решением модельной задачи о турбулентном рассеянии шлейфа загрязнения, возникающего в результате действия непрерывного источника взвеси, продемонстрированы работоспособность и особенности предложенного метода.

Авторы благодарят В.В. Солбакова за полезные обсуждения настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котеров В.Н., Юрезанская Ю.С. Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Эффективная гидравлическая крупность полидисперсной взвеси // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 7. С. 1306–1318.
2. Белов В.И., Беспалов М.С., Клочкова Л.В. и др. Сравнительный анализ некоторых математических моделей для процессов распространения загрязнений в атмосфере // Матем. моделирование. 1999. Т. 11. № 7. С. 52–64.
3. Белов В.И., Беспалов М.С., Клочкова Л.В. и др. Транспортная модель распространения газообразных примесей в атмосфере города // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 11. С. 38–46.
4. Архипов Б.В., Котеров В.Н., Кочерова А.С. и др. Расчет распространения взвешенных веществ в прибрежной области моря // Водные ресурсы. 2004. Т. 31. № 1. С. 1–8.
5. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1986.
6. Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В. и др. О численном моделировании распространения загрязняющих веществ и нефтяных разливов стохастическим методом дискретных частиц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 2. С. 288–301.
7. Arkhipov B., Koterov V., Solbakov V. Numerical modeling of pollutant dispersion and oil spreading by the stochastic discrete particles method // Studies in Applied Math. 2008. V. 120. № 1. P. 87–104.
8. Richardson L.F. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph // Proc. Roy. Soc. 1926. Ser. A. V. 110. № 756. P. 709–720.
9. Архипов Б.В., Котеров В.Н., Солбаков В.В., Шапочкин Д.А. Моделирование турбулентного рассеивания загрязняющих веществ в морской среде // Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 2005.

10. *Okubo A.* Horizontal diffusion from an instantaneous point source due to oceanic turbulence // Chesapeake Bay Inst. Techn. Rept. № 32. The Johns Hopkins Univ., 1962.
11. *Okubo A.* A new set of oceanic diffusion diagrams // Chesapeake Bay Inst. Techn. Rept. № 38. The Johns Hopkins Univ., 1968.
12. *Окубо А., Озмидов Р.В.* Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления // Физ. атмосферы и океана. 1970. Т. 6. № 5. С. 534–536.
13. *Монин А.С., Озмидов Р.В.* Океаническая турбулентность. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
14. *Озмидов Р.В.* О некоторых особенностях энергетического спектра океанической турбулентности // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 4. С. 828–831.
15. *Озмидов Р.В.* О зависимости коэффициента горизонтального турбулентного обмена в океане от масштаба явления // Физ. атмосферы и океана. 1968. Т. 4. № 11. С. 1224–1225.
16. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965; Ч. 2. 1967.
17. *Foxworthy J.F., Tibby R.B., Barsom G.M.* Dispersion of a surface waste field in the sea // Water Pollut. Control Fed. 1966. V. 38. P. 1170–1193.
18. *Murthy C.R.* Horizontal diffusion characteristics in Lake Ontario // Phys. Oceanogr. 1976. V. 6. P. 76–84.
19. *Новиков Е.А.* О турбулентной диффузии в потоке с поперечным градиентом скорости // Прикл. матем. и механ. 1958. Т. 12. Вып. 3. С. 412–414.
20. *Ниуль Ж.* Моделирование морских систем. М.: Гидрометеиздат, 1978.
21. *Nihoul J.C.J.* Shear effect diffusion in shallow open seas // Bul. Soc. Roy. Scienc. de Liège. 1972. 41^e année. № 9–10. P. 521–526.
22. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000.
23. *Котеров В.Н., Юрезанская Ю.С.* Моделирование рассеивания взвешенных веществ на океаническом шельфе // Материалы XVI междунар. конф. по вычисл. механ. и соврем. прикл. программным системам. Алушта, 25–31 мая 2009 г. С. 433–435.