

УДК 510.647

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОМЕРНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© 2010 г. Э. В. Недоступов, Д. А. Саранча, Е. Н. Чигерев, Ю. С. Юрезанская

Представлено академиком Д. В. Аносовым 20.07.2009 г.

Поступило 03.08.2009 г.

Одномерное унимодальное отображение (ОУО) является одним из популярных объектов, иллюстрирующих богатство динамических режимов в простых разностных уравнениях. Получены такие результаты, как порядок Шарковского, каскады удвоений [1, 2]. В данном сообщении проведено исследование ОУО, полученных при описании динамики численностей животных. Для ОУО такого типа существует сценарий изменения выделенного параметра, при котором последовательно возникают зоны стабильности с устойчивыми циклами. Внутри зоны стабильности период циклов постоянный, при переходе от одной зоны к другой период изменяется в последовательности натурального ряда 1, 2, 3, 4, ... Зоны стабильности отделены друг от друга переходными зонами с более сложными режимами. Предложены оригинальные способы нахождения периодических траекторий ОУО.

### ПРОИСХОЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

В наших исследованиях задача об изучении свойств ОУО (разностных уравнений) возникла при описании динамики численности животных в рамках математических моделей тундровых популяций и сообществ [3–5]. В результате проведенных исследований удалось построить набор взаимосвязанных моделей. Основа набора — детальные имитационные модели, построенные во взаимодействии с биологами на основе экспертно оцененных зависимостей, учитывающих сезонные изменения параметров. Анализ результатов вычислительных экспериментов с взаимодополняющими моделями сообщества растительность—лемминги—песцы (рис. 1а) и популяции леммингов с учетом возрастной структуры привел к обоснованию упрощенной модели в виде разностного уравнения, графическое представление

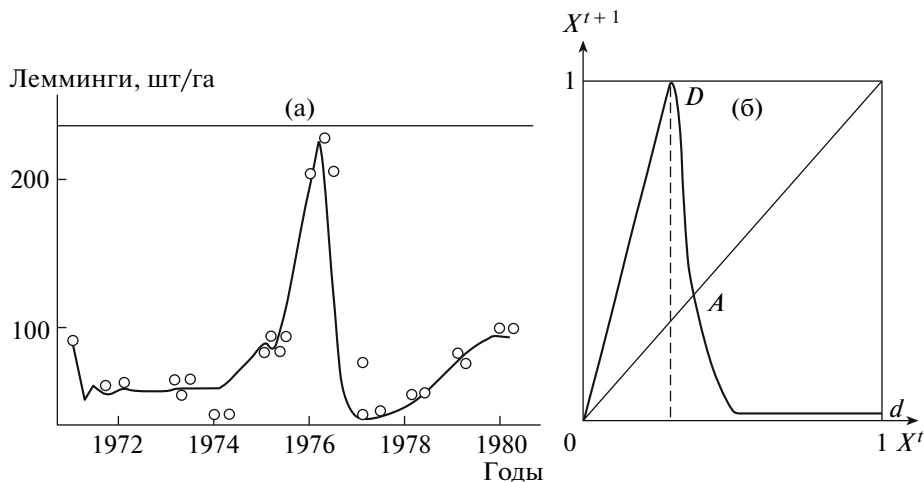
которого дано на рис. 1б. С помощью разностного уравнения

$$X^{t+1} = F(X^t), \quad (1)$$

связывающего нормированные численности леммингов  $X^t$  в двух соседних годах, удалось воспроизвести временную динамику, качественно близкую к динамике численностей реальных популяций леммингов [3–5]. Наличие таких разностных уравнений качественно изменило технологию и возможности моделирования. Параметрические исследования этих уравнений позволили определить в исходных имитационных моделях области параметров, обеспечивающие динамические режимы, близкие к наблюдаемым в природе. С помощью разностных уравнений удалось сформулировать гипотезы о механизмах формирования колебаний численности тундровых животных; выделить три главных показателя, их определяющих: 1) скорость прироста биомассы в благоприятный год; 2) максимальную численность; 3) выживаемость в наиболее неблагоприятных условиях (или двух безразмерных — относительной скорости прироста популяции и доли гарантированно выживших зверьков). Первый показатель характеризует баланс между процессами рождаемости и смертности в отсутствие давления среды; второй характеризует экосистему в целом и отражает коэволюцию леммингов и кормовой базы; третий характеризует адаптационные свойства леммингов в экстремальных условиях и во многом определяется локальными характеристиками, в частности рельефом местности в местах перезимовки.

Особую остроту данным исследования ОУО придавал тот факт, что для моделируемой популяции леммингов Западного Таймыра типичным является чередование максимумов численности через три года. В то же время цикл периода три в порядке Шарковского гарантирует существование циклов любой длины [1]. В данном сообщении предложен такой тип ОУО и такой сценарий изменения выделенного параметра, при котором реализуется изменение периода циклов в порядке натурального ряда.

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына  
Российской Академии наук, Москва*



**Рис. 1.** а – расчетная динамика популяции леммингов по результатам одного из имитационных экспериментов с моделью растительность–лемминги–песцы (сплошная кривая) и зарегистрированная на острове Врангеля динамика изменения численности копытного лемминга (кружки) [6]. б – графическое представление разностного уравнения  $X^{t+1} = F(X^t)$ , связывающего нормированные численности леммингов  $X^t$  в двух соседних годах, основанные на анализе моделей тундровых популяций и сообществ. Здесь  $D$  – точка достижения максимального значения численности,  $A$  – равновесная численность,  $d$  – численность леммингов в оптимальном биотопе (понятие “оптимальный биотоп” было введено в работах [3, 5] и подразумевает область пространства обитания с оптимальными условиями проживания; в оптимальном биотопе при любых условиях выживает определенное число зверьков).

**Утверждение.** Для ОУО вида

$$X^{t+1} = F_1(X^t) \equiv \begin{cases} 2X^t, & 0 \leq X^t \leq 0.5, \\ d (0 < d < 1), & 0.5 < X^t \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

при уменьшении параметра  $d$  от 1 до 0 последовательно появляются глобально устойчивые циклы периода  $n$ , где  $n$  последовательно пробегает все натуральные числа.

Доказательство данного утверждения приведено в работе [4].

В утверждении рассмотрен случай разрывной функции  $X^{t+1} = F_1(X^t)$ . Теперь устраним разрыв. В окрестности точки разрыва соединим левую и правую части графика функции  $F_1$  монотонно убывающей кривой, близкой к отрезку вертикали. Рассмотрим, например, функцию  $F_1$  (при  $r \gg 1$ )

$$X^{t+1} = F_1(X^t) \equiv \begin{cases} 2X^t, & 0 \leq X^t \leq 0.5, \\ 1 - r(X^t - 0.5), & 0.5 < X^t \leq 0.5 + \frac{1-d}{r}, \\ d(0 < d < 1), & 0.5 + \frac{1-d}{r} < X^t \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Для такой функции были проведены вычислительные эксперименты. Результаты некоторых из них приведены на рис. 2. Как и выше, характер динамических режимов исследовался при изменении параметра  $d$  от 1 до 0. В этом случае динамические режимы стали более разнообразными. На рис. 2 можно выделить зоны стабильности,

которые отделены переходными зонами со сложными режимами (черные вертикальные полосы). Внутри зон стабильности период траекторий постоянный, при переходе от одной зоны стабильности к другой период изменяется в порядке натурального ряда. В каждой из переходных зон существуют периодические траектории с периодом, большим любого наперед заданного натурального числа. При этом ширину переходных зон можно сделать как угодно малой при стремлении параметра  $r$  к бесконечности.

Наличие переходных зон находится в определенном соответствии с зарегистрированной динамикой реальных популяций. При отсутствии четкого трехлетнего цикла (в более теплых по сравнению с Таймыром регионах) встречаются двух- и пятилетние временные интервалы между пиками численности [6].

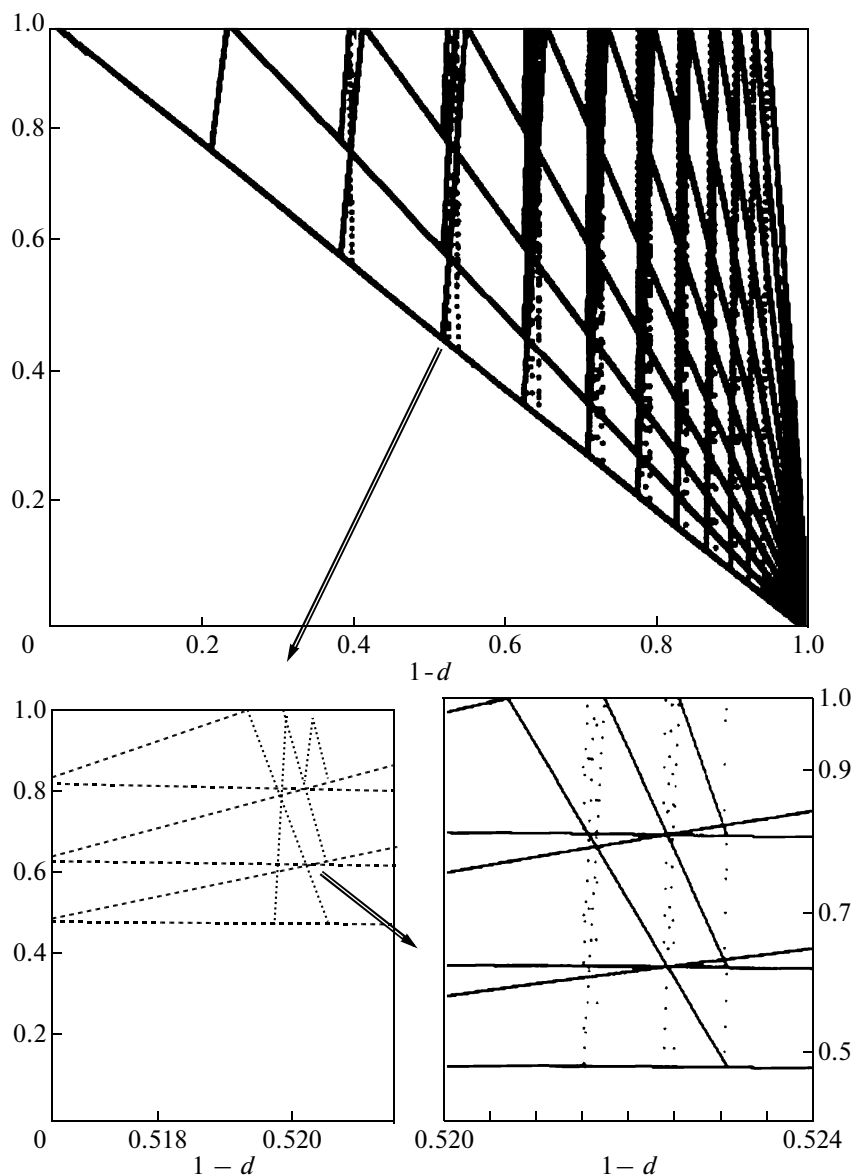
#### НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

В данном сообщении предложены конструктивные способы нахождения периодических траекторий ОУО. Будем рассматривать ОУО

$$X^{t+1} = F(X^t),$$

отображающие отрезок  $[0, 1]$  на себя, с положением равновесия в точке  $A$ .

Пусть функция  $F$  монотонно возрастает на отрезке  $[0, D]$  ( $D < 1$ ), при этом  $F(X^t) > X^t$ , достигает максимального значения  $F(D) = 1$  в точке  $D$  и затем монотонно убывает с возможным последую-



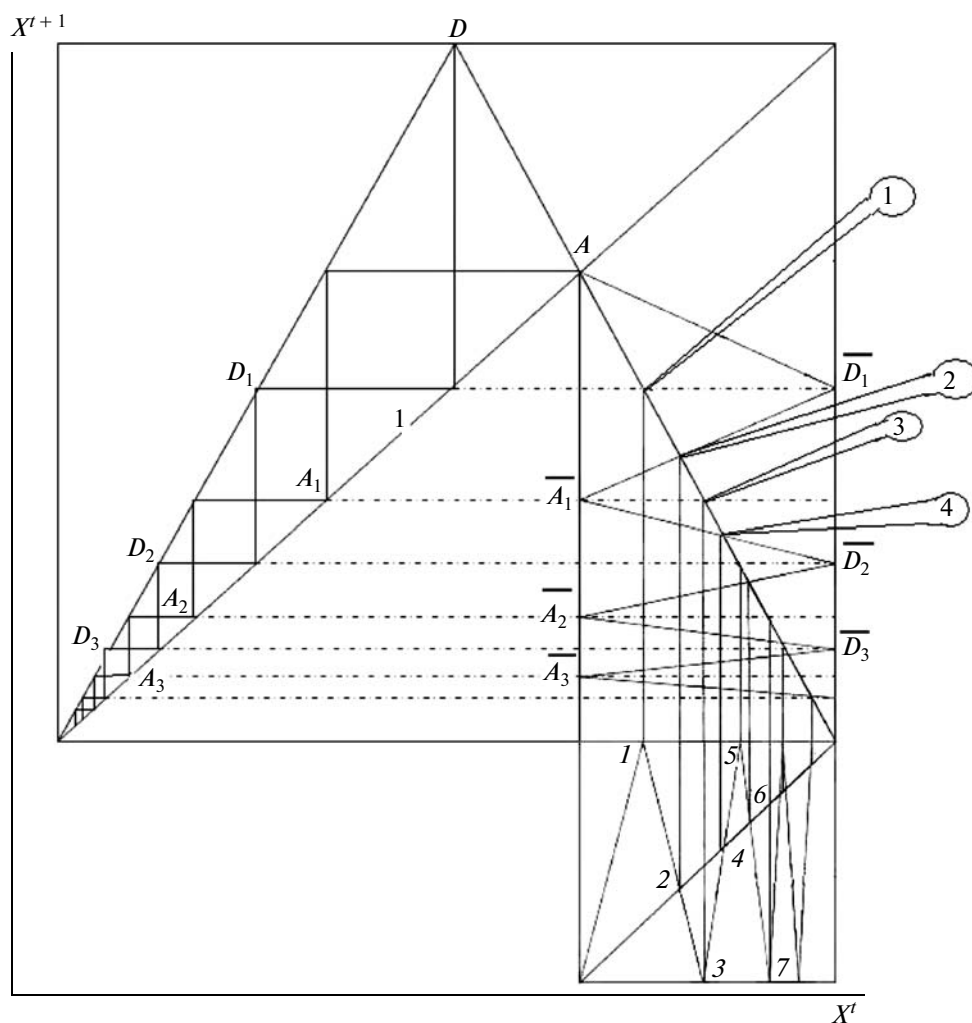
**Рис. 2.** Результаты вычислительных экспериментов с моделью (3) – зависимость траекторий модели от величины  $1 - d$ . По оси абсцисс отложена величина  $1 - d$ . Вертикальное сечение графика при выбранном значении  $d$  представляет собой точки траектории.

шим переходом в горизонтальный участок (см. рис. 16).

Для анализа поведения траекторий определим два множества точек: множество  $M = \{A_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $K = \{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Множество  $M$  ( $K$ ) состоит из таких точек  $A_i$  ( $D_i$ ), что  $F^i(A_i) = A$  ( $F(D_i) = D$ ) (рис. 3), где  $F^i(\cdot) = F(F(\dots(F)))$  –  $i$ -кратное отображение. При этом  $A_0 = A$  ( $D_0 = D$ ). Если траектория находится слева от точки  $A$  и ордината одной из ее точек попадает в интервал  $[A_i, A_{i-1}]$ , то в следующем такте траектория попадает в интервал  $[A_{i-1}, A_{i-2}]$ . В связи с этим приведенное выше утверждение можно переформулировать следующим образом.

**Утверждение 1.** Если функция  $F_1$ , заданная формулой (2), удовлетворяет условию  $A_n < d < A_{n-1}$ , то существует единственный глобально устойчивый цикл периода  $n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Стандартным приемом исследования ОУО является изучение  $F^i(\cdot) = F(F(\dots(F)))$   $i$ -кратных отображений  $F$ . В данном сообщении для изучения свойств периодических решений введены две конструкции – линия возврата (ЛВ) и отображение за положение равновесия (ОПР). Введение таких конструкций связано с тем, что для рассматриваемых ОУО положение равновесия  $A$  разбивает отрезок  $[0, 1]$  на два:  $[0, A]$  и  $[A, 1]$ . Эти ча-



**Рис. 3.** Графическое представление треугольного отображения, его ЛВ1 –  $\bar{A} \bar{D}_1 \bar{A}_1 \bar{D}_2 \bar{A}_2 \bar{D}_3 \bar{A}_3$  и ОПР (вынесенный квадрат в правом нижнем углу). Точки 1 и 5 порождены прообразами точки  $D$ , точки 3 и 7 порождены прообразами положения равновесия  $A$ , точки 2, 4, 6 порождены пересечением графика треугольного отображения с ЛВ1 и определяют периодические траектории (первая – периода 2, две другие – периода 3).

сти неравноправны. Во второй части отрезка траектория не может находиться два такта подряд.

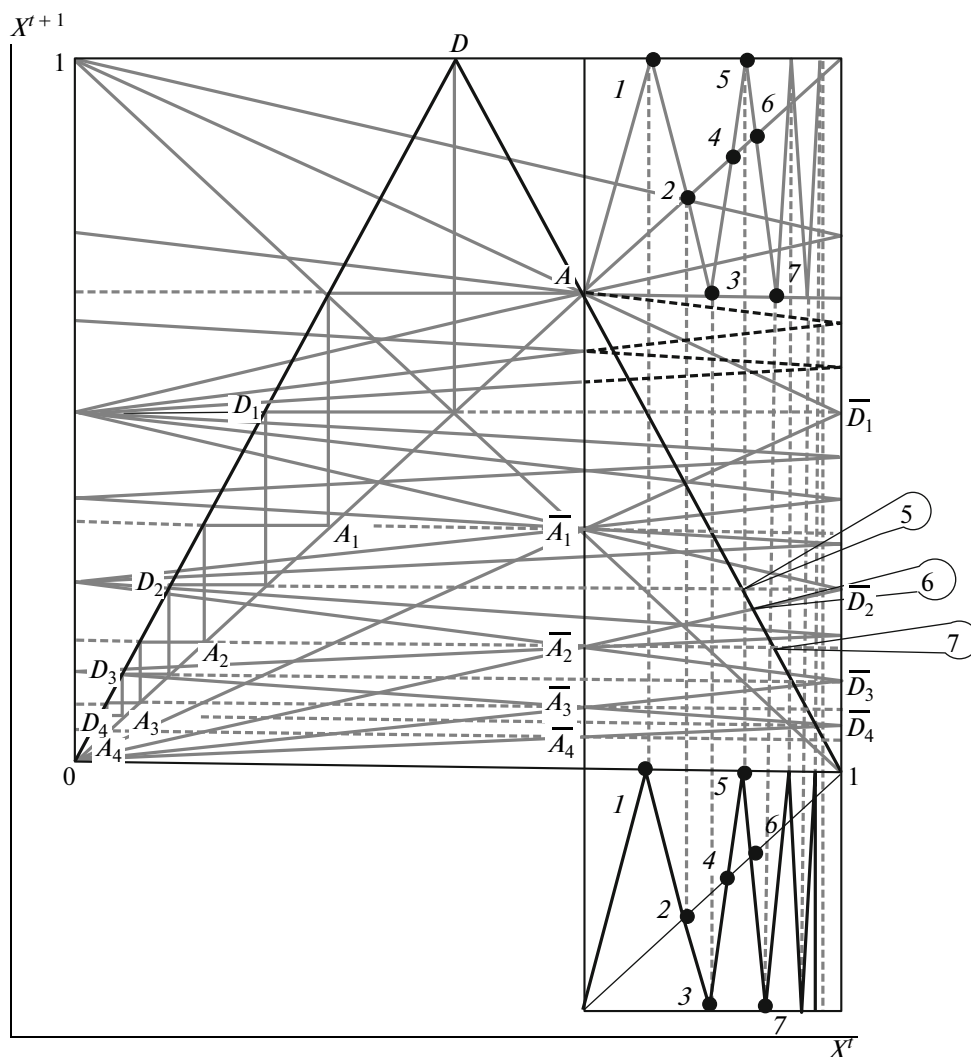
**Определение 1.** ОПР определяется как отображение отрезка  $[A, 1]$  на себя, при котором каждому значению  $X$  из этого отрезка ставится в соответствие значение  $Y$  при первом возвращении траектории за положение равновесия.

Новое отображение можно исследовать обычными методами (поиск стационарных точек,  $n$ -кратное отображение и т.д.). Соответствующим линейным преобразованием отрезок  $[A, 1]$  можно привести к отрезку  $[0, 1]$ . Кроме ОПР, определим ЛВ $n$  – линии возврата  $n$ -го порядка.

**Определение 2.** ЛВ  $n$ -го порядка (ЛВ $n$ ) для отображения  $F$  называется кривая в прямоугольнике  $A \leq X^t \leq 1, 0 \leq X^{t+1} \leq A$ , являющаяся графиком функции  $F_c^{(n)}(X^{t+1})$ , которая отображает

отрезок  $0 < X^{t+1} \leq A$  на отрезок  $A \leq X^t \leq 1$  по описанному ниже алгоритму.

**Алгоритм построения ЛВ $n$ .** Через любое значение  $X^{t+1}$  из отрезка  $0 \leq X^{t+1} \leq A$  в прямоугольнике  $A \leq X^t \leq 1, 0 \leq X^{t+1} \leq A$  проведем горизонтальную линию. Ее пересечение с графиком функции  $F(\cdot)$  дает начальные условия для построения соответствующей траектории. Построим ее с помощью алгоритма создания лестницы Ламедея. При  $n$ -м возврате за положение равновесия, согласно этому алгоритму, от биссектрисы угла между осью абсцисс и осью ординат опускаем соответствующую вертикальную линию. Точка пересечения этой линии с тестирующей горизонтальной линией принадлежит ЛВ $n$  с координатами  $(X^t, X^{t+1})$ .



**Рис. 4.** Графическое представление треугольного отображения, его ЛВл и ОПР (ОПР – вынесенный квадрат в правом нижнем углу и квадрат в правом верхнем углу), а также его  $n$ -кратные отображения, повернутые на  $90^\circ$ . ЛВл сформировано соответствующими фрагментами этих отображений, а ОПР в правом верхнем углу построено из фрагментов исходных  $n$ -кратных отображений. Точки, обозначенные цифрами, совпадают с точками рис. 3.

Тем самым в указанном выше прямоугольнике каждому значению  $X^{t+1}$  соотнесено значение  $X^t$ , т.е. задана функция  $X^t = F_c^{(n)}(X^{t+1})$ . Примеры графиков этой функции представлены на рис. 3 и 4. Точки пересечения ЛВл с графиком исходной функции  $F$  задают периодические траектории. При этом с помощью ЛВл можно отыскивать все периодические траектории с периодом, меньшим или равным  $n$ .

**Утверждение 2.** *Периодическая траектория устойчива, если включает в себя точку пересечения графика отображения  $F(X^t)$  с графиком функции  $F_c^{(n)}(X^{t+1})$  и если в этой точке существуют соответствующие производные и для них выполнено условие  $|F'| < |(F_c^{(n)})'|$ .*

Доказательство проводится методом сжатых отображений [4].

При формировании линий ОПР и ЛВ1 особое значение имеют траектории, порожденные точками  $\{A_n, n = 0, 1, 2, \dots\}, \{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . Первые формируют минимумы, вторые – максимумы этих линий. Оба типа линий представляют собой пилообразные кривые, число зубцов которых для ОПР и ЛВ1 определяется количеством прообразов положений равновесия. Для треугольного и логистического отображений они образуют счетное множество.

Пример построения ЛВ1 и ОПР приведен на рис. 3 для стандартного треугольного отображения

$$X^{t+1} = F_0(X^t) = 1 - 2|0.5 - X^t|.$$

Введенные конструкции ЛВ и ОПР связаны со стандартными  $F^i(\cdot) = F(F(\dots(F)))$  –  $i$ -кратными отображениями. Эту связь иллюстрирует рис. 4. Как видно, ОПР формируется фрагментами  $F^i(\cdot)$ , которые находятся в правом верхнем углу ( $X^i, X^{i+1} > A$ ), а ЛВ формируется из  $F^i(\cdot)$ , повернутых на  $90^\circ$ . Гипотеза о возможности построения ЛВ и ОПР таким способом оказалась справедливой для всех известных авторам отображений (в частности, для логистического).

Авторы выражают глубокую благодарность академику Д.В. Аносову, Л.И. Голубятникову, Д.О. Логофету и В.П. Пасекову за поддержку и обсуждение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07–01–00473-а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарковский А.М. // Укр. мат.журн. 1964. Т. 16. № 1. С. 61–65.
2. Шарковский А.Н. Разностные уравнения и динамика численности популяций. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. 22 с.
3. Байбиков Е.В., Белотелов Н.В., Завьялова С.В. и др. В кн.: О моделировании тундровых популяций и сообществ. Математическое моделирование. Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986. С. 207–219.
4. Белотелов Н.В., Дмитриева И.В., Саранча Д.А. В кн.: Биомоделирование. М.: ВЦ РАН, 1993. С. 111–154.
5. Саранча Д.А. Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование. М.: МФТИ, 1997. 283 с.
6. Чернявский Ф.Б., Ткачев А.В. Популяционные циклы леммингов в Арктике (экологические и эндокринные аспекты). М.: Наука, 1982. 164 с.